

Q8 Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ tel qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$
et $A = P B P^{-1}$

* Comme $\text{Tr}(MN) = \text{Tr}(NM)$ pour toutes matrices M, N ,
 $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(P B P^{-1}) = \text{Tr}(P^{-1} P B) = \text{Tr}(B)$

* Comme $\text{rg } MP = \text{rg } PM = \text{rg } M$ si $P \in GL_n(\mathbb{R})$,
 $\text{rg } A = \text{rg } B$

* $\det A = \det P \times \det B \times \frac{1}{\det P} = \det B$

* $A - n I_n = P B P^{-1} - n P P^{-1} = P (B - n I_n) P^{-1}$

donc $\chi_A(n) = \det(A - n I_n) = \det(B - n I_n) = \chi_B(n)$

d° A et B ont $\hat{m}$ trace, rg, det et poly. car

Q9

$\text{Tr}(A) = \text{Tr}(B) = \underline{5}$

$\det A = \det B = \underline{4}$

$\text{rg } A = \text{rg } B = \underline{3}$ (car $\det A \neq 0$: A inversible de $\text{rg } A = 3$)

$\chi_A(n) = \chi_B(n) = \underline{(n-1)(n-2)^2}$

On a $\dim E_1(A) = \dim E_1(B) = 1$. déterminons

(2)

$\dim E_2(A)$ et $\dim E_2(B)$

$$* AX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z = 2x \\ 2y = 2y \\ 2z = 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y-z=0 \\ 0=0 \\ 0=0 \end{cases}$$

Donc $E_2(A)$ est le plan $P/x-y-z=0$: $\dim E_2(A) = 2$

$$* BX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2x \\ 2y+z = 2y \\ 2z = 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ 0=0 \\ 0=0 \end{cases}$$

Donc $E_2(B)$ est la droite $D = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$: $\dim E_2(B) = 1$

(Remarque: on pourrait aussi montrer que $\begin{cases} \text{rg}(A - \lambda I_3) = 1 \\ \text{rg}(B - \lambda I_3) = 2 \end{cases}$)

Cg5 A est diagonalisable mais pas B , si A et B

étaient semblables, comme $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,

par transitivité, B et D seraient semblables et donc

B serait diagonalisable : absurde

d'où : A et B non semblables

A étant diagonalisable, $\pi_A(n) = (n-1)/(n-2)$ et si

$\pi_B(n) = \pi_A(n)$, alors, par la 3^{ème} caractérisation, B serait diagonalisable : absurde

d $\boxed{\pi_A(n) \neq \pi_B(n)} \quad (=(n-1)/(n-2)^2)$ (3)

Q10 On a $\begin{cases} u(e_1) = e_2 + 2e_3 \leftarrow \\ u(e_2) = e_1 + e_3 \leftarrow \\ u(e_3) = e_1 \leftarrow \end{cases}$

On veut une base (e'_1, e'_2, e'_3) tq $\begin{cases} u(e'_1) = e'_2 + e'_3 \\ u(e'_2) = e'_1 + 2e'_3 \\ u(e'_3) = e'_2 \end{cases}$

En échangeant les "rôles" de e_1, e_2, e_3 :

$e'_1 = e_2, e'_2 = e_1$ et $e'_3 = e_3$, $b' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est

donc une base de E et $\pi_{b'}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = B$

si on note P la matrice de passage de b à b' , on a :

$A = PBP^{-1}$ d'où : $\boxed{A \text{ et } B \text{ sont semblables}}$

(12) $\chi_A(n) = - \begin{vmatrix} -n & 1 & 1 \\ 1 & -n & 0 \\ 2 & 1 & -n \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -n \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + n \begin{vmatrix} -n & 1 \\ 1 & -n \end{vmatrix} \quad (\text{dev't } 1^{\text{er}} \text{ col.})$

$= -1 - 2n + n^3 - n = \underline{n^3 - 3n - 1}$

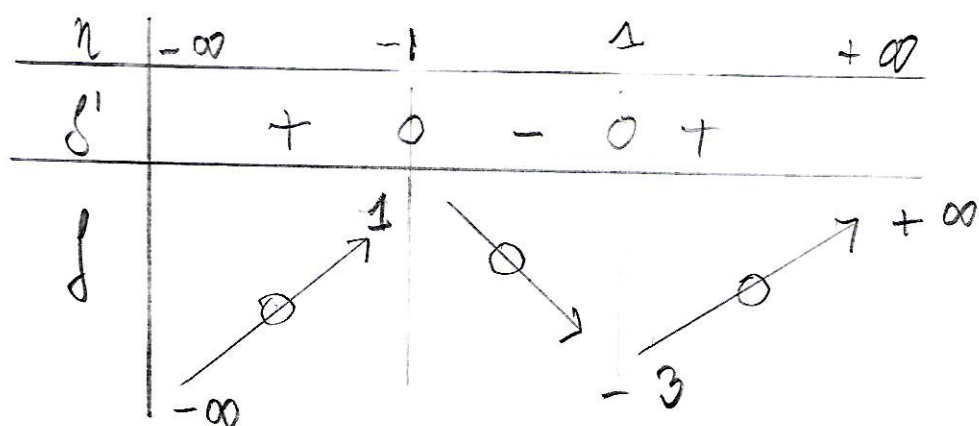
$\chi_B(n) = - \begin{vmatrix} -n & 1 & 0 \\ 1 & -n & 1 \\ 1 & 2 & -n \end{vmatrix} = +n \begin{vmatrix} -n & 1 \\ 2 & -n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -n \end{vmatrix} \quad \text{dev't } 1^{\text{er}} \text{ ligne}$

$= \underline{n^3 - 3n - 1}$

eqs $\underline{\chi_A(n) = \chi_B(n) = n^3 - 3n - 1}$

Étudions les racines réelles de $f(x) = x^3 - 3x - 1$, (4)

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1) \quad \text{d'où } A_{T_x} \perp V_x :$$



Par le théorème de la bijection (appliqué 3 fois),

f possède 3 racines réelles distinctes : α, β, γ .

On en déduit que A et B sont diagonalisables par le corollaire de la 2^{ème} caractérisation et que A et B sont semblables à $D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$, par transitivité,

on conclut : d'où : A et B sont semblables

Q11 Comme $\text{rg} u = \text{rg} A = 1$, par le théorème du rg , $\dim \text{Ker} u = n-1$.

Soit $(e_1, \dots, e_{n-1})$ une base de $\text{Ker} u$ et avec $T \in \mathbb{R}$, $e_n \in E$ tel que $b' = (e_1, \dots, e_{n-1}, e_n)$ soit une base de E .

$$\pi_{b'}(u) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & & & \vdots \\ 0 & & 0 & a_n \end{pmatrix} = U \text{ avec } u(e_n) = \sum_{i=1}^n a_i e_i \text{ donc } A = P U P^{-1}$$

d°

 A est semblable à U

(5)

Q12
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1 \\ 1 & 1 & a_2 \\ 0 & 0 & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & a_n \end{pmatrix} \text{ donc } U^2 = a_n U$$

Comme $u \cdot u \neq 0$, $U^2 \neq (0)$ donc $a_n \neq 0$ et U s'annule sur le polynôme $Q = X^2 - a_n X = X(X - a_n)$: scindé à racine simple,

par la 3^{ème} caractérisation : U diagonalisable

Q13 cherchons une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$. A ne sera pas diagonalisable si $\chi_A(n)$ est de la forme $(n - \alpha)^2$, $\alpha \in \mathbb{C}$.

Par exemple $\alpha = 0$, comme on veut une matrice non réelle, prenons $a = i$, comme $\chi_A(n) = n^2 - (a+d)n + ad - b^2 = n^2$,

on prend $d = -i$ puis $1 - b^2 = 0$ soit $b = \pm 1$.

Prenons $A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$, $\chi_A(n) = n^2$, d'où si A était

diagonalisable, il existerait P tq $A = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = (0)$: absurde

d° $A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$ convient

Q₁₄ $\text{rg } A = \text{rg} \begin{pmatrix} \alpha & \beta-\alpha & 0 & 0 \\ \beta & \alpha-\beta & 0 & 0 \\ \alpha & \beta-\alpha & 0 & 0 \\ \beta & \alpha-\beta & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 & 0 \\ -1 & \beta & 0 & 0 \\ -1 & \alpha & 0 & 0 \\ -1 & \beta & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{⑥}$
 $\beta-\alpha \neq 0$
 $\downarrow$
 $C_2 - C_1 \quad C_3 - C_1 \quad C_4 - C_2 \quad C_1 \leftrightarrow C_2 \text{ puis } C_1 \leftarrow \frac{1}{\beta-\alpha} C_1$

$$= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \beta+\alpha & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \beta+\alpha & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \quad (\text{car } \beta+\alpha \neq 0)$$

$C_2 - \alpha C_1$

d'o $\text{rg } A = 2 < 4$, donc $\det A = \det(A - 0 I_4) = 0$: 0 val. propre

Si on pose $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A X_1 = 2(\alpha + \beta) X_1$
 $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $A X_2 = 2(\alpha - \beta) X_2$ } donc $2(\alpha \pm \beta)$ val. propres

si on considère un complément associé à A , $\left. \begin{aligned} u(e_1) &= u(e_3) \\ u(e_2) &= u(e_4) \end{aligned} \right\}$
 donc $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont dans $\ker u = E_0$

il est clair que $\text{rg}(X_3, X_4) = 2$ et par la T.F. de liberté des vecteurs propres :

d'o (X_1, X_2, X_3, X_4) base de $\vec{V}_p$ de A

Q₁₅ Soit u linéairement associé à A , on a donc (7)

$$\begin{cases} u(e_1) = \lambda e_1 \\ u(e_2) = \lambda e_2 + a e_1 \end{cases}$$

on en déduit que $\begin{cases} u(e_2) = \lambda e_2 + b \frac{a}{b} e_1 & (b \neq 0) \\ u(\frac{a}{b} e_1) = \lambda \frac{a}{b} e_1 \end{cases}$

Posons $b' = (\frac{a}{b} e_1, e_2)$, b' base de $\mathbb{R}^2$ et

$\pi_{b'}(u) = \begin{pmatrix} \lambda & b \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = B$ d'où A et B sont semblables

Q₁₆ $B = P^{-1} A P \Rightarrow P B = A P \Rightarrow R B + i S B = A R + i A S$,

donc $\forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ $[R B + i S B]_{i,j} = [A R + i A S]_{i,j}$ et

comme $(R B, S B, A R, A S) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^4$, $\begin{cases} [R B]_{i,j} = [A R]_{i,j} \\ [S B]_{i,j} = [A S]_{i,j} \end{cases}$

d'où R B = A R et S B = A S

Q₁₇ Notons φ cette fonction, $\forall n \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) :

$$\varphi(n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{Y}_n} \prod_{j=1}^n (R_{\sigma(j),j} + i S_{\sigma(j),j}) = \alpha n + \beta \quad \text{avec } (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \text{ indép. de } n.$$

Comme $\varphi(1) = \det(R + i S) = \det P \neq 0$, φ n'est pas le polynôme nul. Il n'a donc qu'un nb fini de racines

q₅: $\exists n \in \mathbb{R}$ (et n une infinité) $\setminus \forall |n| = \det(R + nS) \neq 0$ ⑧

d°: $\exists n \in \mathbb{R} \setminus R + nS$ inversible

Q₁₈ Avec ce n et Q₁₆ et en posant $Q = R + nS$, on a:

$$\underset{\uparrow}{QB} = (R + nS)B = RB + nSB = AR + nAS = A \underset{\uparrow}{Q}, \text{ et}$$

comme Q inversible, $B = Q^{-1}AQ$ et $Q \in GL_n(\mathbb{R})$

d° A et B semblables dans $M_n(\mathbb{R})$

Q₁₉ Immersion: on voit $A \in M_3(\mathbb{C})$, comme:

$\chi_A(n) = n^3 + n = n(n-i)(n+i)$, par la caractérisation de la 2^{ème} caractérisation, A semblable, de $M_3(\mathbb{C})$, à $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$.

Comme $\chi_B(n) = \begin{vmatrix} n & 0 & 0 \\ 0 & n & -1 \\ 0 & 1 & n \end{vmatrix} = n(n^2 + 1)$ (dev^t 1^{er} col), B

est donc semblable aussi à D et par transitivité,

A et B semblables dans $M_3(\mathbb{C})$, on conclut avec la Q₁₈:

d° A et B semblables de $M_3(\mathbb{R})$

Q₂₀ Soit $(A, B) \in M_2(\mathbb{R})^2 \setminus \chi_A(n) = \chi_B(n)$ et $\pi_A(n) = \pi_B(n)$

1^{er} cas $\chi_A(n) = (n - \alpha)(n - \beta)$ avec $\alpha \neq \beta$, α et β éventuellement

complexes, alors A diagonalisable semblable à $D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$.

Donc les 2 matrices ayant un tel polynôme caractéristique sont donc semblables de $M_2(\mathbb{C})$ et donc dans $M_2(\mathbb{R})$.

Notons que dans ce cas, $\pi_A(n) = \pi_B(n) = \chi_A(n)$. (9)

2^{me} cas $\chi_A(n) = (n - \alpha)^2 = n^2 - 2\alpha n + \alpha^2$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ ($-2\alpha \in \mathbb{R}$)

Par Cayley-Hamilton, $\pi_A(n) \mid (n - \alpha)^2$ donc 2 cas: $n - \alpha$ ou $(n - \alpha)^2$.

1^{er} sous-cas: si $\pi_A(n) = n - \alpha$, alors $A = B = \alpha I_2$: A et B semblables

2^{me} sous-cas: si $\pi_A(n) = (n - \alpha)^2$, A non diagonalisable, donc $\dim E_\alpha = 1$. si $E_\alpha = \text{vect}(\vec{u})$ et $b' = (\vec{u}, \vec{v})$ base de $\mathbb{R}^2$ (T.B.I.)

$$A = P \begin{pmatrix} \alpha & a \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} P^{-1} \text{ et } a \neq 0$$

$$\text{et } B = Q \begin{pmatrix} \alpha & b \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} Q^{-1} \text{ et } b \neq 0, \text{ on conclut avec Q.15}$$

$d^\circ \quad \chi_A = \chi_B \text{ et } \pi_A = \pi_B \Rightarrow A \text{ et } B \text{ semblables}$

Q21) Analyse: Les 2 matrices ne doivent pas être diagonalisables sinon elles seraient semblables à la même matrice diagonale. Essayons avec les plus simples des polynômes caractéristiques et minimaux:

$$\chi_A(n) = \chi_B(n) = n^4 \text{ et } \pi_A(n) = \pi_B(n) = n^2$$

Essayons, de plus, avec des matrices triangulaires:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ad & ae + bf \\ 0 & 0 & 0 & df \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si on prend $a=f=0$, alors $\forall (b,c,d,e) \in \mathbb{R}^4$; (10)

$$M = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & b & c \\ 0 & 0 & d & e \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \text{ vérifie } \chi_M(n) = n^4 \text{ et } \pi_M(n) = n^2$$

q's pos. (11) $A = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$ et $B = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$

$$\text{on a } \begin{cases} \chi_A(n) = \chi_B(n) = n^4 \\ \pi_A(n) = \pi_B(n) = n^2 \end{cases}$$

on $\text{rg } A = 1$ et $\text{rg } B = 2$, donc avec Q6,

A et B ne peuvent être semblables

I. Matrices compagnons et endomorphismes cycliques

I.A.

Q₁. On a $\chi_M = \det(XI_n - M) = \det((XI_n - M)^T) = \det(XI_n - M^T) = \chi_{M^T}$ donc

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \in \text{sp}(M) \Leftrightarrow \chi_M(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \chi_{M^T}(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \text{sp}(M^T)$$

Ainsi $\text{sp}(M) = \text{sp}(M^T)$ et donc M et M^T ont même spectre

Q₂. $\Leftarrow$: On suppose que M est diagonalisable. ce qui nous fournit $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonale telles que $M = PDP^{-1}$

$$\text{donc } M^T = (P^{-1})^T D^T P^T = (P^T)^{-1} D P^T$$

d'où M^T est diagonalisable

$\Rightarrow$: On suppose que M^T est diagonalisable.

Pour montrer que M est diagonalisable, on utilise l'implication précédente en remarquant que $M = (M^T)^T$.

On a bien montré que M^T est diagonalisable si et seulement si M est diagonalisable

I.B. Matrices compagnons

Q₃. On montre que $\chi_{C_Q} = Q$ par récurrence sur $\deg(Q) = n \geq 2$

Initialisation : On suppose que $\deg(Q) = 2$ ainsi $Q = X^2 + a_1X + a_0$ et $C_Q = \begin{pmatrix} 0 & -a_0 \\ 1 & -a_1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$

On a $\chi_{C_Q} = X^2 - \text{tr}(C_Q)X + \det(C_Q) = X^2 + a_1X + a_0$ ce qui prouve l'initialisation

Hérédité : Soit l'entier $n \geq 2$. On suppose la propriété vraie pour tout polynôme unitaire de degré n .

On considère $Q(X) = X^{n+1} + a_nX^n + \dots + a_0$ où les $a_i \in \mathbb{K}$. On a en développant par rapport à la première ligne :

$$\chi_{C_Q} = \begin{vmatrix} X & \dots & \dots & \dots & 0 & a_0 \\ -1 & X & \dots & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & \ddots & & \vdots & a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -1 & X & a_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & X + a_n \end{vmatrix}_{[n+1]} = X \begin{vmatrix} X & \dots & \dots & 0 & a_1 \\ -1 & \ddots & & \vdots & a_2 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & \ddots & -1 & X & a_{n-1} \\ \dots & \dots & 0 & -1 & X + a_n \end{vmatrix}_{[n]} + (-1)^{n+2} a_0 \begin{vmatrix} -1 & X & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -1 & X \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 \end{vmatrix}_{[n]}$$

on note $R = X^n + a_nX^{-1} + \dots + a_1$ et on a $\chi_{C_Q} = X\chi_{C_R} + a_0(-1)^{2n+2}$

Par hypothèse de récurrence, on a $\chi_{C_R} = R$ donc $\chi_{C_Q} = XR + a_0 = Q$

Conclusion : On a montré par récurrence que la propriété était vraie pour tout polynôme unitaire de degré ≥ 2

En particulier Q est le polynôme caractéristique de C_Q

$$\text{Q}_4. \text{ On a } (C_Q)^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

On a $\chi_{C_Q^T} = \chi_{C_Q} = Q$ ainsi $Q(\lambda) = 0$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$,

$$(C_Q)^\top X = \lambda X \iff \begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ x_3 = \lambda x_2 \\ \vdots \\ x_n = \lambda x_{n-1} \\ -a_0 x_1 - \dots - a_{n-1} x_n = \lambda x_n \end{cases} \iff \begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ x_3 = \lambda^2 x_1 \\ \vdots \\ x_n = \lambda^{n-1} x_1 \\ (-a_0 - a_1 \lambda - \dots - a_{n-1} \lambda^{n-1}) x_1 = \lambda^n x_1 \end{cases}$$

$$\text{Ainsi } (C_Q)^\top X = \lambda X \iff \begin{cases} \forall i \in \llbracket 2, n \rrbracket, x_i = \lambda^{i-1} x_1 \\ Q(\lambda) x_1 = 0 \end{cases}$$

Notez bien que le "ainsi" concerne toute l'équivalence !

Comme λ est racine de Q , alors $\dim(E_\lambda(C_Q^\top)) = 1$, $E_\lambda(C_Q^\top) = \text{vect}(X_\lambda)$ où $X_\lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix}$

I.C. Endomorphismes cycliques

Q₅. $\Rightarrow$: On suppose que f est cyclique.

Ceci nous fournit $x_0 \in E$ tel que $\mathcal{B} = (x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ soit une base de E .

Il existe alors $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que $f^n(x_0) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i f^i(x_0)$.

On pose alors $Q = X^n + \sum_{i=0}^{n-1} (-\lambda_i) X^i$, de sorte que Q est unitaire de degré n et $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = C_Q$.

$\Leftarrow$: On suppose qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_0, e_1, \dots, e_{n-1})$ de E dans laquelle la matrice de f est de la forme C_Q , où Q est un polynôme unitaire de degré n

Ainsi $\forall i \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket, f(e_i) = e_{i+1}$

donc $(e_0, f(e_0), f^2(e_0), \dots, f^{n-1}(e_0))$ est une base de E et donc f est cyclique

f est cyclique si et seulement s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de f est de la forme C_Q où Q est un polynôme unitaire de degré n

Q₆. $\Leftarrow$: On suppose que χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$ et a toutes ses racines simples.

Ainsi $|\text{sp}(f)| = \deg(\chi_f) = \dim E$

donc f est diagonalisable d'après le cours

$\Rightarrow$: On suppose que f est diagonalisable. Comme f est cyclique,

ceci nous fournit $\mathcal{B}$ une base de E et $Q \in \mathbb{K}[X]$ unitaire de degré n tel que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = C_Q$ d'après **Q₅**.

Ainsi C_Q est diagonalisable et il en est de même pour $C_Q^\top$ d'après **Q₂**.

$$\text{Ainsi } \mathbb{K}^n = \bigoplus_{\lambda \in \text{sp}(f)} E_\lambda(C_Q^\top) \text{ d'où } n = \sum_{\lambda \in \text{sp}(C_Q^\top)} \dim(E_\lambda(C_Q^\top))$$

or on a $\forall \lambda \in \text{sp}(C_Q^\top)$, $\dim(E_\lambda(C_Q^\top)) = 1$ d'après $\mathbf{Q}_4$ donc $|\text{sp}(C_Q^\top)| = n$

or d'après $\mathbf{Q}_1$: $\text{sp}(C_Q^\top) = \text{sp}(C_Q) = \text{sp}(f)$

donc f admet n valeurs propres distinctes dans $\mathbb{K}$

donc χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$ et a toutes ses racines simples

Ainsi f est diagonalisable si et seulement si χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$ et a toutes ses racines simples

$\mathbf{Q}_7$. On suppose que f est cyclique.

Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\sum_{i=0}^n \lambda_i f^i = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Montrons $\forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $\lambda_i = 0$

Comme f est cyclique, ceci nous fournit $x \in E$ tel que $\mathcal{B} = (x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ soit une base de E

donc $\sum_{i=0}^n \lambda_i f^i(x) = 0_{\mathcal{L}(E)}(x) = 0_E$

ainsi $\forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $\lambda_i = 0$ car $\mathcal{B}$ est libre

Alors $(\text{Id}, f, f^2, \dots, f^{n-1})$ est libre dans $\mathcal{L}(E)$

On note d le degré de π_f . D'après le cours on a $d = \dim(\mathbb{K}[f])$.

Or $(\text{Id}, f, f^2, \dots, f^{n-1})$ est libre dans $\mathbb{K}[f]$ donc $d \geq n$

de plus d'après Cayley-Hamilton, on a χ_f est annulateur de f

d'où $\pi_f \mid \chi_f$ or ce sont des polynômes non nuls ainsi on a $d = \deg(\pi_f) \leq \deg(\chi_f) = n$

ainsi $n = d$ d'où le polynôme minimal de f est de degré n

On ne se sert pas de cette question pour montrer le théorème de Cayley-Hamilton dans le paragraphe **I.D** qui suit.

I.D. Application à une démonstration du théorème de Cayley-Hamilton

$\mathbf{Q}_8$. On note $N_x = \left\{ m \in \mathbb{N}^* \mid (f^i(x))_{0 \leq i \leq m-1} \text{ libre} \right\}$.

On sait que $1 \in N_x$ car $x \neq 0_E$ et que $\forall m \geq n$, $m \notin N_x$ car $\dim E = n$

Ainsi N_x est une partie de $\mathbb{N}^*$ non vide majorée par $n-1$

donc N_x admet un plus grand élément $p \in \mathbb{N}^*$.

Ainsi la famille $(f^i(x))_{0 \leq i \leq p-1}$ est libre et la famille $(f^i(x))_{0 \leq i \leq p}$ est liée

On a bien l'existence de $p \in \mathbb{N}^*$ et de $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}) \in \mathbb{K}^p$ tels que la famille $(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x))$ est libre et $\alpha_0 x + \alpha_1 f(x) + \dots + \alpha_{p-1} f^{p-1}(x) + f^p(x) = 0$

$\mathbf{Q}_9$. On a $f(\text{Vect}(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x))) = \text{Vect}(f(x), f^2(x), f^3(x), \dots, f^p(x))$ car f linéaire

or $f^p(x) = -\alpha_0 x - \alpha_1 f(x) - \dots - \alpha_{p-1} f^{p-1}(x) \in \text{Vect}(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x))$

d'où $f(\text{Vect}(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x))) \subset \text{Vect}(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x))$.

Ainsi $\text{Vect}(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x))$ est stable par f

$\mathbf{Q}_{10}$. On note alors $\tilde{f}$ l'endomorphisme induit par f sur $\text{Vect}(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x))$.

D'après ce qui précède $\mathcal{B} = (x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x))$ est une base de $\text{Vect}(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x))$.

On remarque que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\tilde{f}) = C_Q$ en notant $Q = \alpha_0 + \alpha_1 X + \dots + \alpha_{p-1} X^{p-1} + X^p$, d'où

$\chi_{\tilde{f}} = Q$ or $\chi_{\tilde{f}} \mid \chi_f$ car $\tilde{f}$ induit par f .

On a montré que $X^p + \alpha_{p-1} X^{p-1} + \dots + \alpha_0$ divise le polynôme χ_f

Q₁₁. En reprenant les notations précédentes, on a $Q(f)(x) = 0$ et il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $PQ = \chi_f$.

Ainsi $\chi_f(f) = P(f) \circ Q(f)$ donc $\chi(f)(x) = P(f)[Q(f)(x)] = P(f)(0) = 0$ car $P(f)$ linéaire.

On a ainsi montré que : $\forall x \in E, \chi(f)(x) = 0$.

or $\chi(f) \in \mathcal{L}(E)$ donc $\chi(f)(0) = 0$ d'où $\chi_f(f)$ est l'endomorphisme nul

II. Etude des endomorphismes cycliques

II.A. Endomorphismes cycliques nilpotents

Q₁₂. $\Rightarrow$: On suppose f cyclique alors $\deg(\pi_f) = n$ d'après **Q₇**

De plus d'après le cours, $\chi_f = X^n$ car f nilpotente

or $\pi_f | \chi_f$ selon Cayley-Hamilton et π_f est unitaire par définition

donc $\pi_f = X^n$

ainsi $f^n = 0$ et $\forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, f^i \neq 0$

d'où $r = n$

$\Leftarrow$: On suppose que $r = n$ donc $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$

Ceci nous fournit $x \in E$ tel que $f^{n-1}(x) \neq 0$

Soit $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i f^i(x) = 0$.

On montre que $\forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \lambda_i = 0$

On suppose, par l'absurde, que la propriété est fautive

on note alors j le minimum de $\{i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \mid \lambda_i \neq 0\}$

$$\text{Ainsi } 0 = f^{n-1-j} \left(\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i f^i(x) \right) = f^{n-1-j} \left(\sum_{i=j}^{n-1} \lambda_i f^i(x) \right) = \lambda_j f^{n-1}(x) + \sum_{i=j}^{n-1} \lambda_i f^{n-1+i-j}(x)$$

Or $\forall i \geq j, f^i(x) = 0$ donc $\lambda_j f^{n-1}(x) = 0$ et $\lambda_j \neq 0$

d'où $f^{n-1}(x) = 0$ ce qui est absurde

Ainsi $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est une famille libre composée de n vecteurs de E et $\dim E = n$

donc $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est une base de E

donc f est cyclique.

On a montré que f est cyclique si et seulement si $r = n$

On remarque que la matrice compagnon associée est unique car les coefficients de cette matrices sont donnés par ceux du polynôme caractéristique.

On sait que si f est cyclique et nilpotente, alors $\chi_f = X^n$

$$\text{ainsi la matrice compagnon de } f \text{ dans ce cas est } \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

II.B.

Q₁₃. Pour $k \in \llbracket 1, p \rrbracket, (f - \lambda_k \text{Id}_E)^{m_k}$ et f commutent car $\mathbb{C}[f]$ est une algèbre commutative

donc $\boxed{F_k = \text{Ker}((f - \lambda_k \text{Id}_E)^{m_k}) \text{ est stable par } f}$

On a $\chi_f(X) = \prod_{k=1}^p (X - \lambda_k)^{m_k}$ et les polynômes $(X - \lambda_k)^{m_k}$ sont deux à deux premiers entre eux

Alors selon le lemme de décomposition des noyaux, on a

$$\text{Ker}(\chi(f)) = \text{Ker}((f - \lambda_1 \text{Id}_E)^{m_1}) \oplus \cdots \oplus \text{Ker}((f - \lambda_p \text{Id}_E)^{m_p}) = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$$

de plus selon Cayley-Hamilton, $\chi_f(f) = 0$ et donc $\text{Ker}(\chi(f)) = E$

d'où $\boxed{E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p}$

Q₁₄. Soit $x \in F_k$. On a $(f - \lambda_k \text{Id})^{m_k}(x) = 0$

Pour tout $y \in F_k$, on a $(f - \lambda_k \text{Id})(y) = \varphi_k(y) \in F_k$

ainsi pour tout $p \in \mathbb{N}$, $(f - \lambda_k \text{Id})^p(x) = \varphi_k^p(x)$ par récurrence immédiate sur p

donc $\varphi_k^{m_k}(x) = 0$, comme c'est vrai pour tout $x \in F_k$, on conclut que $\boxed{\varphi_k \text{ est un endomorphisme nilpotent de } F_k}$

Q₁₅. D'après le cours, l'indice de nilpotence de φ_k , endomorphisme de F_k est majoré par $\dim F_k$

ainsi $\boxed{\nu_k \leq \dim(F_k)}$

Q₁₆. on note $P = \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)^{\nu_i}$. Soit $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$. Soit $x \in F_k$.

$$\text{On a } P(f) = \left[\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^p (X - \lambda_i)^{\nu_i}(f) \right] \circ (f - \lambda_k \text{Id})^{\nu_k}$$

$$\text{donc } P(f)(x) = \left[\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^p (X - \lambda_i)^{\nu_i}(f) \right] (\varphi_k^{\nu_k}(x)) = \left[\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^p (X - \lambda_i)^{\nu_i}(f) \right] (0) = 0$$

donc $P(f)$ coïncide avec l'endomorphisme nul sur chaque F_k et $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$ d'après **Q₁₃** donc $P(f) = 0$.

On note d le degré de P comme P est unitaire alors $(\text{Id}, f, f^2, \dots, f^d)$ est liée

donc $d \geq n$ car $(\text{Id}, f, f^2, \dots, f^{n-1})$ est libre

$$\text{or } d = \sum_{i=0}^p \nu_i \text{ d'où } n \leq \sum_{i=0}^p \nu_i$$

On remarque à l'aide de la question 14 que $\nu_k \leq m_k$ pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$

$$\text{donc } n \leq \sum_{k=0}^p \nu_k \leq \sum_{i=0}^p m_k = n$$

ainsi les inégalités sont des égalités et $\boxed{\text{pour tout } k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \text{ on a } \nu_k = m_k}$

Q₁₇. Comme $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$ d'après **Q₁₃** et $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \nu_k \leq \dim F_k$ d'après **Q₁₅**

$$\text{on a donc avec la question précédente } n = \sum_{k=1}^p \nu_k \leq \sum_{k=1}^p \dim(F_k) = n$$

Comme à la question précédente, on obtient : $\boxed{\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \nu_k = m_k = \dim(F_k)}$

φ_k est un endomorphisme nilpotent de F_k d'indice $\nu_k = m_k = \dim(F_k)$

donc selon 12, φ_k est nilpotent et cyclique.

ceci nous fournit une base $\mathcal{B}_k$ de F_k tel que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_k}(\varphi_k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m_k}(\mathbb{C})$

En notant f_k l'endomorphisme induit par f sur F_k ,

on a alors $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_k}(f_k) = \begin{pmatrix} \lambda_k & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \lambda_k & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 1 & \lambda_k & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \lambda_k & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & \lambda_k \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m_k}(\mathbb{C})$

En concaténant les bases $\mathcal{B}_k$ pour k allant de 1 à p

On obtient une base $\mathcal{B}$ adaptée à la décomposition en somme directe $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_p$

ainsi $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ est une base de E dans laquelle f a une matrice diagonale par blocs de formes voulues

Remarque : pour la suite on peut démontrer que pour une telle base on a nécessairement :

$$\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, (f - \lambda_k \text{Id})^{m_k}(u_{m_1+\dots+m_{k-1}+1}) = 0 \text{ puis}$$

$$\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \forall i \in \llbracket 1, m_k \rrbracket, u_{m_1+\dots+m_{k-1}+i} \in F_k$$

On peut aussi supposer que l'on travaille avec la base choisie.

Q₁₈. Pour $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on a $u_{m_1+\dots+m_{k-1}+1} \in F_k$

ainsi $\forall i \in \mathbb{N}$, $f^i(u_{m_1+\dots+m_{k-1}+1}) \in F_k$ car F_k stable par f

puis pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, on a $P(f)(u_{m_1+\dots+m_{k-1}+1}) \in F_k$ car F_k est stable par combinaison linéaire.

Et ainsi $P(f)(x_0) = \sum_{k=1}^p P(f)(u_{m_1+\dots+m_{k-1}+1})$ est la décomposition de $P(f)(x_0)$ sur $F_1 \oplus \dots \oplus F_p$

Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$. On a donc $Q(f)(x_0) = 0 \iff \forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, Q(f)(e_k) = 0$

on note $e_k = u_{m_1+\dots+m_{k-1}+1}$ et on a $\mathcal{B}_k = (e_k, \varphi_k(e_k), \dots, \varphi_k^{m_k-1}(e_k))$ est une base de F_k

On a vu que la matrice de φ_k dans cette base est $C_{X^{m_k}}$

donc $\pi_{\varphi_k} = X^{m_k}$ car φ_k est cyclique et nilpotent et $\dim(F_k) = m_k$ selon 12

$$\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, (f - \lambda_k \text{Id})^{m_k}(u_{m_1+\dots+m_{k-1}+1}) = 0 \text{ puis}$$

$$\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \forall i \in \llbracket 1, m_k \rrbracket, u_{m_1+\dots+m_{k-1}+i} \in F_k$$

Par ailleurs on montre facilement que

$$\forall P \in \mathbb{C}[X], P(\varphi_k) = 0 \iff P(\varphi_k)(e_k) = 0$$

car $P(\varphi_k)$ commute avec tout φ_k^i et que $(\varphi_k^i(e_k))_{0 \leq i < m_k}$ est une base de F_k .

Par ailleurs on a $Q(\varphi_k) = 0 \iff X^{m_k} | Q$ (nilpotent et cyclique)

donc $Q(f)(e_k) = 0 \iff Q(\varphi_k + \lambda_k \text{Id}_{F_k})(e_k) = 0 \iff X^{m_k} | Q(X + \lambda_k)$

ainsi $Q(f)(e_k) = 0 \iff (X - \lambda_k)^{m_k} | Q(X)$

donc comme les $(X - \lambda_k)^{m_k}$ sont deux à deux premiers entre eux,

on a finalement
$$Q(f)(x_0) = 0 \iff \prod_{k=1}^p (X - \lambda_k)^{m_k} | Q$$

Q₁₉. Soit $(\lambda_i)_{0 \leq i \leq n-1} \in \mathbb{K}^n$ tel que $\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i f^i(x_0) = 0$ on note $Q = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i X^i$ de sorte que $Q(f)(x_0) = 0$

ainsi $\prod_{k=1}^p (X - \lambda_k)^{m_k} | Q$ d'après la question précédente or $\deg(Q) \leq n-1 < n = \deg\left(\prod_{k=1}^p (X - \lambda_k)^{m_k}\right)$

donc Q est le polynôme nul et ainsi $\forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \lambda_i = 0$

donc $(f^i(x_0))_{0 \leq i \leq n-1}$ est une famille libre de n vecteurs de E et $n = \dim E$

d'où $(f^i(x_0))_{0 \leq i \leq n-1}$ est une base de E ce qui justifie que f est cyclique

III. Endomorphismes commutants, décomposition de Frobenius

Q₂₀. L'application $g \mapsto f \circ g - g \circ f$ est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ dont le noyau est $C(f)$

Ainsi $C(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$

De plus, soit g et $h \in C(f)$. On a $(g \circ h) \circ f = g \circ f \circ h = f \circ (g \circ h)$

ainsi $C(f)$ est stable par $\circ$ et il est clair que $\text{Id} \in C(f)$

Ainsi $C(f)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$

III.A. Commutant d'un endomorphisme cyclique

Q₂₁. On a $g(x_0) \in E$ et $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E .

d'où l'existence de $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ de $\mathbb{K}$ tels que $g(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k(x_0)$

Q₂₂. Il suffit d'établir que les applications linéaires g et $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k$ coïncident sur la base $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$.

On montre par récurrence immédiate que $\forall i \in \mathbb{N}, g \in C(f^i)$

Soit $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. En utilisant 21 et le fait que l'algèbre $\mathbb{K}[f]$ est commutative

$$g(f^i(x_0)) = f^i(g(x_0)) = f^i\left(\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k(x_0)\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k(f^i(x_0))$$

donc $g = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k$ et $g \in \mathbb{K}[f]$

Q₂₃. On vient d'établir le sens direct (avec un polynôme de degré $\leq n-1$)

La réciproque vient du fait que $\mathbb{K}[f]$ est une algèbre commutative et que $\mathbb{K}_{n-1}[X] \subset \mathbb{K}[X]$ et $f \in \mathbb{K}[f]$.

On conclut que

$$g \in C(f) \text{ si et seulement si il existe un polynôme } R \in \mathbb{K}_{n-1}[X] \text{ tel que } g = R(f)$$

III.B. Décomposition de Frobenius

Q₂₄. On suppose que $G = F_1 \cup \dots \cup F_r$ est un sous espace de E .

Par l'absurde, on suppose qu'aucun des sous-espaces F_i ne contient tous les autres.

Ainsi $r \geq 2$ et $G \neq \{0\}$.

Quitte à réduire le nombre, on peut supposer qu'aucun F_i n'est inclus dans la réunion des autres. Cela nous fournit $x_1 \in F_1$ qui n'est dans aucun des F_i pour $i \geq 2$.

Sinon, $F_1 \neq G$ et on peut aussi trouver $y \in G \setminus F_1$.

Pour tout scalaire λ , on a $y + \lambda x_1 \notin F_1$ (car sinon $y \in F_1$) et ainsi $y + \lambda x_1 \in F_2 \cup \dots \cup F_r$.

La droite affine $y + \mathbb{K}x_1$ est donc incluse dans $F_2 \cup \dots \cup F_r$ et contient une infinité d'éléments

car $\mathbb{K}$ est infini et $t \in \mathbb{K} \mapsto y + tx_1$ est injective car $x_1 \neq 0$

Ceci nous fournit $j \in \llbracket 2, r \rrbracket$ et $\lambda \neq \lambda'$ dans $\mathbb{K}$ tel que $y + \lambda x_1 \in F_j$ et $y + \lambda' x_1 \in F_j$

donc $x_1 \in F_j$ (par combinaison linéaire) ce qui est absurde

Ainsi l'un des sous-espaces F_i contient tous les autres

Q₂₅. Soit $x \in E$ On considère l'application $\varphi_x : P \in \mathbb{K}[X] \mapsto P(f)(x) \in E$.

Comme $I_x = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(f)(x) = 0\}$ est le noyau de l'application linéaire φ_x ,

I_x un sous groupe de $(\mathbb{K}[X], +)$

Pour $P \in I_x$ et $Q \in \mathbb{K}[X]$, on a $QP \in I_x$

car $(QP)(f)(x) = (Q(f) \circ P(f))(x) = Q(f)(P(f)(x)) = 0$ car $Q(f) \in \mathcal{L}(E)$

d'où I_x est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ comme $\pi_f \in I_x$, cet idéal est non réduit à $\{0\}$

ce qui nous fournit $\pi_{f,x} \in \mathbb{K}[X]$ unitaire (donc non nul) tel que $I_x = (\pi_{f,x}) = \{\pi_{f,x}P \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$

On remarque que : $\forall x \in E, \pi_{f,x} | \pi_f$

Si on écrit $\pi_f = \prod_{k=1}^N P_i^{\alpha_i}$ décomposition en facteurs irréductibles, où $N \in \mathbb{N}^*$, les P_i sont irréductibles unitaires et distincts deux à deux et enfin les $\alpha_i \in \mathbb{N}^*$.

Alors le nombre de diviseurs unitaires de π_f est fini et vaut $\prod_{k=1}^N (\alpha_i + 1)$.

Ainsi l'ensemble $\{\pi_{f,x} \mid x \in E\}$ est fini de cardinal noté r où $r \in \llbracket 1, \prod_{k=1}^N (\alpha_i + 1) \rrbracket$

On peut donc choisir $u_1, \dots, u_r \in E$, tel que $\{\pi_{f,x} \mid x \in E\} = \{\pi_{f,u_i} \mid i \in \llbracket 1, r \rrbracket\}$

Ainsi $E = \bigcup_{i=1}^r \ker(\pi_{f,u_i}(f))$ car $\forall x \in E, x \in \ker(\pi_{f,x}(f))$

La question 24 nous fournit $i_0 \in \llbracket 1, r \rrbracket$ tel que $\ker(\pi_{f,u_{i_0}}(f)) = E$

On note $x_1 = u_{i_0}$ et on a $\ker(\pi_{f,x_1}(f)) = E$

On remarque que $\pi_{f,x_1}(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ donc $\pi_f | \pi_{f,x_1}$

ou $\pi_{f,x_1} | \pi_f$ et ce sont des polynômes unitaires

donc $\pi_{f,x_1} = \pi_f$ Finalement

$$\forall P \in \mathbb{K}[X], P(f)(x_1) = 0 \iff \pi_f | P$$

en faisant comme en 19, on montre que $(x_1, f(x_1), \dots, f^{d-1}(x_1))$ est libre

Q₂₆. En faisant comme en 9, on montre que $\boxed{E_1 \text{ est stable par } f}$

De plus, on a $E_1 = \{P(f)(x_1) / P \in \mathbb{K}_{d-1}[X]\} \subset \{P(f)(x_1) / P \in \mathbb{K}[X]\}$

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Comme $\pi_f \neq 0$,

le théorème de la division euclidienne nous fournit Q et $R \in \mathbb{K}[X]$ tels que $\begin{cases} P = Q\pi_f + R \\ \deg(R) < d = \deg(\pi_f) \end{cases}$

On a alors $P(f)(x_1) = [Q(f) \circ \pi_f(f)](x_1) + R(f)(x_1) = R(f)(x_1) \in \{T(f)(x_1) / T \in \mathbb{K}_{d-1}[X]\}$

On conclut que $\boxed{E_1 = \{P(f)(x_1) / P \in \mathbb{K}[X]\}}$

Q₂₇. D'après ce qui précède $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_d)$ est une base de E_1 .

De plus on a $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\psi_1) = C_{\pi_f}$ matrice compagnon du π_f polynôme unitaire de degré $d = \dim(E_1)$

alors d'après Q₅, $\boxed{\psi_1 \text{ est cyclique}}$

Q₂₈. Pour $i \in \mathbb{N}$, on note $F_i = \text{Ker}(\Phi \circ f^i)$ ainsi $F = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} F_i$ est bien un sous-espace de E

De plus, on a pour $i \geq 1$, $f(F_i) \subset F_{i-1}$ donc

$$f(F) \subset f\left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}^*} F_i\right) \subset \bigcap_{i \in \mathbb{N}^*} f(F_i) \subset \bigcap_{i \in \mathbb{N}^*} F_{i-1} = F$$

d'où $\boxed{F \text{ est stable par } f}$

Soit $u \in E_1 \cap F$.

Comme $u \in E_1$, cela nous fournit $\lambda_1, \dots, \lambda_d \in \mathbb{K}$ tels que $u = \sum_{k=1}^d \lambda_k e_k$

or $\Phi(x) = \lambda_d$ et $\Phi(f^0(x)) = 0$ car $u \in F$, donc $\lambda_d = 0$ d'où $u = \sum_{k=1}^{d-1} \lambda_k e_k$

puis $f(u) = \sum_{k=1}^{d-1} \lambda_k e_{k+1}$ et donc $\lambda_{d-1} = 0$ et $f(u) = \sum_{k=1}^{d-2} \lambda_k e_{k+1}$

En réitérant le procédé, on trouve $\lambda_{d-2} = \dots = \lambda_1 = 0$

donc $u = 0$

L'autre inclusion étant évidente, on a $E_1 \cap F = \{0\}$ d'où $\boxed{E_1 \text{ et } F \text{ sont en somme directe}}$

Q₂₉. on note Ψ_1 l'application linéaire induite par Ψ entre E_1 et $\mathbb{K}^d$.

Soit $x \in \text{Ker}(\Psi_1)$.

On a $x \in E_1$ et $\Phi(x) = \Phi(f(x)) = \dots = \Phi(f^{d-1}(x)) = 0$.

En faisant comme à la question précédente, on obtient $x = 0$

L'autre inclusion étant évidente, on a $\text{Ker}(\Psi_1) = \{0\}$

Ainsi Ψ_1 est une application linéaire injective entre E_1 et $\mathbb{K}^d$ or $\dim(E_1) = d = \dim(\mathbb{K}^d)$

En utilisant le théorème du rang, on obtient que Ψ_1 est surjective puis bijective

Ainsi $\boxed{\Psi \text{ induit un isomorphisme entre } E_1 \text{ et } \mathbb{K}^d}$

Q₃₀. De la question précédente, on montre que Ψ est surjective de E vers $\mathbb{K}^d$ et que $\ker(\Psi) \cap E_1 = \{0\}$.

Ainsi $\dim(E_1) = d = \text{rg}(\Psi)$ et $\dim(E) = \dim(\ker(\Psi)) + \text{rg}(\Psi) = \dim(\ker(\Psi)) + \dim(E_1)$

donc $E = E_1 \oplus \text{Ker}(\Psi)$

On a $\text{Ker} \Psi = \bigcap_{i=0}^{d-1} F_i$ (les F_i sont introduits en 28) on a donc $F \subset \text{Ker} \Psi$

Soit $x \in \text{Ker}(\Psi)$. Montrons que $x \in F$

Soit $i \in \mathbb{N}$. Il suffit d'établir que $\Phi(f^i(x)) = 0$

Le théorème de la division euclidienne nous fournit Q et $R \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\deg(R) < d$ et $X^i = Q\pi_f + R$.

On peut écrire $R = \sum_{k=0}^{d-1} a_k X^k$. On a comme en 26 et car Φ est linéaire

$$\Phi(f^i(x)) = \Phi(0) + \Phi(R(f)(x)) = 0 + \sum_{k=0}^{d-1} a_k \Phi(f^k(x)) = 0$$

ainsi $F \supset \text{Ker } \Psi$ d'où $F = \text{Ker } \Psi$

on conclut que $\boxed{E = E_1 \oplus F}$

Q₃₁. Préambule : Avant de commencer la construction par récurrence, on remarque que dans ce qui précède le polynôme minimal de f est celui de ψ_1 et donc que $\forall x \in F, \pi_{\psi_1}(f)(x) = 0$

Initialisation : On prend E_1, F et ψ_1 comme ci dessus.

On a E_1 stable par F et ψ_1 cyclique.

On pose $P_1 = \pi_f = \pi_{\psi_1}$, $G_1 = F$ de sorte que $E_1 \oplus G_1 = E$

On a $\forall x \in G_1, P_1(f)(x) = 0$

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

On suppose avoir l'existence de k sous-espaces vectoriels de E , notés $E_1, \dots, E_k$ et G_k tous stables par f , tels que

- $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_k \oplus G_k$;
- pour tout $1 \leq i \leq k$, l'endomorphisme ψ_k induit par f sur le sous-espace vectoriel E_i est cyclique ;
- si on note P_i le polynôme minimal de ψ_i , alors P_{i+1} divise P_i pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq k-1$
- $\forall x \in G_k, P_k(f)(x) = 0$

Si $\dim G_k = 0$, on s'arrête et on pose $r = k$

Sinon, on applique 24 à 30 à l'endomorphisme induit par f sur G_k

On obtient alors E_{k+1}, G_{k+1} sous espaces stables par f et le polynôme P_{k+1} tels que

- $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_{k+1} \oplus G_{k+1}$;
- l'endomorphisme ψ_{k+1} induit par f sur le sous-espace vectoriel E_{k+1} est cyclique ;
- si on note P_{k+1} le polynôme minimal de ψ_{k+1} , alors P_{k+1} divise P_k
- $\forall x \in G_{k+1}, P_{k+1}(f)(x) = 0$

On a ainsi la construction voulue au rang k .

Conclusion : Cette construction algorithmique s'arrête car à chaque étape $\dim(E_k) \leq 1$ et donc $r \leq \dim(E)$. car $(\dim G_k)_k$ est une suite à valeurs dans $\mathbb{N}$ strictement décroissante.

On obtient ainsi le résultat voulu.

On en déduit qu'il existe r sous-espaces vectoriels de E , notés $E_1, \dots, E_r$, tous stables par f , tels que :

- $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_r$;
- pour tout $1 \leq i \leq r$, l'endomorphisme ψ_i induit par f sur le sous-espace vectoriel E_i est cyclique ;
- si on note P_i le polynôme minimal de ψ_i , alors P_{i+1} divise P_i pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq r-1$.

III.C. Commutant d'un endomorphisme quelconque

Q₃₂. On reprends les notations de la questions précédente pour la décomposition de Frobenius de f .

on note Λ l'application telle que pour $(g_1, \dots, g_r) \in \mathcal{L}(E_1) \times \dots \times \mathcal{L}(E_r)$, on a $\Lambda(g_1, \dots, g_r)$ défini sur E par

$$\Lambda(g_1, \dots, g_r)(x) = g_1(x_1) + \dots + g_r(x_r) \text{ où } x = \sum_{k=1}^r x_k \text{ et les } x_k \in E_k$$

Ainsi définie, Λ est linéaire de $\mathcal{L}(E_1) \times \dots \times \mathcal{L}(E_r)$ à valeurs dans $\mathcal{L}(E)$

De plus on montre facilement que Λ est injective et que $\Lambda(C(\psi_1) \times \dots \times C(\psi_r)) \subset C(f)$

Ainsi $\dim(C(f)) \geq \dim(C(\psi_1) \times \dots \times C(\psi_r)) = \dim(C(\psi_1)) + \dots + \dim(C(\psi_r))$

or pour $i \in [1, r]$, en notant $n_i = \dim E_i$ on a $C(\psi_i) = \text{Vect}(\psi_i^0, \psi_i^1, \dots, \psi_i^{n_i-1})$ d'après **Q₂₃** du **III.A**

Comme ψ_i est cyclique alors $(\psi_i^0, \psi_i^1, \dots, \psi_i^{n_i-1})$ est libre d'après **Q₇**

donc $\dim(C(\psi_i)) = n_i = \dim(E_i)$ d'où

$$\dim(C(\psi_1)) + \dots + \dim(C(\psi_r)) = \dim(E_1) + \dots + \dim(E_r) = \dim(E_1 \oplus \dots \oplus E_r) = \dim(E) = n$$

Ainsi la dimension de $C(f)$ est supérieure ou égale à n

Q₃₃. On note $d = \deg(\pi_f)$. D'après le cours, on a $\dim(\mathbb{K}[f]) = d$

or $\mathbb{K}[f] = C(f)$ et $\dim C(f) \geq n$ donc $d \geq n$.

Or on a $\pi_f | \chi_f$ comme conséquence de Cayley-Hamilton ainsi $d \leq n$

donc $d = n$

Or en reprenant les notations précédentes, on a $\dim(E_1) = d = n$

Donc $E_1 = E$ et $\psi_1 = f$ or ψ_1 est cyclique

ainsi f est cyclique

IV. Endomorphismes orthocycliques

IV.A. Isométries vectorielles orthocycliques

Q₃₄. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, la matrice $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ est semblable à la matrice $R(-\theta)$ (géométriquement en échangeant les deux vecteurs de la base orthonormée ce qui change l'orientation du plan).

Si $\theta \equiv 0 [2\pi]$, alors $R(\theta) = I_2$.

Si $\theta \equiv \pi [2\pi]$, alors $R(\theta) = -I_2$.

Si $\theta \not\equiv 0 [\pi]$, alors il existe $\theta' \in]0, \pi[$ tel que $R(\theta')$ soit semblable à $R(\theta')$.

D'après le cours sur la réduction des automorphismes orthogonaux, il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$, p, q et $r \in \mathbb{N}$ et $\theta_1, \dots, \theta_r \in]0, \pi[$ tels que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit diagonale par blocs de la forme : $\text{diag}(I_p, -I_q, R(\theta_1), \dots, R(\theta_r))$.

On remarque que $p + q + 2r = n = \dim(E)$

$$\text{et } \chi_{R(\theta)} = X^2 - \text{tr}(R(\theta)) + \det(R(\theta)) = X^2 - 2\cos(\theta) + 1 = (X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta})$$

$$\text{on a ainsi } \chi_f = \chi_{I_p} \times \chi_{(-I_q)} \times \chi_{R(\theta_1)} \times \dots \times \chi_{R(\theta_r)} = (X - 1)^p (X + 1)^q \prod_{i=1}^r (X - e^{i\theta_i})(X - e^{-i\theta_i})$$

Quitte à réordonner les vecteurs de la base, on peut supposer que $0 < \theta_1 \leq \theta_2 \leq \dots \leq \theta_r < \pi$

ainsi p est la multiplicité de 1, q est la multiplicité de -1 dans χ_f et les $\theta_1, \dots, \theta_r$ sont donnés dans l'ordre par les racines non réelles de χ_f

Ainsi comme $\chi_f = \chi_{f'}$, on pourra trouver $\mathcal{B}'$ base orthonormée telle que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(f')$ ait la même forme diagonale par blocs.

ainsi il existe des bases orthonormales $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de E telles que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(f')$

Q₃₅. $\implies$: On suppose que f est orthocyclique.

Ceci nous fournit $Q = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0 \in \mathbb{R}[X]$ et $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E tels que

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = C_Q = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} = (C_1 | \dots | C_n)$$

où $C_1, \dots, C_n$ désigne les colonnes de la matrice.

Comme $f \in O(E)$, $\mathcal{B}$ est orthonormée, alors $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) \in O(n)$

d'où $(C_1, \dots, C_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$

donc pour $1 \leq i \leq n-1$, on a $C_i \perp C_n$ et donc $0 = \langle C_i, C_n \rangle = -a_i$ et $1 = \langle C_n, C_n \rangle = a_0^2$

$$\text{ainsi } a_0 \in \{-1, 1\} \text{ et } \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = C_Q = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi d'après **Q₃**, on a $\chi_f \in \{X^n - 1, X^n + 1\}$

$\Leftarrow$: On suppose que $\chi_f = X^n - 1$ ou $\chi_f = X^n + 1$.

Premier cas : $\chi_f = X^n - 1$ et n pair On a donc $\chi_f = \prod_{z \in \mathbb{U}_n} (X - z)$ scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$.

on pose $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $2m = n$ et $\theta_k = \frac{2k\pi}{n}$ pour $k \in \mathbb{Z}$.

$$\text{On a donc } \chi_f = \prod_{k=-m+1}^m (X - e^{2ik\pi/n}) = (X-1)(X+1) \prod_{k=1}^{m-1} \left(X^2 - \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)X + 1 \right)$$

D'après la question précédente, on peut trouver une base orthonormée : $\mathcal{B} = (e_0, e_1, e'_1, \dots, e_{m-1}, e'_{m-1}, e_m)$ telle que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \text{diag}(1, R(\theta_1), \dots, R(\theta_{m-1}), -1)$.

Dans la question 34, la base aurait été $(e_0, e_m, e_1, e'_1, \dots, e_{m-1}, e'_{m-1})$

on note $\mathcal{P}_0 = E_1(f) = \text{Vect}(e_0)$; $\mathcal{P}_m = E_{-1}(f) = \text{Vect}(e_m)$ et $\mathcal{P}_k = \text{Vect}(e_k, e'_k)$.

Ces sous espaces sont tous stables par f et $E = \bigoplus_{0 \leq k \leq m}^{\perp} \mathcal{P}_k$ (*)

Ainsi pour $u_j \in \mathcal{P}_j$ et $u_\ell \in \mathcal{P}_\ell$, on a $(u_j | f^i(u_\ell)) = 0$ où $j \neq \ell$ dans $\llbracket 0, m \rrbracket$ et $i \in \mathbb{N}$

Soit $k \in \llbracket 1, m-1 \rrbracket$.

f induit sur le plan $\mathcal{P}_k$ orienté par sa base orthonormée $\mathcal{B}_k = (e_k, e'_k)$ une rotation d'angle θ_k .

Ainsi pour $j \in \mathbb{N}$, f^j induit sur $\mathcal{P}_k$ orienté par $\mathcal{B}_k$, une rotation d'angle $j\theta_k$.

donc $(f^j(e_k)|e_k) = \cos(j\theta_k) = \cos(j\theta_{-k})$ car e_k est un vecteur unitaire du plan et $\cos$ est paire

Pour $k = 0$, on a $(f^j(e_0)|e_0) = (1^j e_0|e_0) = \|e_0\|^2 = 1 = \cos(j\theta_0)$

Pour $k = m$, on a $(f^j(e_m)|e_m) = ((-1)^j e_m|e_m) = (-1)^j \|e_m\|^2 = \cos(j\pi) = \cos(j\theta_m)$

Ainsi $\forall k \in \llbracket 0, m \rrbracket$, $(f^j(e_k)|e_k) = \cos(j\theta_k)$ (★★)

on pose $x_0 = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(e_0 + e_m + \sqrt{2} \sum_{k=1}^{m-1} e_k \right)$ de sorte que $\|x_0\| = \sqrt{\frac{1^2 + \sum_{k=1}^{m-1} \sqrt{2}^2 + (-1)^2}{n}} = 1$.

Comme $f \in \mathcal{O}(\mathbb{E})$, on a $\forall j \in \mathbb{N}$, $\|f^j(x_0)\| = 1$

Soit $j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. D'après (★) et (★★), on a :

$$(x_0|f^j(x_0)) = \frac{1}{n} \left((e_0|f^j(e_0)) + (e_m|f^j(e_m)) + \sum_{k=1}^{m-1} 2(e_k|f^j(e_k)) \right) = \frac{1}{n} \sum_{k=-m+1}^m \cos(j\theta_k)$$

$$\text{Or } \sum_{k=-m+1}^m \cos(j\theta_k) = \sum_{k=-m+1}^m \operatorname{Re} \left(\exp \left(\frac{jk i 2\pi}{n} \right) \right) = \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{ji 2\pi/n} \right)^k \right)$$

Comme $0 < 1 \leq j \leq n-1 < n$, alors $e^{ji 2\pi/n} \neq 1$ et on reconnaît une somme géométrique.

$$\text{D'où : } \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{ji 2\pi/n} \right)^k = \frac{1 - (e^{ji 2\pi/n})^n}{1 - e^{ji 2\pi/n}} = 0$$

ainsi $(x_0|f^j(x_0)) = 0$

Pour $0 \leq j < \ell \leq n-1$, on a alors $1 \leq \ell - j \leq n-1$

et donc comme $f \in \mathcal{O}(\mathbb{E})$, on a $(f^j(x_0)|f^\ell(x_0)) = (x_0|f^{\ell-j}(x_0)) = 0$

ainsi $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est une base orthonormée de $\mathbb{E}$ ce qui permet de conclure.

Deuxième cas : $\chi_f = X^n - 1$ et n impair

Alors les calculs sont analogues au cas précédent ce qui change est que -1 n'est pas valeur propre de f

mais on a encore $\operatorname{Re} \left(\sum_{z \in \mathbb{U}_n} z^j \right) = 0$ pour tout $j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$

Troisième cas : $\chi_f = X^n + 1$: On remarque que $\forall z \in \mathbb{C}, z^n + 1 = 0 \iff (z^n - 1 \neq 0 \text{ et } z^{2n} - 1 = 0)$

Ainsi pour $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, on a $\sum_{\substack{z \in \mathbb{C} \\ z^n + 1 = 0}} z^k = \sum_{z \in \mathbb{U}_{2n}} z^k - \sum_{z \in \mathbb{U}_n} z^k = 0 - 0 = 0$

Ce qui permet de conclure de manière analogue aux cas précédents.

On en déduit que : f est orthocyclique si et seulement si $\chi_f = X^n - 1$ ou $\chi_f = X^n + 1$

IV.B. Endomorphismes nilpotents orthocycliques

Q₃₆. Comme f est nilpotent, le cours nous fournit une base $\mathcal{B}_s = (e_1^s, \dots, e_n^s)$ telle que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_s}(f)$ soit triangulaire supérieure.

On applique le procédé de Gram-Schmidt à $\mathcal{B}_s$ pour obtenir une base orthonormale $\mathcal{B}_o = (\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n)$ et en notant la matrice de passage P de $\mathcal{B}_s$ à $\mathcal{B}_o$ est triangulaire supérieure ainsi que P^{-1} .

Comme le sous-espace des matrices triangulaires supérieures est stable par produit ;

alors la matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_o}(f) = P^{-1}\mathcal{M}_{\mathcal{B}_s}(f)P$ est triangulaire supérieure.

Alors en notant $\mathcal{B}_i = (\epsilon_n, \dots, \epsilon_2, \epsilon_1)$, on a $\mathcal{B}_i$ base orthonormale de E et $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_i}(f)$ triangulaire inférieure ainsi il existe une base orthonormale de E dans laquelle la matrice de f est triangulaire inférieure

Q₃₇. $\Leftarrow$: On suppose que f est de rang $n - 1$ et que $\forall x, y \in (\ker f)^\perp$, $(f(x)|f(y)) = (x|y)$.

La question précédente nous fournit une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ tel que $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$ soit triangulaire inférieure.

on note $A = (C_1 | \dots | C_n)$ en colonnes.

Comme f est nilpotente, alors $\chi_f = X^n$ d'après le cours

donc la matrice est triangulaire strictement inférieure (diagonale nulle)

ainsi $e_n \in \ker f \setminus \{0\}$ et comme $\dim(\ker f) = n - \text{rg}(f) = 1$,

on a $\ker f = \text{Vect}(e_n)$ et $\ker(f)^\perp = \{e_n\}^\perp = \text{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1})$ car $\mathcal{B}$ est orthonormée

Ainsi pour tout $i, j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, par calcul dans une base orthonormée on a :

$$\langle C_i, C_j \rangle = (f(e_i)|f(e_j)) = (e_i|e_j) = \delta_{i,j} \text{ (symbole de Kronecker)}$$

donc si $1 \leq i < j \leq n-1$, on a $\langle C_i, C_j \rangle = 0$ et $\langle C_i, C_i \rangle = \langle C_j, C_j \rangle = 1$

$$\text{On a donc } C_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } C_{n-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ a_{n-1} \end{pmatrix} \text{ avec } a_{n-1} \in \{-1, 1\} \text{ car } a_{n-1}^2 = \langle C_{n-1}, C_{n-1} \rangle = 1$$

$$\text{On trouve ensuite } C_{n-2} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ a_{n-2} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ avec } a_{n-1} \in \{-1, 1\} \text{ car } \langle C_{n-2}, C_{n-1} \rangle = 0 \text{ et } \langle C_{n-2}, C_{n-2} \rangle = 1$$

$$\text{En procédant de même, on obtient } A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ a_1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & \ddots & & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \text{ où les } a_i \in \{-1, 1\}$$

La base $\mathcal{B}' = (e_1, a_1 e_2, a_1 a_2 e_3, \dots, \prod_{i=0}^{n-2} a_i e_{n-1}, \prod_{i=0}^{n-1} a_i e_n)$ est orthonormée et $\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(f) = C_{X^n}$.

Ainsi f est orthocyclique.

$\Rightarrow$: On suppose que f est orthocyclique.

Comme f est cyclique et nilpotent, on a $\pi_f = \chi_f = X^n$ d'après **Q₁₂**

Comme f est orthocyclique,

cela nous fournit une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ telle que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = C_Q$.

Comme $X^n = \chi_f = \chi_{C_Q} = Q$, on a $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = C_{X^n}$.

donc $\text{rg}(f) = \text{rg}(C_{X^n}) = n - 1$, $\text{Vect}(e_n) = \ker f$ et $\text{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1}) = (\ker f)^\perp$

et on vérifie facilement que $\forall x, y \in (\ker f)^\perp$, $(f(x)|f(y)) = (x|y)$ par calcul dans la base orthonormée $\mathcal{B}$