

COURS et EXERCICES : PROBABILITÉS (Tout sauf fonctions génératrices)

A) ESPACES PROBABILISÉS

Axiomatique de Kolmogorov, Tribu, Système complet d'évènements, Lien entre le vocabulaire ensembliste et le vocabulaire probabiliste, Probabilité, Définition d'une probabilité à partir des singletons dans le cas fini ou dénombrable.

B) PROPRIÉTÉS ÉLÉMENTAIRES DES PROBABILITÉS

Continuité croissante \square , continuité décroissante \square .

Première forme de la formule des probas totales, Inégalité de Boole (sous-additivité) \square .

Évènement presque sûr, propriété est vraie presque sûrement, évènement négligeable, réunion dénombrable d'évènements négligeables, intersection dénombrable d'évènements presque sûrs.

C) PROBABILITÉS CONDITIONNELLES ET INDÉPENDANCE

Proba. conditionnelles, formule des probas composées \square , formules des probas totales \square , formules de Bayes.

Indépendance, indépendance d'une famille d'évènements.

Soit $(A_1, A_2, \dots, A_n) \in \mathcal{A}^n$ ($n \geq 1$), n évènements indépendants, si on note $B_i = A_i$ ou $B_i = \overline{A_i}$, alors (B_1, B_2, \dots, B_n) sont des évènements indépendants \square .

D) VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES

Variable aléatoire discrète (VAD), Loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète.

Notation : Si la VAD X a la même la loi que la VAD Y , alors on note $X \sim Y$. On dit aussi que X et Y sont équidistribuées, Fonction de répartition (HPTS) : positivité, croissance et limite en $\pm\infty$.

E) COUPLES DE VAD, VAD INDÉPENDANTES

Généralités, couple de variables aléatoires discrètes, Loi conjointe, Lois marginales,

$$\forall i \in I, \mathbf{P}(X = x_i) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{j \in J} [(X = x_i) \cap (Y = y_j)]\right) = \sum_{j \in J} p_{i,j}$$

$$\text{et } \forall j \in J, \mathbf{P}(Y = y_j) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{i \in I} [(X = x_i) \cap (Y = y_j)]\right) = \sum_{i \in I} p_{i,j}.$$

Loi conditionnelle, Extension aux n -uplets, vecteurs aléatoires discrets, Couple de variables aléatoires indépendantes

Soient X et Y deux VAD indépendantes, alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont des VAD indépendantes \square .

Famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes

Lemme des coalitions : Soient X_1, \dots, X_n , n variables aléatoires discrètes mutuellement indépendantes, alors $f(X_1, \dots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \dots, X_n)$ sont des VAD indépendantes \square ; généralisation à $p \geq 3$ coalitions.

F) LOIS USUELLES

Probabilité uniforme sur un ensemble fini, Loi de Bernoulli, Loi binomiale.

Soient X_1, \dots, X_n , n VAD indépendantes qui suivent toutes la même loi de Bernoulli de paramètre p , alors $S = X_1 + \dots + X_n$ suit une loi binomiale de paramètres n et p \square .

Loi hypergéométrique (HPTS)

Loi géométrique (ou loi de Pascal)

HPTS : Loi sans mémoire ($P((X > n+k)/(X > n)) = P(X > k)$).

Loi de Poisson

Approximation de la loi binomiale par une loi de Poisson \square .

G) ESPÉRANCE

Espérance dans $\overline{\mathbb{R}}^+$ d'une variable aléatoire positive Espérance finie d'une variable aléatoire réelle. Variable centrée.

Espérance des lois usuelles Espérance d'une fonction indicatrice - Espérance d'une fonction constante - Linéarité \square - Positivité et croissance - Soit Y , une VADR admettant une espérance finie et soit X , une VADR telle que $|X| \leq Y$, alors X admet une espérance finie et $|E(X)| \leq E(Y)$.

Formule de transfert \square - Inégalité de Markov \square - Espérance d'un produit de VAD indépendantes.

$$\text{Formule de l'antirépartition : } E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X \geq n) \square.$$

H) VARIANCE , ÉCART-TYPE ET COVARIANCE

Moments - Moments d'ordre 2 - Cauchy-Schwarz - variance, écart-type - variable réduite - Propriétés

Formule de König-Huygens - $V(aX + b) = a^2 V(X)$ - Variance et écart-type des lois usuelles. Covariance de deux VADR-

Formule de König-Huygens - Cas de 2 VADR indépendantes - $Cov(aX + b, cY + d) = ac Cov(X, Y)$ - Variance d'une somme de VADR - Variance d'une somme de VADR indépendantes.

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev \square

Théorème : Loi faible des grands nombres \square

Prévisions : Algèbre linéaire : EV - Matrices - Déterminants....