

ex 1

1) * Comme $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$, si on pose $Z = |X - Y|$,
 $Z(\Omega) = \mathbb{N}$

$$* (|X - Y| = n) = (X - Y = n) \cup (X - Y = -n)$$

↑ disjointes si $n \geq 1$

1^{er} cas $n = 0$: $P(|X - Y| = 0) = P(X = Y)$

$$= \sum_{h=1}^{\infty} P(X=h, Y=h)$$

$$= \sum_{h=1}^{\infty} P(X=h)P(Y=h) \quad \text{par indépendance}$$

eq : $P(|X - Y| = 0) = \sum_{h=1}^{\infty} (q^{h-1} p)^2$ avec $q = 1 - p$

$$= p^2 \frac{1}{1 - q^2} \quad \text{car } q^2 \in]0, 1[$$

$$= \frac{p^2}{(1-q)(1+q)} = \frac{p}{1+q} = \frac{p}{2-p}$$

2^{er} cas : $n \geq 1$, $P(|X - Y| = n) = P(X - Y = n) + P(X - Y = -n)$
 $= 2P(X - Y = n)$ car $X \sim Y$

eq $P(|X - Y| = n) = 2 \sum_{h=1}^{\infty} P(X = n+h, Y = h)$

$$= 2 \sum_{h=1}^{\infty} q^{n+h-1} p \cdot q^{h-1} p = 2 p^2 q^n \frac{1}{1 - q^2}$$

d^0

$$\begin{cases} P(|X-Y|=0) = \frac{p}{2-p} \\ P(|X-Y|=n) = \frac{2p}{2-p} q^n \text{ si } n \geq 1 \end{cases}$$

(2)

2) On remarque que $\forall n \geq 1 : P(|X-Y|=n) = \frac{2p}{2-p} \underbrace{p \cdot q^{n-1}}_{\text{loi g\u00e9n.}}$

$$\begin{aligned} \text{Donc } E(|X-Y|) &= \sum_{n=1}^{\infty} n P(|X-Y|=n) \\ &= \frac{2p}{2-p} \sum_{n=1}^{\infty} n p q^{n-1} = \frac{2p}{2-p} E(X) \text{ car } X \sim \mathcal{G}(p) \end{aligned}$$

$$d^0_1 : \boxed{E(|X-Y|) = \frac{2p}{2-p} \frac{1}{p}}$$

De m\u00eame $E(|X-Y|^2) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 P(|X-Y|=n)$ avec la F. de transfert

$$= \frac{2p}{2-p} E(X^2)$$

$$= \frac{2p}{2-p} (V(X) + E(X)^2)$$

$$= \frac{2p}{2-p} \left(\frac{q}{p^2} + \frac{1}{p^2} \right) = \frac{2p}{p^2}$$

avec K.H. : $d^0_2 : \boxed{V(|X-Y|^2) = \frac{2p}{p^2} - \left(\frac{2p}{(2-p)p} \right)^2} = \frac{2p(2+p^2)}{(2-p)^2 p^2}$

$$3) \text{ On a } \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \begin{cases} \max(x, y) = \frac{x+y+|x-y|}{2} \\ \min(x, y) = \frac{x+y-|x-y|}{2} \end{cases} \quad (3)$$

Par linéarité, on a donc :

$$\begin{aligned} E(\max(X, Y)) &= \frac{1}{2} (E(X) + E(Y) + E(|X-Y|)) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p} + \frac{2q}{p(2-p)} \right) \end{aligned}$$

$$d'_1 : \boxed{E(\max(X, Y)) = \frac{3-2p}{p(2-p)}}$$

$$\text{De même, } d'_2 : \boxed{E(\min(X, Y)) = \frac{1}{p(2-p)}}$$

rem. on peut vérifier avec la formule $\max(x, y) + \min(x, y) = x + y$

exercice 2

22

1°) Par symétrie de la formule $X \sim Y$

2°) $S(\Omega) = \{i+j, (i,j) \in \mathbb{N}^2\} = \mathbb{N}$

$$* \forall n \in \mathbb{N} \quad (S=n) = \bigsqcup_{i=0}^n (X=i, Y=n-i)$$

$$\text{donc } \mathbb{P}(S=n) = \sum_{i=0}^n \frac{\alpha}{(1+n)!} = \frac{\alpha}{n!}$$

Comme X et Y sont des V.A.D., S aussi et

$$\text{donc } \sum_{n \in S(\Omega)} \mathbb{P}(S=n) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

$$\text{cgs } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha}{n!} = \alpha e = 1 \quad \text{d'où } \boxed{\alpha = \frac{1}{e}}$$

3°) Par $\text{cgs } (Y=j)_{j \in \mathbb{N}}$ et F.P.T.

$$\mathbb{P}(X=0) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1/e}{(1+0+j)!} = \frac{1}{e} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = \frac{1}{e}(e-1)$$

$$\text{d'où } \boxed{\mathbb{P}(X=0) = 1 - \frac{1}{e}}$$

Comme $X \sim Y$, $\mathbb{P}(Y=0) = 1 - \frac{1}{e}$, si X et Y étaient

indépendantes, on aurait $\mathbb{P}(X=0, Y=0) = \mathbb{P}(X=0)\mathbb{P}(Y=0)$

donc $\frac{1}{e} = \left(1 - \frac{1}{e}\right)^2 = 1 - \frac{2}{e} + \frac{1}{e^2}$

②₂₂

$\Rightarrow e^2 - e + 1 = 0 \Rightarrow e = -j$ ou $e = -j^2 \notin \mathbb{R}$
 $\notin \mathbb{R} \ (\Delta < 0)$ absurde

4' X et Y non indépendantes

4) $P(S=n) = \frac{e^{-1}}{n!} = e^{-1} \frac{1^n}{n!}$ donc $S \sim \mathcal{B}(1)$

Grâce au cours $E(S) = 1$

Comme $S = X + Y$ et $X \sim Y$, $E(X) = E(Y)$ et par

linéarité de l'espérance : $E(X) = \frac{1}{2}$

Comme X et Y ne sont pas indépendantes, $V(X+Y) \neq V(X) + V(Y)$

5) $E(XY) = \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} ij P(X=i, Y=j)$ (formule de transfert)

$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i+j=k} ij \frac{e^{-1}}{(1+k)!}$ S.P.P.

$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^k i(k-i) \frac{e^{-1}}{(1+k)!}$

$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-1}}{(1+k)!} \left[k \frac{k(k+1)}{2} - \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \right]$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\alpha}{(k+1)!} k(k+1) \left(\frac{k}{2} - \frac{2k+1}{6} \right)$$

③
22

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\alpha}{(k+1)!} k(k+1) \left(\frac{1}{6}k - \frac{1}{6} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\alpha}{(k-1)!} \frac{1}{6} (k-1)$$

$$= \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\alpha}{6(k-2)!} = \frac{\alpha}{6} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1/e}{6} \times e = \frac{1}{6}$$

Donc $E(XY) = \frac{1}{6}$ et avec k.H. $\text{cov}(X, Y) = \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$

$$\text{d'o } \boxed{\text{cov}(X, Y) = -\frac{1}{12}}$$

Comme $\underbrace{V(X+Y)}_{=V(S)=1} = \underbrace{V(X)}_{=1} + \underbrace{V(Y)}_{=1} + 2\text{cov}(X, Y)$

$$\text{d'o } \boxed{V(X) = V(Y) = \frac{7}{12}}$$

6) $P(X=Y) = \sum_{i=0}^{+\infty} P(X=i, Y=i)$ car $\{X=Y\} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{X=i\} \cap \{Y=i\}$

$$= \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\alpha}{(1+2i)!}$$

Comme $e^1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ et $e^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$, $\frac{e - e^{-1}}{2} = \sinh 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}$

$$d': \boxed{P(X=Y) = \frac{e - e^{-1}}{2e} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2e^2}}$$

④
22

Enfin $(X=Y) \cup (X>Y) \cup (X<Y) = \Omega$

et que $(X>Y) = (Y>X)$ car $X \sim Y$,

$$P(X>Y) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2e^2} \right),$$

$$d'' \quad \boxed{P(X>Y) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4e^2}}$$

exercice 3

①

$$1) \forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{\frac{1}{2}(\alpha) n^\alpha} \geq 0 \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{1}{2}(\alpha) n^\alpha} = 1$$

d on a bien une loi de V.A.D.

$$2) B = (X=2) \cup (X=4) \cup (X=6) \dots$$

$$= \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} (X=2k)$$

$$P(B) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\frac{1}{2}(\alpha) (2k)^\alpha} = \frac{1}{\frac{1}{2}(\alpha) 2^\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$$

$$\text{d } \boxed{P(B) = \frac{1}{2^\alpha}}$$

q's si $C = (X \text{ est impair})$, $C = \bar{B}$ et donc

$$P(C) = 1 - \frac{1}{2^\alpha}, \text{ Comme } \alpha > 1, \frac{1}{2^\alpha} < \frac{1}{2} < 1 - \frac{1}{2^\alpha}$$

$$\text{d' } \boxed{X \text{ a plus de chance d'être impair.}}$$

(2)

3) $\forall (i_1, \dots, i_k) \in (\mathbb{N}^*)^k$ avec $i_1 < i_2 < \dots < i_k$

$$\text{on a } P\left(\bigcap_{j=1}^k A_{p_{i_j}}\right) = \prod_{j=1}^k P(A_{p_{i_j}})$$

* $\forall w \in \bigcap_{j=1}^k A_{p_{i_j}}, \forall j \in [1, k] \quad p_{i_j} \text{ divise } X(w)$

comme $j \neq j' \Rightarrow p_{i_j} \neq p_{i_{j'}} \Rightarrow p_{i_j} \wedge p_{i_{j'}} = 1$ (ce sont des nb $\perp$)

on donc $p_{i_1} \times \dots \times p_{i_k}$ divise $X(w)$ (cqs du lemme de Gauss)

d'où $w \in A_{p_{i_1} \times \dots \times p_{i_k}}$

* Réciproquement si $w \in A_{p_{i_1} \times \dots \times p_{i_k}},$

$\forall j \in [1, k] \quad p_{i_j} \mid p_{i_1} \times \dots \times p_{i_k} \mid X(w)$ donc $w \in A_{p_{i_j}}$
 $\quad \quad \quad \uparrow$
 $\quad \quad \text{divise}$

suite $\rightarrow$

$$c9b \quad \bigcap_{j=1}^k A_{p_{i_j}} = A_{p_{i_1} \times \dots \times p_{i_k}} \quad (3)$$

Ensuite $A_n = \{ \omega \in \Omega \mid \exists k \in \mathbb{N}^* : X(\omega) = kn \}$

$$= \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}^*} (X = kn)$$

d'où $P(A_n) = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{\{(\alpha)(kn)\}^\alpha} = \frac{1}{\{\alpha\}n^\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$

et $\boxed{P(A_n) = \frac{1}{n^\alpha}}$

On a donc

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{j=1}^k A_{p_{i_j}}\right) &= P(A_{p_{i_1} \times \dots \times p_{i_k}}) \\ &= \frac{1}{(p_{i_1} \dots p_{i_k})^\alpha} = \prod_{j=1}^k \frac{1}{p_{i_j}^\alpha} \\ &= \prod_{j=1}^k P(A_{p_{i_j}}) \end{aligned}$$

d $\boxed{(A_{p_1}, A_{p_2}, A_{p_3}, \dots, A_{p_n}, \dots) \text{ indépendants}}$

L'idee $\prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^\alpha}\right) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \mathbb{P}(\bar{A}_p)$ (4)

$$= \mathbb{P}\left(\bigcap_{p \in \mathcal{P}} \bar{A}_p\right) \text{ (indép.)}$$

$$= \mathbb{P}\left(\overline{\bigcup_{p \in \mathcal{P}} A_p}\right) = \mathbb{P}(X=1) = \frac{1}{\zeta(\alpha)}$$

Précisions: comme $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_n, \dots\}$

Posons $u_n = \mathbb{P}(\bar{A}_2) \times \mathbb{P}(\bar{A}_3) \times \mathbb{P}(\bar{A}_5) \times \dots \times \mathbb{P}(\bar{A}_{p_n})$

$$= \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(\bar{A}_{p_i})$$

$$= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n \bar{A}_{p_i}\right)$$

car $A_{p_1}, \dots, A_{p_n}$ indép.
 $\Rightarrow \bar{A}_{p_1}, \dots, \bar{A}_{p_n}$ aussi

Posons $C_n = \bigcap_{i=1}^n \bar{A}_{p_i}$, on a $C_{n+1} = C_n \cap \bar{A}_{p_{n+1}}$
 $C \subset C_n$

D'où par continuité décroissante:

$$u_n = \mathbb{P}(C_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(C) \text{ avec } C = \bigcap_{i \in \mathbb{N}^*} \bar{A}_{p_i} \text{ et}$$

$$C = \overline{\bigcup_{i \in \mathbb{N}^*} A_{p_i}} \quad \text{Montrons que } \underline{C = (X=1)}.$$

⑤ $\forall w \in C$, si $X(w) \geq 2$ alors $\exists p \in \mathcal{P} \setminus$

$p \mid X(w) \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ et donc $w \in A_p \subset \bigcup_{p \in \mathcal{P}} A_p$
absurde et donc $X(w) = 1$, cqs $w \in (X=1)$

recip. si $w \in (X=1)$, $\forall i \in \mathbb{N}$ $p_i \nmid X(w) = 1$

donc $w \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \overline{A_{p_i}} = C$ où $C = (X=1)$

Comme $u_n = \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{1}{p_i^\alpha}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P(C) = P(X=1) = \frac{1}{\zeta(\alpha)}$

$$\text{d'où } \boxed{\prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^\alpha}\right) = \frac{1}{\zeta(\alpha)}}$$

4') Posons $\mathcal{D} = (\text{aucun carré ne divise } X)$
 $= \bigcap_{n \geq 2} \overline{A_n}$ $\hat{=} \neq 1$

Montrons que $\mathcal{D} = \bigcap_{p \in \mathcal{P}} \overline{A_{p^2}}$

Comme $\mathcal{P} \subset \mathbb{N}^* - \{1\}$: $\mathcal{D} \subset \bigcap_{p \in \mathcal{P}} \overline{A_{p^2}}$

recip. $\forall w \in \bigcap_{p \in \mathcal{P}} \overline{A_{p^2}}$

si $w \notin \mathcal{D}$, $\exists n \geq 2$ | $w \notin \bar{A}_{n^2}$ soit $w \in A_{n^2}$ ⑥

or $\exists p \in \mathcal{P}$ | $p | n$ donc $p^2 | n^2$ et $A_{n^2} \subset A_{p^2}$

d'où $w \in A_{p^2}$ absurde in $w \in \bar{A}_{p^2}$

$$\text{cqs } \mathcal{D} = \bigcap_{p \in \mathcal{P}} \bar{A}_{p^2}$$

$$\text{d'où } \boxed{P(\mathcal{D}) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^{2\alpha}}\right) = \frac{1}{\zeta(2\alpha)}}$$

exercice 4

①

1.)

P	F	F	P	...	P	P	...
---	---	---	---	-----	---	---	-----

Si la suite infinie commence par 'F' alors soit il n'y a que des 'F' ou bien il finira par arriver un 'P' et on aura 'FP' avant 'PP', donc le 1^{er} lancer est 'P', pour le 2^{ème} lancer c'est idem.

$$\text{cq: } P('PP' \text{ avant } 'FP') = P(1^{\text{er}} \text{ lancer} = 'P' \cap 2^{\text{ème}} = 'P')$$

par indépendance des lancers, on a donc: d':

$$d' : \boxed{P('PP' \text{ avant } 'FP') = p^2}$$

2.)

				...			
1	2	3			n-1	n	

Notons B_n : "la séquence PF apparaît en $n-1$ et n et pas en FP "

L'év^t B_n n'est possible que s'il y a eu avant la séquence PF que des piles, c'est comme au 1):

$$P(B_n) = \pi_n = P(P_1 \cap P_2 \cap \dots \cap P_{n-2} \cap P_{n-1} \cap F_n)$$

$$d' : \boxed{\pi_n = p^{n-1} q}$$

où P_i : "P" au lancer i
 F_i : "F"

Notons B : "la 1^{ère} séquence PF apparaît avant la 1^{ère} seq. FP" ②

on a d'ailleurs $B = \bigcup_{n \geq 2} B_n$ (double inclusion)
 $\uparrow$ réunion $\perp$

q.s $\mathbb{P}(B) = \sum_{n=2}^{\infty} p^{n-1} q = p q \frac{1}{1-p}$

d: $\boxed{\mathbb{P}(B) = p}$

3) a)

...	P	P	...	P	F
-----	---	---	-----	---	---

 $\leftarrow$ que des 'F' $\leftarrow$ que des 'P'

Notons comme au 2), $y_n = \mathbb{P}(\text{'PP' apparaît par la } n^{\text{ème}} \text{ fois avant la fin de } n \text{ et il n'y a pas eu 'PF'})$.

$y_n = \mathbb{P}(F_1 \cap \dots \cap F_{n-2} \cap P_{n-1} \cap P_n) = \underline{q^{n-2} p^2}$

q.s si l'on ne le demande, $\mathbb{P}(C) = \sum_{n=2}^{\infty} q^{n-2} p^2$

d' $\boxed{\mathbb{P}(C) = p}$

2) Idem $z_n = \mathbb{P}(F_1 \cap \dots \cap F_{n-2} \cap P_{n-1} \cap F_n) = q^{n-2} p q$

et si on ne le demande, d' $\boxed{\mathbb{P}(D) = q}$

3) idem $t_n = \mathbb{P}(P_1 \cap \dots \cap P_{n-2} \cap P_{n-1} \cap F_n \cup F_1 \cap P_2 \cap \dots \cap P_{n-2} \cap P_{n-1} \cap F_n)$
 $= \underbrace{p^{n-2} p q}_{n \geq 2} + q \underbrace{p^{n-3} p q}_{n \geq 3}$

$$d^o \quad \boxed{P(E) = \sum_{n=2}^{\infty} p^{n-1} q + \sum_{n=3}^{\infty} p^{n-2} q^2 = p + pq}$$

③

$[P|F|P|F|P|P| \dots |F|F| \dots]$

4) Notons A : "la 1^{ère} séquence PP apparaît avant FF"
 Si on a l'év^t A, c'est qu'il n'y a eu que des PFPF...
 ou FPF... avant la 1^{re} PP.

Notons P_i : "pile au i^{ème} lancer"

F_i : "face _____"

$$A = \left[\bigcup_{n \in \mathbb{N}} P_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap F_4 \cap \dots \cap F_{2n} \cap P_{2n+1} \cap P_{2n+2} \right]$$

$$\cup \left[\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap \dots \cap F_{2n-1} \cap P_{2n} \cap P_{2n+1} \right]$$

$$d^o \quad p(A) = \sum_{n=0}^{\infty} p^{n+2} q^n + \sum_{n=1}^{\infty} p^{n+1} q^n$$

$$= p^2 \frac{1}{1-pq} + p^2 q \frac{1}{1-pq} = \frac{p^2(1+q)}{1-pq}$$

$$d^o \quad \boxed{P(A) = \frac{p^2(1+q)}{1-pq}}$$

$$1a) * \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} = |1+1|^k = 2^k$$

$$* \sum_{j=0}^{2N+1} \binom{2N+1}{j} = \sum_{j=0}^N \binom{2N+1}{j} + \sum_{j=N+1}^{2N+1} \binom{2N+1}{j} = 2^{2N+1}$$

$$On \quad \sum_{j=0}^N \binom{2N+1}{j} = \sum_{j=0}^N \binom{2N+1}{2N+1-j} = \sum_{k=N+1}^{2N+1} \binom{2N+1}{k}$$

Càd V: $k = 2N+1-j$

$$d' : \boxed{\sum_{j=N+1}^{2N+1} \binom{2N+1}{j} = 2^{2N} = 4^N}$$

$$b) \sum_{j=0}^n \binom{n-1+j}{n-1} = \sum_{j=0}^n \binom{n+j}{n} - \binom{n-1+j}{n}$$

avec Pascal $\binom{j}{i} = \binom{j-1}{i-1} + \binom{j-1}{i}$

$$= \binom{n+n}{n} - \underbrace{\binom{n-1}{n}}_{=0} \quad (\text{somme télescopique})$$

$$d' : \boxed{\sum_{j=0}^n \binom{n-1+j}{n-1} = \binom{n+n}{n}}$$

rem. : on pourrait aussi faire une récurrence sur n .

2') a) le cardinal vaut : $\binom{n}{p}$

(2)

On cherche le nb de suites $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}$ telle que :

$$1 \leq q_1 < q_2 < \dots < q_n < q_{n+1} = k+1 < q_{n+2} < \dots < q_p \leq n$$

donc $1 \leq q_1 < q_2 < \dots < q_n \leq k$ et $k+2 \leq q_{n+2} < \dots < q_p \leq n$

→ le nb de suites $\mathcal{S} \subset \mathcal{P} : 1 \leq q_1 < q_2 < \dots < q_n \leq k$ est $\binom{k}{n}$

→ $k+2 \leq q_{n+2} < \dots < q_p \leq n$

$$\Leftrightarrow 1 \leq \underbrace{q_{n+2} - (k+1)}_{\substack{1+n+1 \\ 1^n}} < \dots < \underbrace{q_p - (k+1)}_{\substack{p \\ p-n-1 + n+1 \\ (p-n-1)\text{-ième}}} \leq n - (k+1)$$

on doit donc dénombrer les suites $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}$:

$$1 \leq q'_1 < \dots < q'_{p-n-1} \leq n - (k+1)$$

$$\text{il y a } \binom{n-(k+1)}{p-n-1}$$

Le nombre recherché est donc $\boxed{\binom{k}{n} \times \binom{n-k-1}{p-n-1}}$

On a $E = \bigcup_{k=0}^{n-1} E_k$ (réunion disjointe)

(3)

donc $|E| = \binom{n}{p} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{k}{n} \binom{n-k-1}{p-n-1}$

On $\binom{j}{i} = 0$ si et seulement si $i > j$

donc $\binom{k}{n} = 0$ ————— $n > k$

$\binom{n-k-1}{p-n-1} = 0$ ————— $p-n-1 > n-k-1$
 $\Leftrightarrow k > n-p+1$

d' :
$$\binom{n}{p} = \sum_{k=n}^{n-p+1} \binom{k}{n} \binom{n-k-1}{p-n-1}$$

b) $S_N = \sum_{k=0}^N \binom{2N-k}{N} 2^k$

$= \sum_{k=0}^N \binom{2N-k}{N} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j}$ avec la 1) a)

$= \sum_{j=0}^N \sum_{k=j}^N \binom{k}{j} \binom{2N-k}{N}$ échange de $\sum$ avec
 $0 \leq j \leq k \leq N$

$= \sum_{n=0}^N \sum_{k=n}^N \binom{k}{n} \binom{2N-k}{N}$ on a juste posé
 $j=n$
 ça ressemble au 2) a)

on cherche n et p (à $2^0 a$) tel que : $\begin{cases} 2N = n-1 \\ N = p-n-1 \end{cases}$ ④

donc $n = 2N+1$ et $p = N+n+1$ donc $n-p+n = N$

d'où $S_N = \sum_{n=0}^N \sum_{k=n}^{n-p+n} \binom{k}{n} \binom{n-k-1}{p-n-1}$ $\downarrow$ car $j = N+n+1$

$$= \sum_{n=0}^N \binom{n}{p} = \sum_{n=0}^N \binom{2N+1}{N+n+1} = \sum_{j=N+1}^{2N+1} \binom{2N+1}{j} = 2^{2N}$$

$\uparrow$
car $(1+x)^a$

d' :
$$S_N = \sum_{k=0}^N \binom{2N-k}{N} 2^k = 2^{2N}$$

e) $N=1$ $\sum_{k=0}^1 \binom{2-k}{1} 2^k = \binom{2}{1} + \binom{1}{1} 2^1 = 4 = 2^{2 \times 1}$

donc $\frac{1}{1}$ vraie

$S_{N+1} = \sum_{k=0}^{N+1} \binom{2N+2-k}{N+1} 2^k$ ← Pascal

$$= \sum_{k=0}^{N+1} \left[\binom{2N+1-k}{N} + \binom{2N+1-k}{N+1} \right] 2^k$$

$$= \sum_{k=0}^{N+1} \binom{2N-(k-1)}{N} 2^k + \sum_{k=0}^{N+1} \binom{2N+2-(k+1)}{N+1} 2^k$$

$\uparrow \approx S_N$ $\uparrow \approx S_{N+1}$

$$\text{ind} \quad S_{N+1} = \sum_{p=-1}^N \binom{2N-p}{N} 2^{p+1} + \sum_{p=1}^{N+2} \binom{2N+2-p}{N+1} 2^{p-1} \quad (5)$$

cdV: $k-1=p$ cdV: $k+1=p$ $p=0$

$$= \binom{2N+1}{N} 2^0 + 2 \sum_{p=0}^N \binom{2N-p}{N} 2^p + \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{N+1} \binom{2N+2-p}{N+1} 2^p - \frac{1}{2} \binom{2N+2}{N+1} + \frac{1}{2} \binom{N}{N+1} 2^{N+2}$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$

$\text{cdV: } H_N$ $=0$ (ca $N+1 > N$)

$$\text{cdV} \quad S_{N+1} = \binom{2N+1}{N} + 2 \cdot 2^{2N} + \frac{1}{2} S_{N+1} - \frac{1}{2} \binom{2N+2}{N+1}$$

$$\text{cdV} \quad \frac{1}{2} S_{N+1} = 2^{2N+1} + \binom{2N+1}{N} - \frac{1}{2} \binom{2N+2}{N+1}$$

$$\text{cdV} \quad S_{N+1} = 2^{2(N+2)} + 2 \binom{2N+1}{N} - \binom{2N+2}{N+1}$$

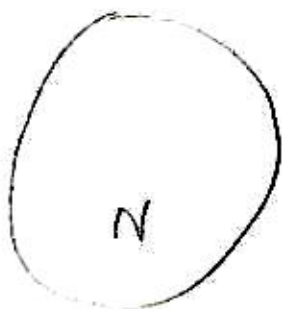
$$\text{ca} \quad \binom{2N+2}{N+1} = \frac{2N+2}{N+1} \binom{2N+1}{N} \quad \left(\binom{n}{p} = \frac{n}{p} \binom{n-1}{p-1} \right)$$

$$= 2 \binom{2N+1}{N} \quad \text{cas} \quad S_{N+1} = 2^{2(N+1)}$$

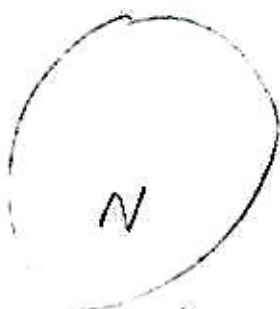
$$\text{d'}: \quad \forall N \geq 1; \quad \sum_{k=0}^N \binom{2N-k}{N} 2^k = 2^{2N}$$

3° a)

⑥



poche 1



poche 2

* $X_N(\Omega) = [0, N]$ or pour tout $k \in [0, N]$, il en

existe toujours des k poches 1 jusqu'à ce qu'il n'en
reste plus que k et qu'ensuite on vide la poche 2
alors on a " $X_N = k$ ".

* $(X_N = N)$ signifie que l'on a toujours pioché dans la
même poche (par exemple la $n^{\circ} 1$) jusqu'à épuisement
^{+ 1 tirage}

$$P(X_N = N) = \prod_{k=1}^{N+1} P(\text{piocher ds la poche 1}) = \frac{1}{2^N}$$

donc $P(X_N = N) = \frac{1}{2^N}$

* $(X_N = k)$ signifie que l'on a tiré $N-k$ boules de
la poche $n^{\circ} 1$, N boules de la poche $n^{\circ} 2$ et que
l'on pioche encore une dernière fois dans la poche $n^{\circ} 2$
○ ou le contraire $N-k$ dans la poche $n^{\circ} 2$...

On voit donc choisir N fois la $n^{\text{e}}(2)$ parmi les (7)

$2N-k$ choix possibles. Comme la proba. de choisir 1 ou 2 est $\frac{1}{2}$, on obtient :

$$P(X_N = k) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{choix} \\ \text{poche (ex: 1)}}}{2} \times \binom{2N-k}{N} \times \underset{\substack{\uparrow \\ \text{poche (2)}}}{\frac{1}{2^N}} \times \underset{\substack{\uparrow \\ \text{poche (1)}}}{\frac{1}{2^{2N-k}}} \times \frac{1}{2}$$

← on a fini la (2)
et on s'aperçoit
qu'elle est vide

$$\text{d': } \boxed{P(X_N = k) = \binom{2N-k}{N} \times 2^{k-2N}}$$

on vérifie: $\sum_{k=0}^N P(X_N = k) = 1$ avec la 2^e b)

$$\text{d': } \boxed{\text{on a bien une loi de probabilité}}$$

$$b) (2N+1) P(X_N = k+1) - (k+1) P(X_N = k+1)$$

$$= (2N-k) P(X_N = k+1)$$

$$= (2N-k) \binom{2N-k-1}{N} 2^{k+1-2N}$$

$$\text{on } \binom{2N-k-1}{N} = \binom{2N-k-1}{N-k-1} = \frac{N-k}{2N-k} \frac{2N-k}{N-k} \binom{2N-k-1}{N-k-1}$$

formule
des compléments

$$= \frac{N-k}{2N-k} \binom{2N-k}{N-k}$$

$$= \frac{N-k}{2N-k} \binom{2N-k}{N}$$

on en déduit que :

(8)

$$\begin{aligned} \frac{(2N+1)P(X_N = k+1) - (k+1)P(X_N = k+1)}{2N-k} &= \frac{N-k}{2N-k} \binom{2N-k}{N} 2^{-2N} \\ &= \frac{2(N-k)P(X_N = k)}{2N-k} \end{aligned}$$

c) Sommons cette relation de $k=0$ à $k=N-1$:

$$\begin{aligned} 2N \sum_{k=0}^{N-1} P(X_N = k) - 2 \sum_{k=0}^{N-1} k P(X_N = k) &= (2N+1) \sum_{k=0}^{N-1} P(X_N = k+1) \\ &\quad - \sum_{k=0}^{N-1} (k+1) P(X_N = k+1) \\ &\quad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{1 - P(X_N = N)} \quad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{E(X_N) - NP(X_N = N)} \quad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{= E(X_N) - 0 \cdot P(X_N = 0)} \end{aligned}$$

donc

$$2N(1 - P(X_N = N)) - 2E(X_N) + 2NP(X_N = N) = (2N+1)(1 - P(X_N = 0)) - E(X_N)$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow E(X_N) &= 2N - (2N+1)(1 - P(X_N = 0)) \\ &= (2N+1)P(X_N = 0) - 1 \end{aligned}$$

$$\text{d'où : } \boxed{E(X_N) = (2N+1)P(X_N = 0) - 1}$$

$$\text{on a donc } E(X_N) = (2N+1) \binom{2N}{N} 2^{-2N} - 1$$

$$\text{on } \binom{2N}{N} = \frac{(2N)!}{(N!)^2} \sim \left(\frac{2N}{e}\right)^{2N} \times \sqrt{4\pi N} \times \left(\frac{e}{N}\right)^{2N} \times \frac{1}{2\pi N} \quad (9)$$

par Stirling

$$\sim 2^{2N} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{N}}$$

$$\text{donc } (2N+1) \binom{2N}{N} 2^{-2N} \sim 2N 2^{2N} \frac{1}{\sqrt{\pi N}} \sim 2\sqrt{\frac{N}{\pi}}$$

et comme $-1 = o(\sqrt{N})$ on conclut :

$$\text{d'où : } \boxed{E(X_n) \sim 2\sqrt{\frac{N}{\pi}}}$$

d) on a $Y_N(\Omega) = [1, N]$ (il doit y avoir un bonbon dans l'une des boîtes)

$(Y_N = k)$ signifie que [l'on a tiré $N-k$ bonbons de

la poche n°1 et N bonbons de la poche n°2 et

le dernier tirage est forcément la poche n°2] ou [le contraire $n^\circ 1 \leftrightarrow n^\circ 2$]

$$P(Y_N = k) = 2 \binom{2N-k-1}{N-1} \frac{1}{2^N} \frac{1}{2^{N-k}}$$

$$\text{donc } \boxed{P(Y_N = k) = \binom{2N-k-1}{N-1} 2^{k+1-2N}}$$

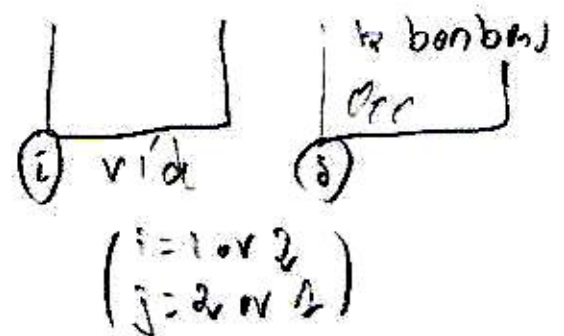
e) Noton) A l'événement: "la 1^{ère} boîte a été vidée n'est pas la 1^{ère} boîte à être devenue vide".

$((Y_N = k))_{k \in \llbracket 1, N \rrbracket}$ étant un système complet (10)

d'événement, on a :

$$P_N = \mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^N \mathbb{P}(Y_N = k) \times \mathbb{P}(A / Y_N = k) \quad (\text{F.P.T.})$$

Si $Y_N = k$ alors l'une des boîtes est vide et l'autre en contient k ($k \geq 1$).



d'où :

$$\mathbb{P}(A / Y_N = k) = \mathbb{P}(\text{"on tire } k \text{ bombes dans la boîte } j \text{ et on essaie encore 1 fois cette boîte } j\text{"})$$

$$= \mathbb{P}(\text{"on tire } k+1 \text{ fois dans la boîte } j\text{"})$$

$$= \frac{1}{2^{k+1}}$$

$$\text{d'où : } P_N = \mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^N \frac{\binom{2N-k-1}{N-1}}{2^{2N}}$$

on peut donc écrire $\frac{1}{2^{2N}}$.

On $\sum_{k=1}^N \binom{2N-k-1}{N-1} = \sum_{k=1}^N \binom{N-1+N-k}{N-1}$ c. voir 4
1) b)

$$= \sum_{j=0}^{N-1} \binom{N-1+j}{N-1} = \binom{N+N-1}{N} \text{ (cf 4 1) b) !}$$

d' $\boxed{P_N = \frac{\binom{2N-1}{N}}{2^{2N}}}$

Et, toujours avec Stirling, on a :

$$P_N \sim \frac{1}{4^N} \left(\frac{2N-1}{e} \right)^{2N-1} \sqrt{2(2N-1)\pi} \times \left(\frac{e}{N} \right)^{\frac{1}{\sqrt{2N\pi}}} \left(\frac{e}{N-1} \right)^{\frac{1}{\sqrt{2(N-1)\pi}}}$$

$$\sim \frac{1}{4^N} \frac{(2N-1)^{2N-1}}{N^N (N-1)^{N-1}} \frac{2\sqrt{N\pi}}{\sqrt{2N\pi} \sqrt{2N\pi}} \times e^0$$

$$\sim \frac{1}{4^N} \frac{1}{\sqrt{N\pi}} \times \alpha_N \quad \text{et} \quad \alpha_N = \frac{(2N-1)^{2N-1}}{N^N (N-1)^{N-1}}$$

$$\sim \frac{1}{4^N} \frac{1}{\sqrt{N\pi}} \frac{2^{2N-1} \left(1 - \frac{1}{2N}\right)^{2N-1}}{\left(1 - \frac{1}{N}\right)^{N-1}}$$

comme $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow 1/e$ avec les log,

$$P_N \sim \frac{1}{2\sqrt{N\pi}} \frac{e^{-1} (1 - 1/N)}{(1 - 1/2N)e}$$

d' $\boxed{P_N \sim \frac{1}{2\sqrt{N\pi}}}$