DM 5
Électromagnétisme

Exercice 1 : Potentiel de Yukawa

On considère une distribution $(\mathcal{D})$ de charges à symétrie sphérique autour d'un point O origine d'un repère d'espace $(Oxyz)$. En un point M tel que $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$, le potentiel électrostatique est donné par :

$$V(M) = V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} \exp\left(-\frac{r}{a}\right)$$

avec q et a des constantes.

Q.1 Donner les unités respectives de q et a.

Q.2 Étudier les symétries du champ électrostatique $\vec{E}(M)$ et déterminer son expression en tout point de l'espace différent de O.

Q.3 Donner des équivalents au champ $\vec{E}$ lorsque $r \ll a$ et $r \gg a$.

Q.4 Calculer $Q(r)$, charge électrique intérieure à une sphère de rayon r et de centre O. Calculer les limites de $Q(r)$ lorsque $r \ll a$ et $r \gg a$. Que peut-on en déduire quant à la distribution de charge ?

Au vu des résultats précédents, on peut considérer qu'il existe une répartition de charge volumique de densité $\rho(r)$ à symétrie sphérique répartie dans l'espace (appelée *charge diffuse*) et une charge ponctuelle placée en O.

Q.5 En considérant une petite coquille sphérique située entre les deux sphères de rayons r et $r + dr$ avec $\mathrm{d}r \ll r$, dont le volume est donné par $d\tau = 4\pi r^2 \mathrm{d}r$, déterminer la charge volumique $\rho(r)$ à la distance r.

Q.6 Quelle est la charge totale diffuse de la distribution $(\mathcal{D})$? Pouvait-on le prévoir sans calcul ?

Exercice 2 : Espace entre deux plans

Le but de cet exercice est de comparer le champ électrostatique $\vec{E}$ et le champ magnétostatique $\vec{B}$ produits respectivement par une distribution de charge $\rho(M)$ et par une distribution de courant $\vec{j}(M)$. Les deux distributions sont uniformes et confinées à l'espace illimité dans les directions $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$ et compris entre les plans $z = -a/2$ et $z = a/2$. Dans cet espace, $\rho = cste > 0$ et $\vec{j} = j\vec{u}_x$ avec $j = cste > 0$.

Q.1 On considère chacun des champs en un point $M(x, y, z)$ quelconque (extérieur ou intérieur à la distribution). À l'aide de considérations de symétries et d'invariances, établir la nature de la dépendance et la direction de chaque champ par rapport aux coordonnées de M.

Q.2 En utilisant les symétries des champs électrostatique et magnétostatique, que dire de ces champs dans le plan $z = 0$.

Q.3 En utilisant la propriété précédente, achever le calcul de ces champs dans la région $z > 0$ en appliquant le théorème de Gauss à une surface bien choisie ou le théorème d'Ampère à un contour bien choisi. On distinguera les expressions relatives à un point extérieur ou intérieur à la distribution.

Q.4 Reprendre le calcul pour $z < 0$ et décrire l'effet sur chacun des champs de la symétrie par rapport au plan $z = 0$.

Q.5 Représenter graphiquement les variations des composantes non nulles de ces champs.

On considère la limite des deux problèmes précédents lorsque a tend vers 0 d'une part, ρ et j vers l'infini d'autre part de sorte que les quantités $\sigma = a\rho$ et $j_s = aj$ restent finies.

Q.6 Décrire le modèle correspondant en précisant la signification de σ et $\vec{j}_s$. Dans la région $z > 0$, donner les expressions de chacun des champs en fonction exclusivement de σ ou de j_s ainsi que des vecteurs unitaires.

Q.7 Montrer que la distribution de courant peut être considérée comme une distribution de charge en mouvement de translation à la vitesse $\vec{v}$, on exprimera alors $\vec{j}_s$ en fonction de σ et $\vec{v}$.

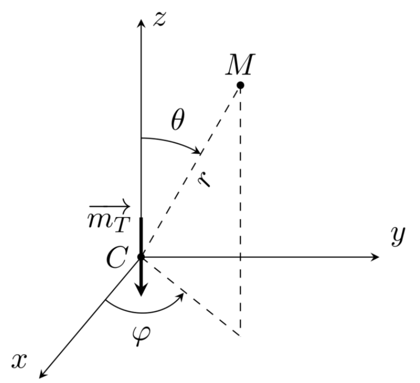
Q.8 Quelle relation faisant intervenir la vitesse $\vec{v}$ ci-dessus lie les champs magnétique et électrique ?

Q.9 Montrer que ce modèle surfacique fait apparaître des discontinuités des champs électrostatique et magnétostatique dont on donnera les expressions.

Exercice 3 : Mesure du champ magnétique terrestre

Données : rayon terrestre $R_T = 6400\,\text{km}$; $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}\,\text{H}\cdot\text{m}^{-1}$.

On admet que le champ magnétique terrestre $\vec{B}$ est assimilable au champ magnétique créé par un dipôle magnétique situé au centre C de la Terre, de moment magnétique $\vec{m}_T = -m_T\vec{e}_z$ avec $(m_T > 0)$.

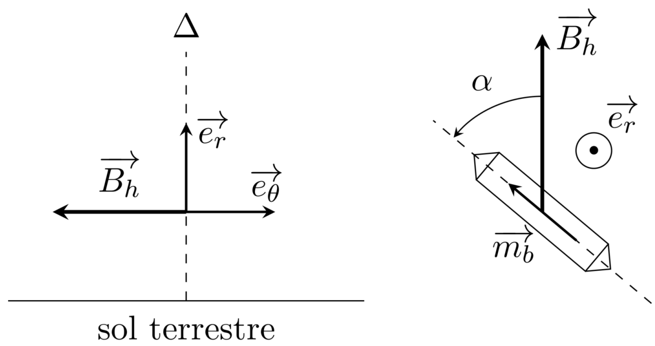


Un point M de l'espace est repéré par ses coordonnées sphériques (r, θ, φ) par rapport à l'axe géomagnétique (Cz). Le champ $\vec{B}$ en M s'écrit dans ce même système de coordonnées :

$$\vec{B} = B_r\vec{e}_r + B_\theta\vec{e}_\theta + B_\varphi\vec{e}_\varphi$$

avec $B_r = -\dfrac{\mu_0 m_T}{4\pi}\dfrac{2\cos\theta}{r^3}$; $B_\theta = -\dfrac{\mu_0 m_T}{4\pi}\dfrac{\sin\theta}{r^3}$; $B_\varphi = 0$.

On se propose de déterminer, en un point M de coordonnées (R_T, θ_0, φ) situé à la surface de la terre et à la colatitude θ_0, l'intensité de la composante horizontale $B_h = |B_\theta|$ du champ magnétique terrestre en mesurant les petites oscillations dans un plan horizontal d'une boussole. Celle-ci est un petit solide qui peut tourner sans frottement autour de son axe vertical Δ. Elle est assimilable à un dipôle magnétique de moment magnétique $\vec{m}_b$ et de moment d'inertie J par rapport à son axe de rotation. On note α l'angle entre $\vec{B}_h$ et $\vec{m}_b$:



Q.1 Quelle est la position d'équilibre stable de la boussole dans le champ magnétique terrestre ? Justifier la réponse.

Q.2 Établir l'équation différentielle du mouvement de l'aiguille soumise au champ magnétique terrestre.

Q.3 En déduire la période T_0 des petites oscillations de cette aiguille en fonction de B_h, de J et de la norme m_b du moment magnétique de la boussole.

Les valeurs de m_b et J n'étant pas connues, on utilise le champ magnétique $\vec{B}_e$ d'intensité $B_e < B_h$ créé par une bobine parcourue par un courant électrique pour s'en affranchir. On place d'abord la bobine de sorte que $\vec{B}_e$ et la composante horizontale du champ terrestre soient parallèles et de même sens et on mesure la période T_1 des petites oscillations de l'aiguille aimantée. On change ensuite le sens du courant dans la bobine et on mesure la nouvelle valeur T_2 de la période des petites oscillations.

Q.4 En déduire B_h en fonction de l'intensité B_e du champ magnétique créé par la bobine et du rapport T_1/T_2 des deux périodes.

Q.5 Application numérique : en un point M situé à une colatitude $\theta_0 = 50°$, on a mesuré $B_e = 6{,}0\,\mu\text{T}$ et $T_1/T_2 = 0{,}78$. Calculer B_h.

Q.6 En déduire le moment magnétique terrestre m_T. Dans quel intervalle varie l'intensité du champ magnétique terrestre $\|\vec{B}\|$ lorsque θ varie entre le pôle Nord magnétique et le pôle Sud magnétique ?

Exercice 4 : Monopôle magnétique (Bonus)

S'il existe des charges électriques, il n'a jamais été découvert de charge (ou monopôle) magnétique, et cette non-existence est incorporée dans les propriétés fondamentales des champs. Cependant, il existe des situations physiques qui sont analogues à un problème d'électromagnétisme avec un monopole magnétique ; il est donc intéressant d'étudier l'implication de l'existence de ces monopoles.
On se place dans l'espace à trois dimensions en utilisant les coordonnées sphériques (r, θ, φ). On suppose qu'une *charge magnétique* q_m placée au centre du repère O crée en un point M le champ :

$$\vec{B}_{\text{mono}}(M) = \frac{\mu_0 q_m}{4\pi r^2}\vec{u}_r$$

On notera S_r la sphère de rayon r de centre O.

Q.1 Représenter graphiquement ce champ de vecteurs. Quelle est la propriété fondamentale d'un champ magnétique mise en défaut ici (on justifiera par le calcul d'une quantité intégrale) ?

Q.2 Supposons qu'il existe une fonction $\vec{A}(M)$ telle que l'équation $\vec{B}_{\text{mono}}(M) = \overrightarrow{\text{rot}}\vec{A}(M)$ soit vérifiée en tout point de l'espace. Montrer que cela n'est pas compatible avec l'existence d'un monopôle magnétique.

On définit les deux expressions suivantes :

$$\vec{A}_N = \frac{\mu_0}{4\pi} q_m \frac{1 - \cos\theta}{r \sin\theta}\vec{u}_\varphi \quad \text{et} \quad \vec{A}_S = -\frac{\mu_0}{4\pi} q_m \frac{1 + \cos\theta}{r \sin\theta}\vec{u}_\varphi$$

Q.3 Montrer que les champs de vecteurs $\vec{A}_N$ et $\vec{A}_S$ vérifient tous les deux l'équation de la **Q.2** et déteminer l'ensemble des points de S_r pour lesquels ces fonctions sont définies.

Q.4 Montrer que le flux du champ magnétique $\vec{B}_{\text{mono}}$ à travers S_r peut s'écrire comme une intégrale le long de l'équateur faisant intervenir $\vec{A}_N$ et $\vec{A}_S$.

Q.5 Vérifier que la description avec deux champs de vecteurs $\vec{A}_N$ et $\vec{A}_S$ est cohérente avec la question **Q.1**.

Formulaire

- Pour tout champ de vecteurs $\vec{a}$, $\mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{a}) = 0$.
- Théorème de Stokes–Ampère : pour un contour fermé γ et une surface S_γ s'appuyant sur ce contour, on admet que pour un champ de vecteur $\vec{a}$:

$$\iint_{S_\gamma} \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{a}) \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint_\gamma \vec{a} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$$

- Expression du rotationnel d'un champ de vecteur $\vec{a}$ en coordonnées sphériques :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{a}) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial\left(\sin\theta a_\varphi\right)}{\partial\theta} - \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial a_\theta}{\partial\varphi} \\ \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial a_r}{\partial\varphi} - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\left(r a_\varphi\right)}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\left(r a_\theta\right)}{\partial r} - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial a_r}{\partial\theta} \end{pmatrix}$$