

Exercices : PROBAS - PROBAS - PROBAS - PROBAS!!!!

Cours (les 4 piliers de la réduction) :

ESPACES VECTORIELS - MATRICES - DÉTERMINANTS - (POLYNÔMES : fait en début d'année)

Espaces vectoriels

EV - SEV - $\mathbb{K}$ -algèbre. Notion de combinaisons linéaires d'une famille finieApplication linéaire - $\mathcal{L}(E, E')$ est un $\mathbb{K}$ -ev avec $+$ et $\cdot$ et $\mathcal{L}(E)$ est une $\mathbb{K}$ -algèbre avec $+$ et $\circ$ et $\cdot$

Application bi-linéaire

Groupe linéaire : f est bijective SSI f est inversible dans l'anneau $\mathcal{L}(E)$

SEV - SEV engendré - Somme de 2 SEV - Somme directe - supplémentaire

Noyau Image structure (Sous-espace affine) de l'ensemble des x tels que $f(x) = b$.Projecteurs - symétrie Caractérisation $\square$: Si $f \in \mathcal{L}(E)$ alors f est un projecteur SSI $f \circ f = f$.Famille de projecteurs associée à une décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^p E_i$

Familles libres/génératrices/bases.

Cas des familles libres de fonctions (exemple : $(f_a)_{a \in \mathbb{R}}$ est libre avec $f_a(x) = |x - a|$)

Famille et application linéaire : critère d'isomorphisme

Théorème fondamental : Définition d'une application linéaire à partir d'une base

Espace de dimension finie, de dimension infinie.

 $\square$ Théorème de la base incomplète- dimension - caractérisation des bases.

Théorème (démonstration non faite) : Toutes les bases ont même cardinal.

Tout sur le calcul du rang d'une famille de vecteurs : pivot de Gauss.

Dimensions des SEV - Dimension de $F \oplus G$ Dimensions (et base adaptée) des Sommes directes de p SEV $\square$ Théorème des 4 dimensions : $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim F \cap G$.Dimension (et base) d'un produits finis de $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie.Théorème fondamental : Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est un base de E et si $(v_1, \dots, v_n) \in (E')^n$ alors il existe une unique application linéaire f tel que pour tout i $f(e_i) = v_i$. $\square$ Théorème du rang. Conséquences

MATRICES

Matrice d'une application linéaire - d'un endomorphisme

Formules de changement de base : $X = PX'$, $A = PDP^{-1}$ et $A = QDP^{-1}$

Matrice inversible. Les étudiants doivent savoir calculer l'inverse d'une matrice par la méthode du pivot.

Matrices équivalentes et leurs caractérisation avec la matrice J_r . Matrices semblables $\square$ Trace d'une matrice, d'un endomorphisme Trace d'un projecteur : $\text{rg}(p)$

Opérations élémentaires (sur les lignes et les colonnes)

GROUPE SYMÉTRIQUE ET DÉTERMINANTS

Définition du groupe symétrique,

 $\square$ Théorème de décomposition en produit de cycles, de transposition.

Signature et groupe alterné.

Définition de forme n -linéaire alternée.**Théorème fondamental de structure des forme n -linéaire alternée en dimension n .**

Définition du déterminant d'une famille de vecteurs dans une base, du déterminant d'une matrice et du déterminant d'un endomorphisme.

 $\square$ Formule de changement de base. $\square$ **Théorème fondamental de la liberté.**Propriétés telle que $\det f \circ g = \det f \det g \dots$

Calcul pratique fondé sur la méthode du pivot de Gauss (on fait apparaître des 0 et du développement selon une ligne ou une colonne).

Applications : $\square$ Formules de Cramer pour un système de n équations à n inconnues.

Mineur - cofacteur - comatrice - formule fondamentale :

 $\square$ $A \cdot \text{com}(A)^T = \text{com}(A)^T \cdot A = (\det A)I_n$ - expression de l'inverse d'une matrice

• Déterminants de Van der Monde (résultats et démonstration à connaître)

Équation cartésiennes de sous-espace affine.

Caractérisation du rang avec les matrices extraites carrées (démonstration non faite).

Matrices par blocs - Déterminants par blocs.

matrice de transvections par bloc (multiplication à gauche ou à droite par une matrice transvections par bloc de la forme :

$\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ T & I_q \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} I_p & T \\ 0 & I_q \end{pmatrix}$) pour faire apparaître des blocs de 0.

Prévisions : Réductions des endomorphismes et des matrices.