

exercice 1

①

Q20

Comme $x \in]-1, 1[$, $1 - x^n \neq 0$ ($\forall n \geq 1$)

et $u_n = \frac{n x^n}{1 - x^n} \sim n x^n$

Comme $n^2(n x^n) = n^3 x^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{G.C.} 0$,

$u_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, $\frac{1}{n^2} \geq 0$, $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ vj d'ou pa TC;

$\left(\sum \frac{n x^n}{1 - x^n}\right)$ vj absolument

Comme $|x^n| < 1$, $\frac{1}{1 - x^n} = \sum_{k=0}^{+\infty} (x^n)^k$

d'ou $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^n}{1 - x^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} n x^{n(1+k)}$

Q21

$v_p = \frac{x^p}{(1 - x^p)^2} \sim x^p$ donc $|v_p| \sim |x^p| \geq 0$

$(\sum |v_p|)$ vj d'ou pa TC $\left(\sum v_p\right)$ vj.

Analyse

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^n}{1 - x^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} n x^{n(1+k)} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n(1+k)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{1+k}}{(1 - x^{1+k})^2}$

synthèse Etudions la famille $(n x^{n(1+k)})_{(n,k) \in I}$ (2)
avec $I = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$: $(\sum_k |n x^{n(1+k)}|)_k$ cvg abs. (série géométrique
 $0 \leq q = |x^n| < 1$)

de somme $\sigma'_n = \sum_{k=0}^{\infty} |n x^{n(1+k)}|$ ($\sum_{k=1}^{\infty} q^k = \frac{q}{1-q}$)
 $= n \frac{|x|^n}{1-|x|^n}$

et $(\sum \sigma'_n)$ cvg grâce à Q20.

cqs, la famille est sommable par S.P.P. et

$$\sum_{(n,k) \in I} n x^{n(1+k)} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} n x^{n(1+k)} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n(1+k)}$$

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n}}_{\parallel} \quad \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{1+k}}{(1-x^{1+k})^2}}_{\parallel} \quad (p=k+1)$$

c'est le résultat admis $\sum_{p=1}^{\infty} n x^n = \frac{x}{1-x^2}$

d'où
 $\forall x \in]-1, 1[: \sum_{p=1}^{\infty} \frac{x^p}{(1-x^p)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^n}{1-x^n}$

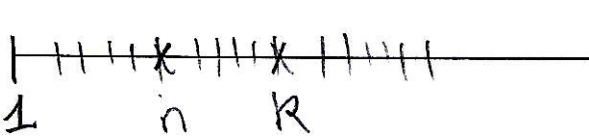
Q22 $\frac{1}{k^3(k+1)} \sim \frac{1}{k^4} \geq 0$, $\left(\sum \frac{1}{k^4}\right)$ cvg, d'où

(3)

par TC, u_n est bien définie

Q23 Analyse $\sum_{n=1}^{\infty} n \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^3(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^k \frac{n}{k^3(k+1)}$

$\searrow$
 $= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(k+1)}{2} \times \frac{1}{k^3(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k^2} = \frac{\pi^2}{6}$



Synthèse: Posons $u_{n,k} = \begin{cases} \frac{n}{k^3(k+1)} & \text{si } k \geq n \geq 1 \\ 0 & \text{si } 1 \leq k < n \end{cases}$

$I = (\mathbb{N}^*)^2$ et montrons avec S.P.P. que $(u_{n,k})_{(n,k) \in I}$ sommable

* $\forall k \in \mathbb{N}^*$ $\sigma_k = \sum_{n=1}^{\infty} u_{n,k} = \sum_{n=1}^k \frac{n}{k^3(k+1)}$ ex'1) $\frac{1}{k^2}$

et $\sigma_k = \frac{1}{k^2} \left(\sum_{n=1}^k n = \frac{k(k+1)}{2} \right)$

* $(\sum \sigma_k)$ cvg (série de Riemann)

Cq2 Par S.P.P., la famille $(u_{n,k})_{(n,k) \in I}$ est sommable

et $\sum_{(n,k) \in I} u_{n,k} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} u_{n,k} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^k u_{n,k}$

d°

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

(4)

Q24 Soit $i \geq 0 : \forall j > i \quad b_{i,j} = \frac{1}{2^{j-i}} = 2^i \left(\frac{1}{2}\right)^j$

série géométrique cvg et $\sum_{j=0}^{\infty} b_{i,j} = b_{i,i} + \sum_{j=i+1}^{\infty} 2^i \left(\frac{1}{2}\right)^j$

$$= -1 + \frac{2^i}{2^{i+1}} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 0$$

$$d \quad \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{\infty} b_{i,j} = 0$$

Q25 Soit $j \geq 0 \quad \forall i > j \quad b_{i,j} = 0$ donc

$$\sum_{i=0}^{+\infty} b_{i,j} = \sum_{i=0}^{j-1} b_{i,j} + b_{j,j} + \sum_{i=j+1}^{+\infty} 0$$

rem. si $j=0$ le
1^{er} $\sum$ est "vide"

$$= \sum_{i=0}^{j-1} \frac{1}{2^{j-i}} - 1 = \sum_{k=1}^j \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^j} - 1 = -\frac{1}{2^j}$$

cq ($\sum \frac{1}{2^j}$) cvg et
↑
de somme 2

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} b_{i,j} = 2$$

Q26 Non, No, Nein, Niet...

(5)

Q27 Soit $i \geq 0, \forall j > i \quad c_{ij} = \frac{-2i}{3^{j-i}} = O\left(\frac{1}{3^i}\right)$

d'où par TC, $(\sum c_{ij})_j$ cvg abs et

$$\sum_{j=0}^{+\infty} c_{ij} = c_{i,i} + \sum_{j=i+1}^{\infty} \frac{-2i}{3^{j-i}}$$

$$= i - 2i \frac{1}{3} \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = 0$$

d'où $\sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} c_{ij} = 0$

Q28 Soit $j \in \mathbb{N}, \forall i > j \quad c_{ij} = 0$ donc $(\sum c_{ij})_i$ cvg

et $\sum_{i=0}^{+\infty} c_{ij} = \sum_{i=0}^{j-1} c_{ij} + j + 0$ | $\sum_{i=0}^{+\infty} c_{i,0} = 0$

$$= \sum_{i=0}^{j-1} \frac{-2i}{3^{j-i}} + j$$

Montrons par récurrence que $S_j = \sum_{i=0}^{j-1} \frac{-2i}{3^{j-i}} + j = \frac{1}{2} \frac{3^j - 1}{3^{j-1}}$

$j=0$: $0 = 0$ et si c'est vrai pour j ,

$$S_{j+1} = \sum_{i=0}^j \frac{-2i}{3^{j+1-i}} + j+1 = \frac{1}{3} \left(\sum_{i=0}^{j-1} \frac{-2i}{3^{j-i}} \right) - \frac{2j}{3} + j+1$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \frac{3^j - 1}{3^{j-1}} - j \right) + \frac{1}{3} j + 1 = \frac{1}{2} \left[\frac{3^j - 1}{3^j} + 2 \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{3 \times 3^j - 1}{3^j} \right] = \frac{1}{2} \frac{3^{j+1} - 1}{3^{j+1} - 1} \text{ donc vrai par } j+1. \quad (6)$$

$$\underline{\text{d}} \quad \forall j \in \mathbb{N} \quad \sum_{i=0}^{\infty} c_{i,j} = \frac{1}{2} \frac{3^j - 1}{3^j - 1}$$

$$Q29 \quad \sigma_j = \frac{1}{2} \frac{3^j - 1}{3^j - 1} \sim \frac{3^j}{2 \cdot 3^{j-1}} = \frac{3}{2} \geq 0$$

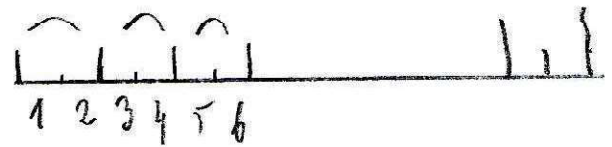
$$\text{d'où par TC} \quad \left(\sum_j \sigma_j \right)_j = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \sum_j c_{i,j} \right)_j \text{ diverge}$$

$$\text{Et donc} \quad \left\| \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{\infty} c_{i,j} \right\| = +\infty$$

I 1^o) Deux méthodes :

a) On choisit 2 éléments parmi $2n$ soit $\binom{2n}{2}$.
 une fois cette paire choisie, on choisit 2 elt
 parmi les $2n-2$ elt restant soit $\binom{2n-2}{2} \dots$ soit
 un total de $\binom{2n}{2} \times \binom{2n-2}{2} \times \dots \times \binom{2}{2}$

b) (pt de vue global) On remplit un tableau de $2n$
 case soit $(2n)!$ possibilités



Cela crée n sous-tableaux de 2-cases. Dans ces
 2-cases l'ordre n'a pas d'importance, il faut donc
 diviser par $2 \times \dots \times 2 = 2^n$, soit un total de $\frac{(2n)!}{2^n}$

Vérifions que l'on obtient le même résultat!

$$\frac{(2n)!}{2! (2n-2)!} \times \frac{(2n-2)!}{2! (2n-4)!} \times \dots \times \frac{2!}{2! \times 0!} = \frac{(2n)!}{2^n}$$

2') exemple avec $n=3$, $E_3 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

(2)

$\mathcal{P} = \{ \{1, 5\}, \{2, 6\}, \{3, 4\} \}$ est une partition de E_3 .

Cela correspond à vider l'urne par $\{1, 5\}$, $\{2, 6\}$ puis $\{3, 4\}$ et toutes les permutations de ces 3 paquets (ex: $\{2, 6\}$, $\{3, 4\}$ puis $\{1, 5\}$).

A chaque partition correspond $n!$ vidage d'urnes (par paquets).

d' :
$$h_n = \frac{(2n)!}{2^n \cdot n!}$$

3')
$$h_n = \frac{(2n-1) \times (2n-3) \times (2n-5) \times \dots \times 3 \times 1}{2^n \times n!}$$

d' :
$$h_n = (2n-1)(2n-3) \dots 3 \times 1$$

II 1) on considère $\Omega = \{ \text{paquets} \}$ avec l'équiprobabilité.

$|\Omega| = \binom{2n}{2}$ et il n'y a qu'un seul tirage favorable.

d' :
$$p = \frac{1}{n(2n-1)}$$

2) Notons A_1 : "aucune des 2 boules c_i n'a été tirée au 1^{er} tirage" (3)

B_2 : "la paire c_i a été tirée au 2^{ème} tirage"

On cherche $p_2 = p(B_2)$ et comme $B_2 = A_1 \cap B_2$, par

formule des probas composées : $p_2 = p(A_1) \times p(B_2/A_1)$

Pour A_1 , le nombre de cas favorables est $\binom{2n-2}{2}$:

on choisit 2 boules parmi $E_n - \underbrace{\{b_1, b_1'\}}_{\text{boules } c_i}$

$$\text{donc } p(A_1) = \frac{\binom{2n-2}{2}}{\binom{2n}{2}} = \frac{(2n-2)(2n-3)}{2n(2n-1)}$$

$$\text{et } p(B_2/A_1) = \frac{1}{\binom{2n-2}{2}} \text{ et donc } \boxed{p_2 = \frac{1}{n(2n-1)}} (= p_1)$$

3) On pourrait utiliser la formule $p(B_k) = p(A_1 \cap \dots \cap A_{k-1} \cap B_k) + F.P.C.$

mais il y a plus simple : on utilise la I 19. Un tirage favorable consiste à tirer l'une privée des boules c_i .

$$P(B_k) = \frac{(2n-2)! / 2^{n-1}}{(2n)! / 2^n}$$

$$\text{d'où : } \boxed{P(B_k) = \frac{1}{n(2n-1)}}$$

(4)

4) Notons B : "au cours du tirage, on a pu réunir les boules c_1 ".

$$B = \bigcup_{k=1}^n B_k \quad (\text{événements épuisants}) \quad \text{donc } P(B) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n(2n-1)}$$

$$\text{d'où : } \boxed{P(B) = \frac{1}{2n-1}}$$

III 1°) On ne s'intéresse plus à l'ordre des tirages, on peut donc prendre comme univers $\Omega = \{ \text{partition par paires de } E_n \}$
On a vu au I 2°) que $|\Omega| = h_n$. Comme il n'y a qu'une seule partition par paires homogène d'où :

$$\text{d'où : } \boxed{P_{n,n} = \frac{1}{h_n} = \frac{2^{n-1} n!}{(2n)!}}$$

2°) Si l'on a tiré une paire homogène, il reste donc d'une 2 boules de la dernière couleur et donc on tirera une paire homogène. d'où :

$$\boxed{P_{n-1,n} = P(\phi) = 0}$$

$$3') \quad P_{0,2} + P_{1,2} + P_{2,2} = P(\Omega) = 1$$

$\parallel$
 0

$\parallel$
 $1/3$

$$\text{d'où } \boxed{P_{0,2} = \frac{2}{3}}$$

Pour $P_{n-2,n}$, un tirage favorable consiste à choisir

$\binom{n}{n-2}$ couleurs: $c_{i,1}, \dots, c_{i,n-2}$ et à former une

partition: $\{ \{c_{i,1}, c_{i,1}^1\}, \dots, \{c_{i,n-2}, c_{i,n-2}^1\}, \{x, x\}, \{x, x\} \}$

il y a 2 ← termes créés
 de ces 2, deux tirages
 couleurs
 tirages possibles comme pour $P_{0,2}$

donc $P_{n-2,n} = \frac{\binom{n}{n-2} \cdot 2}{h_n}$

$$\text{d'où } \boxed{P_{n-2,n} = \frac{n(n-1)}{h_n}}$$

4') Posons A_h : "on obtient exactement h paires homogènes au cours du vidage".

On cherche donc $\underline{P_{h,n} = \frac{|A_h|}{|\Omega|} = \frac{|A_h|}{h_n}}$

Pour $|A_h|$, on commence par choisir la couleur parente:

$\binom{n}{h}$. Il reste alors $2n-2h$ boules des $n-h$ couleurs restantes.

Il faut que le vidage de ces $2(n-k)$ barils se fasse^⑥
 dans paires homogènes. Soit N le nombre de ces vidages,
 on a (toujours avec l'équiprobabilité) : $P_{0,n-k} = \frac{N}{h_{n-k}}$,

donc $N = P_{0,n-k} \times h_{n-k}$, d'où $|A_k| = \binom{n}{k} P_{0,n-k} \times h_{n-k}$

cqs : $P_{k,n} = \frac{P_{0,n-k}}{k!} \times \frac{\overset{[k]}{[n(n-1)\dots(n-k+1)]} \times [(2(n-k)-1) \times \dots \times 3]}{(2n-1)(2n-3)\dots \times 3}$

$\uparrow$
 c'est le
 I_3'

$$= \frac{P_{0,n-k}}{k!} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{(2n-1)\dots(2(n-k+1)-1)}$$

$$= \frac{P_{0,n-k}}{k!} \prod_{j=n-k+1}^n \frac{j}{2j-1} \quad \begin{array}{l} \text{cdV :} \\ j = n+1-i \end{array}$$

d'où :

$$P_{k,n} = \frac{P_{0,n-k}}{k!} \prod_{i=1}^k \frac{n+1-i}{2(n+1-i)-1}$$

IV* $\boxed{P_{0,1} = 0}$ d'après le III 2°)

* $\boxed{P_{0,2} = \frac{2}{3}}$ d'après vu!

* $P_{0,3} + P_{1,3} + P_{2,3} + P_{3,3} = P(|\Omega|) = 1$

$$P_{1,3} = \frac{3 \times 2}{h_3} = \frac{3 \times 2}{5 \times 3} = \frac{2}{5}$$

(7)

$$P_{3,3} = \frac{1}{h_3} = \frac{1}{15} \quad \text{d'où} \quad \boxed{P_{0,3} = \frac{8}{15}}$$

$$2) \sum_{k=0}^n P_{k,n} = P(\Omega) = 1$$

$$\text{donc } P_{0,n} + \sum_{k=1}^n \frac{P_{0,n-k}}{k!} Q_{k,n} = 1, \text{ où } Q_{k,n} = \frac{1}{k!} \frac{(n+1-i)}{(2(n+1-i)-1)}$$

$$A': \boxed{P_{0,n} = 1 - \sum_{k=1}^n \frac{P_{0,n-k}}{k!} Q_{k,n}}$$

$$3) * \forall i \in [1, n] : \frac{n+1-i}{2(n+1-i)-1} \geq \frac{n+1-i}{2(n+1-i)} \geq \frac{1}{2} > 0$$

$$\text{donc } Q_{k,n} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^k > 0$$

$$* \text{ Si } (P_{0,n})_{n \geq 3} \text{ est croissante, } \forall n \geq 3 : P_{0,n} \geq \frac{8}{15}$$

$$\text{d'où } \forall n \geq 3 : P_{0,n} \leq 1 - \sum_{k=1}^{n-3} \frac{8/15}{k!} \left(\frac{1}{2}\right)^k - \frac{2}{3} \frac{1}{(n-2)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \\ - 0 \cdot \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 1 - \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$P_{0,n}$ est croissante

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = 1 - \frac{8}{15} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{(1/2)^h}{h!} = 1 - 0 = 1 - \frac{8}{15} (e^{1/2} - 1) \quad (8)$$

$$= \frac{23}{15} - \frac{8\sqrt{e}}{15}$$

Comme $(P_{q,n})_{n \geq 3}$ est supposée croissante, par

TLN, elle converge vers $l \in \overline{\mathbb{R}}$ et $l \leq \frac{23}{15} - \frac{8\sqrt{e}}{15}$

d':

$$\boxed{\forall n \geq 3 : P_{q,n} \leq \frac{23}{15} - \frac{8\sqrt{e}}{15}}$$

Remarque : $\frac{23}{15} - \frac{8\sqrt{e}}{15} \simeq 0,654 \dots$ et comme $\frac{8}{15} \simeq 0,53$

$$\text{on a } \forall n \geq 3 \quad 0,53 < P_{q,n} < 0,66$$