Exercice n°1 (CCINP-PC 25)

I Q31 $\bigcap_{k=1}^{n+1} B_k = \left(\bigcap_{k=1}^{n} B_k\right) \cap B_{n+1} \subset \bigcap_{k=1}^{n} B_k$

$\begin{pmatrix} 1\,Bl \\ 1\,R \end{pmatrix}$ $\to Bl$; $\leftarrow + u_k\, Bl.$

Si on a tiré une boule Blanche aux $(n+1)$ premiers tirages alors on a obtenu une boule Blanche aux n premiers d'un pt de vue évt : $\bigcap_{k=1}^{n+1} B_k \Rightarrow \bigcap_{k=1}^{n} B_k$

donc $P\left(\bigcap_{k=1}^{n+1} B_k\right) \leqslant P\left(\bigcap_{k=1}^{n} B_k\right)$ donc $p_{n+1} \leqslant p_n$

donc $\boxed{(p_n)_n \text{ est décroissante}}$ or $\forall n \quad p_n \geqslant 0$ donc

$(p_n)_n$ est minorée, donc $\boxed{(p_n)_n \text{ converge}}$

D'après le thm de continuité décroissante, en notant $A_n = \bigcap_{k=1}^{n} B_k$, on a $A_{n+1} \subset A_n$ donc $\lim_{n\to+\infty} P(A_n) = P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right)$

or $\bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcap_{k=1}^{n} B_k = \bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n = E$ donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} p_n = P(E)}$.

Q32 $\bigcap_{i=1}^{k} B_i$ signifie qu'on n'a tiré que des boules Blanches aux k premiers tirages, donc on a ajouté $u_1 + u_2 + \dots + u_k$ boules Bl. or il y en a une dans l'urne au départ, donc

$\boxed{\text{il y a } 1 + \sum_{i=1}^{k} u_i = S_k \text{ Blanches et } 1 \text{ Rouge dans l'urne avant le } (k+1)^{\text{ème}} \text{ tirage}}$ donc $\boxed{P\left(B_{k+1} \middle/ \bigcap_{i=1}^{k} B_i\right) = \frac{S_k}{1+S_k}}$

Q33 D'après la formule des proba composées :

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n} B_k\right) = P(B_1) \times P\left(B_2/B_1\right) \times P\left(B_3/B_1 \cap B_2\right) \times \dots \times P\left(B_n \middle/ \bigcap_{i=1}^{n-1} B_i\right)$$

$$\left(= P(B_1) \times \prod_{k=2}^{n} P\left(B_k \middle/ \bigcap_{i=1}^{k-1} B_i\right)\right) = \frac{1}{2} \times \prod_{k=1}^{n-1} P\left(B_{k+1} \middle/ \bigcap_{i=1}^{k} B_i\right)$$

donc $\boxed{p_n = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{S_k}{1+S_k}}$ car $\frac{S_0}{1+S_0} = \frac{1}{2}$.

II Q34 $S_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} u_k$ or $u_n \geqslant 1$ donc $(u_n)_n$ ne CV pas vers 0 donc la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ diverge or $\forall n \geqslant 1, u_n \geqslant 0$ donc $(S_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante or $(S_n)_n$ DV donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty}$

Rem : on peut poser $u_0 = 1$, ainsi S_n est exactement la somme partielle de la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$.

Q35 $\ln \frac{S_k}{S_k+1} = \ln \frac{S_k}{S_k + 1} = \ln \frac{1}{1+\frac{1}{S_k}} = -\ln\left(1+\frac{1}{S_k}\right)$

or $\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{S_k} = 0$ donc $\ln\left(\frac{S_k}{S_k+1}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{S_k}$ de signe constant

donc $\boxed{\sum \ln \frac{S_k}{S_k+1} \text{ et } \sum \frac{1}{S_k} \text{ sont de même nature}}$

(car $\sum -\frac{1}{S_k}$ et $\sum \frac{1}{S_k}$ sont de même nature).

Q36 On a vu que $P(E) = \lim p_n$ (: Q31)

donc $P(E) = \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{S_k}{S_k+1}$ (: Q33).

Si $\sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{S_k}$ DV alors $\sum_{k\geqslant 0} \ln \frac{S_k}{S_k+1}$ DV donc $(T_n)_n$ DV

en notant $T_n = \sum_{k=0}^{n} \ln \frac{S_k}{S_k+1}$ (somme partielle).

or $S_k \leqslant S_k + 1$ (et $S_k + 1 > 0$) donc $\frac{S_k}{S_k+1} \leqslant 1$.

donc $\ln \frac{S_k}{S_k+1} \leqslant 0$ donc $(T_n)_n$ est décroissante (en effet $T_{n+1} - T_n = \ln \frac{S_{n+1}}{S_{n+1}+1} \leqslant 0$, donc $T_{n+1} \leqslant T_n$).

or $(T_n)_n$ DV donc $\lim_{n\to+\infty} T_n = -\infty$ donc $\lim_{n\to+\infty} T_{n-1} = -\infty$

De plus $T_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \ln \frac{S_k}{S_k+1} = \ln\left(\prod_{k=0}^{n-1} \frac{S_k}{S_k+1}\right)$ donc

$\prod_{k=0}^{n-1} \frac{S_k}{S_k+1} = e^{T_{n-1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (car $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$) : $P(E) = 0$.

Réciproquement : si $P(E)=0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \prod\limits_{k=0}^{n-1} \frac{S_k}{S_k+1} = 0$ (voir notation dans l'implication), donc $\lim e^{T_{n-1}} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} T_{n-1} = -\infty$ car $T_{n-1} = \ln e^{T_{n-1}}$, donc $(T_n)_n$ DV donc $\sum \ln \frac{S_k}{S_k+1}$ DV donc $\sum \frac{1}{S_k}$ DV.

Conclusion : $\boxed{P(E)=0 \iff \sum \frac{1}{S_k} \text{ DV}}$

Q37 Si $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n=1$ alors $S_n = 1+\sum\limits_{k=1}^{n} 1 = 1+n$

donc $\frac{1}{S_n} = \frac{1}{1+n} \sim \frac{1}{n} \geqslant 0$ or $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ DV donc

$\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{S_n}$ DV donc $\boxed{P(E)=0}$ d'après Q36.

Q38 On cherche $u_n \geqslant 1$ tel que $\sum\limits_{k\geqslant 1} \frac{1}{S_k}$ CV. $\left\{ \frac{1}{S_k} \text{ doit tendre rapidement vers } 0 \right\}$.

Pour $n\geqslant 1$, on pose $\boxed{u_n = n}$ (et $u_0=1$)

alors $S_n = 1+\sum\limits_{k=1}^{n} k = 1+\frac{n(n+1)}{2} \sim \frac{n^2}{2}$

donc $\frac{1}{S_n} \sim \frac{2}{n^2} \geqslant 0$ or $\sum \frac{1}{n^2}$ CV donc

$\sum \frac{1}{S_n}$ CV donc $\boxed{P(E)\neq 0}$ d'après Q36.

F exercice 2

ENSAE

①

1°) a) Fait en cours !

b) idem.

2°) Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$

$\forall i \in [\![1, n]\!] \ \exists \lambda_i \in \mathbb{R} \mid u(e_i) = \lambda_i e_i$

(car $\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha e_i + \beta u(e_i) = 0$ et $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$

si β était nul on aurait $\alpha e_i = 0 \Rightarrow \alpha = 0$

Absurde donc $u(e_i) = \frac{-\alpha}{\beta} e_i$)

Montrons que $\lambda_i = \lambda_j \ \forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2 \ i \neq j$

soit $x = e_i + e_j$ on a : $x \neq 0$ donc $\exists \lambda \in \mathbb{R} \mid$

$u(e_i + e_j) = \lambda (e_i + e_j)$ (comme pour e_i)

$\Rightarrow u(e_i) + u(e_j) = \lambda e_i + \lambda e_j$

$\Rightarrow \lambda_i e_i + \lambda_j e_j = \lambda e_i + \lambda e_j$

$\Rightarrow \lambda_i = \lambda_j = \lambda$ ((e_i, e_j) libre)

Posons $\lambda = \lambda_1 \in \mathbb{R}$: $\forall i \in [\![1, n]\!] \ u(e_i) = \lambda e_i$

donc $\lambda Id_{\mathbb{R}^n}$ et u coïncide sur la base $(e_1, \dots, e_n)$ donc : $\boxed{u = \lambda Id_{\mathbb{R}^n}}$

②

3°) si u était une homothétie on aurait :

$\exists \lambda \in \mathbb{R} \mid \ u = \lambda Id_{\mathbb{R}^n} \Rightarrow Tr(u) = n\lambda = 0$

$\Rightarrow \lambda = 0$

$\Rightarrow u = 0$ absurde

donc u n'est pas une homothétie par le 2°) en contraposant :

$\exists x \in E \mid (u(x), x)$ libre.

de plus le théorème de la base incomplète assure l'existence de $u_3, \dots, u_n \in \mathbb{R}^n \mid$ $(x, u(x), u_3, \dots, u_n)$ soit une base de $\mathbb{R}^n$.

Posons $F = vect(u(x), u_3, \dots, u_n)$ on a :

$$\boxed{\begin{array}{l} F \text{ supplémentaire de } vect(x) \\ u(x) \in F \end{array}}$$

4°) $p \circ u_{/F}$ est clairement linéaire montrons qu'il est "endo" c'est-à-dire : $\forall x \in F \ p \circ u(x) \in F$.

$\forall x \in F \quad p \circ u(x) = p(u(x)) \in F$ car $Im\,p = F$

Reconsidérons la base $\mathcal{B} = (x, u(x), u_3, \dots, u_n)$ de $\mathbb{R}^n$

et posons $A = \Pi_{\mathcal{B}}(u) = (a_{ij}) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u(x) & u(u(x)) \dots & u(u_3) & u(u_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \end{pmatrix} \end{array}$ ③

$$u(u(x)) = a_{12}\,x + \underbrace{a_{22}\,u(x) + \sum_{i=3}^{n} a_{i2}\,u_i}_{\in F}$$

donc $\hat{p}\circ u(u(x)) = a_{22}\,u(x) + \sum_{i=3}^{n} a_{i2}\,u_i$

de même $\hat{p}\circ u(e_{i_0}) = a_{2i_0}\,u(x) + \sum_{i=3}^{n} a_{i,i_0}\,u_i$
$\forall i_0 \geq 3$

donc en posant $\mathcal{B}' = (u(x), e_3, \dots, e_n)$ base de F on a :

$$\Pi_{\mathcal{B}'}(\hat{p}\circ u) = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

d'où $\mathrm{Tr}(\hat{p}\circ u) = \sum_{i=2}^{n} a_{ii} = \mathrm{Tr}(u) - a_{11}$

Or $a_{11} = 0$ car $u(x) = 0.x + 1\,u(x) + 0 \dots + 0$

d'où $\boxed{\mathrm{Tr}(\hat{p}\circ u) = 0}$

5°) H_n : $\forall E$ $\mathbb{R}$-ev de dimension n, $\forall f \in \mathcal{L}(E)$
$\mathrm{Tr}(f) = 0 \Rightarrow \exists \mathcal{B}$ base de E \ $\Pi_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ * & & 0 \end{pmatrix}$

④

$\underline{n=1}$ oui ! $\mathrm{Tr}(f) = 0 \Rightarrow f = 0$

supposons vrai au rang $n-1$.

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ \ $\mathrm{Tr}(u) = 0$

d'après le 3°) et 5°) :

$\exists \mathcal{B} = (x, u(x), u_3, \dots, u_n)$ base de $\mathbb{R}^n$ \

$$\Pi_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & * \cdots & * \\ 1 & & \\ 0 & B & \\ \vdots & & \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

Avec les mêmes notations qu'au 3°) et 5°)

pour $E = F$ de dimension $n-1$ et $f = \hat{p}\circ u \in \mathcal{L}(F)$

d'après H_{n-1} $\exists \underbrace{(v_2, \dots, v_n)}_{\mathcal{B}'}$ base de F \

$$\Pi_{\mathcal{B}'}(\hat{p}\circ u) = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ * & & 0 \end{pmatrix} = C$$

d'où pour $\mathcal{B}_1 = (x, v_2, \dots, v_n)$ qui est bien une base (le vérifiez !) on a :

$$\Pi_{\mathcal{B}_1}(u) = \begin{pmatrix} 0 & * \cdots & * \\ 1 & & \\ 0 & C & \\ \vdots & & \\ 0 & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & * & \cdots & * \\ 1 & 0 & & * \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & * & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ * & & 0 \end{pmatrix}$$

d'où $\underline{H_n \text{ est vrai}}$

6°) * $\forall (M, M', \lambda) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 \times \mathbb{R}$ on a

$$\begin{cases} \varphi(M+M') = \varphi(M) + \varphi(M') & \text{(facile)} \\ \varphi(\lambda M) = \lambda \varphi(M) & \text{idem!} \end{cases}$$

donc φ linéaire

& $\boxed{\varphi \text{ endo. de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$

* Noyau

Soit $M = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \varphi(M) = 0$

$\Rightarrow MD = DM$

or $MD = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$\Rightarrow MD = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{11} & \cdots & \lambda_n a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 a_{n1} & & \lambda_n a_{nn} \end{pmatrix}$ i-ème colonne multipliée par λ_i

de m. $DM = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{11} & \cdots & \lambda_1 a_{1n} \\ \vdots & & \\ \lambda_n a_{n1} & \cdots & \lambda_n a_{nn} \end{pmatrix}$ i-ème ligne multipliée par λ_i

$MD = DM \Rightarrow \forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2 \quad \underset{(MD)}{\lambda_j a_{ij}} = \underset{(DM)}{\lambda_i a_{ij}}$

$\Rightarrow \forall i \neq j \quad a_{ij} = 0 \quad (\lambda_j \neq \lambda_i)$

donc $M = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$.

réciproquement toute matrice de ce type est dans le noyau donc :

$$\boxed{\operatorname{Ker}\varphi = \left\{ M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \setminus (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \right\}}$$

de +, : $\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{vect}(E_{11}, \dots, E_{nn})$

d'où $\boxed{\dim \operatorname{Ker}\varphi = n}$

7°) a) Soit $\varphi_1 : G \longrightarrow \operatorname{Im}\varphi$
$x \longmapsto \varphi(x)$ c'est encore du cours !

. φ_1 bien définie

. φ_1 linéaire

. $\varphi_1(x) = 0 \Rightarrow x \in \operatorname{Ker}\varphi \cap G = \{0\} \Rightarrow x = 0$

donc φ_1 injective

. soit $y \in \operatorname{Im}\varphi \quad \exists x_0 \in E \setminus y = \varphi(x_0)$

$x_0 = x + x'$ avec $x \in G$, $x' \in \operatorname{Ker}\varphi$

donc $y = \varphi_1(x)$ d'où φ_1 surjective

& $\boxed{\varphi_1 \text{ isomorphisme}}$

b) $\boxed{\dim \operatorname{Im}\varphi = \dim G = n^2 - n}$ (dém. du Th. du rang !)

c) soit $\mathcal{D} = \left\{ M = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ * & & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \right\}$

on a : * $\mathcal{D}$ sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (facile)

* $\operatorname{Im} \varphi \subset \mathcal{D}$:

$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $DM - MD = (c_{ij})$ avec :

$$c_{ij} = \alpha_i a_{ij} - a_{ij} \alpha_j$$

$\Rightarrow c_{ii} = 0 \Rightarrow DM - MD \in \mathcal{D}$

* $\dim \mathcal{D} = n^2 - n$ car :

$\mathcal{D} = \operatorname{vect}(E_{ij}, i \neq j)$

d'où $\boxed{\operatorname{Im} \varphi = \mathcal{D}}$

8°) soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'après 5°) :

$\exists P \in GL_n(\mathbb{R}) \mid A = P \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ * & & 0 \end{pmatrix}}_{A_1} P^{-1}$

notons $A_1 = P^{-1} A P$

On a $A_1 \in \operatorname{Im} \varphi$ donc : $\exists M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid$

$A_1 = MD - DM$

$\Rightarrow P^{-1} A P = MD - DM$

$\Rightarrow A = PMDP^{-1} - PDMP^{-1}$

$\Rightarrow A = (PMP^{-1})(PDP^{-1}) - (PDP^{-1})(PMP^{-1})$

$\Rightarrow \boxed{A = B \times C - C \times B}$

e3a MP 2017

exercice 4

1a)

```
def deplacement(L,a,b):# on considère que les seules
#valeurs de L sont 'E' ou 'N'
    if L=='N':
        return (a,b+1)
    else:
        return (a+1,b)
```

1b)

```
def chemin(m):
    n=len(m)
    X=n*[0]
    Y=n*[0]
    x=0;y=0
    for i in range(0,n):
        L=m[i]
        x,y=deplacement(L,x,y)
        # ou x=deplacement(L,x,y)[0] ;
# y=deplacement(L,x,y)[1]
        X[i]=x
        Y[i]=y
    return X,Y

# Exemple d'exécution  :
#In [2]: m=['N','E','E','N','E']
#In [3]: chemin(m)
#Out[3]: ([0, 1, 2, 2, 3], [1, 1, 1, 2, 2])
```

2 a) Ce nombre est 2^ℓ

b) Pour arriver à (3,2), il a fallu exactement 3 fois 'E' et 2 fois 'N'. Donc un chemin est donc une liste de 5 directions : 3 'E' et 2 'N'.

Exemple m = ['N','E','E','N','E']

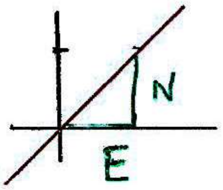
Il faut donc choisir 3 cases de m où l'on place les 'E' : il y en a $\binom{5}{3}$ possibilités, les autres cases sont automatiquement des 'N'.

d'où $\boxed{\text{le nombre de chemins est } \binom{5}{3} = \binom{5}{2} = 10}$

c) De manière identique :

$\boxed{\text{le nombre de chemins est } \binom{a+b}{a}}$

3) a)

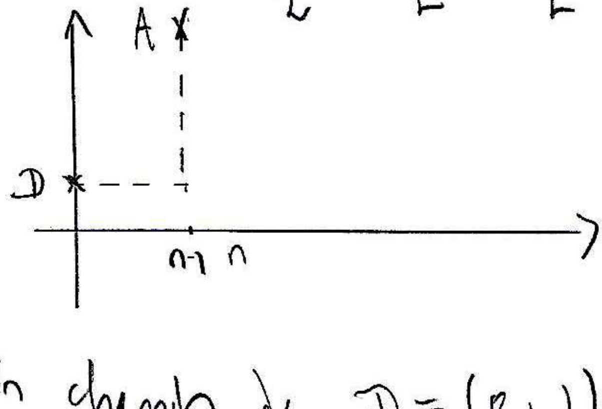


F.P.T.

$$P(U_1) = P(U_1/N_1)P(N_1) + P(U_1/E_1)P(E_1) \quad (N_1, E_1) \text{ S.C.E.}$$
$$= P(E_2)P(N_1) + P(N_2)P(E_1)$$
$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

d'où $\boxed{P(U_1) = \frac{1}{2}}$

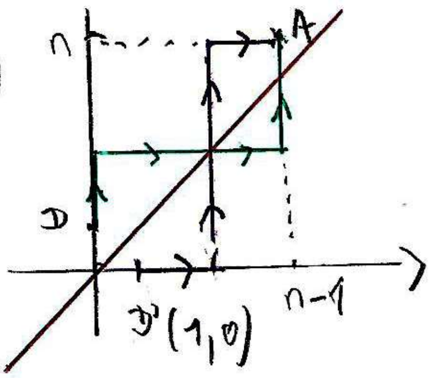
b)



Un chemin de $D = (0,1)$ à $A = (n-1, n)$ est constitué de $n-1$ 'E' et $n-1$ 'N', on conclut comme au 2c) :

d'où $\boxed{\left|C_{(0,1)}^{(n-1,n)}\right| = \binom{2n-2}{n-1}}$

c)



d'où : $\boxed{\text{le nombre de chemin de } D(0,1) \text{ à } A(n-1,n) \text{ coupant } \Delta / y=x \text{ est } \binom{2n-2}{n-2}}$

de D' à A : n-2 'E' et n 'N'

d) Or on a $C_{(0,1)}^{(n-1,n)} = T_{(0,1)}^{(n-1,n)} \amalg X$, avec $X = \overline{T_{(0,1)}^{(n-1,n)}}$

Or $|X| = \left|C_{(1,0)}^{(n-1,n)}\right|$

d'où $\boxed{\left|T_{(0,1)}^{(n-1,n)}\right| = \binom{2n-2}{n-1} - \binom{2n-2}{n-2}}$

e) Par symétrie on a la même valeur qu'au d)

f) Le fait que le chemin passe pour la 1re fois par (n,n) signifie que le chemin a k étapes avec $k \geq \underset{'E'}{n} + \underset{'N'}{n} = 2n$

Notons $\Omega_k = \{\text{chemin de } k \text{ étapes}\}$ muni de la proba. uniforme. Avec la 2 a) : $|\Omega_k| = 2^k$

Notons $A_k = \{\text{chemin de } k \text{ étapes passant pour la } 1^{\text{ère}} \text{ fois en } (n,n) \text{ sur } \Delta / y=x\}$

Soit $\mathscr{C}$ un chemin de A_k :

<u>1er cas</u> la 1ère étape est 'N', le chemin doit donc se rendre de $(0,1)$ à $(n-1,n)$ puis forcément aller en (n,n) puis de $2n+1$ à k : n'importe.

	N	N	--	--	--		------	E	E	E/N	...	E/N
étape	1	2						2n-1	2n			k
position	(0,1)	(0,2)						(n-1,n)	(n,n)			

2e cas : la 1ère étape est 'E', par symétrie c'est identique au 1er cas.

cqs $$P(U_n) = \frac{|A_k|}{|\Omega_k|} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{symétrie} \\ \text{1er et 2e cas}}}{2} \times \frac{\overbrace{\left(\binom{2n-2}{n-1}-\binom{2n-2}{n-2}\right)}^{\text{c'est le 3 b)}} \times 2^{k-2n}}{2^k}$$

aucune contrainte sur ces étapes

cqs $$\boxed{P(U_n) = \frac{2\left(\binom{2n-2}{n-1}-\binom{2n-2}{n-2}\right)}{2^{2n}}}$$

<u>rem</u> : indép. de k

D'où $$P(U_n) = \frac{1}{2^{2n-1}}\left(\frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!} - \frac{(2n-2)!}{n!(n-2)!}\right)$$

$$= \frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}n!(n-1)!}\left(n-(n-1)\right)$$

ie : $$\boxed{P(U_n) = \frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}n!(n-1)!}}$$

D'autre part : $\dfrac{1\overset{2}{\times}3\overset{4}{\times}5\times\cdots\times(2n-3)^{\,2n-2}}{2\times4\times\cdots\times 2n}$

$$= \frac{(2n-2)!}{(2\times4\times\cdots\times 2n-2)^2\times 2n}$$

$$= \frac{(2n-2)!}{2^{2(n-1)}((n-1)!)^2\times 2n} = \frac{(2n-1)!}{2^{2n-1}\,n!\,(n-1)!}$$

d'où $\boxed{P(V_n) = \dfrac{1\times3\times\cdots\times(2n-3)}{2\times4\times\cdots\times 2n}}$

4) a) $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{1\times3\times\cdots\times(2n-3)\times(2n-1)\times 2\times4\cdots\times 2n}{1\times3\times\cdots\times(2n-3)\times 2\times4\times\cdots\times(2n+2)}$

$$= \frac{2n-1}{2n+2} = \frac{1-\frac{1}{2n}}{1+\frac{2}{2n}}$$

$$= \left(1-\frac{1}{2n}\right)\left(1-\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$$= 1-\frac{3}{2}\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

donc $\ln\left(\dfrac{v_{n+1}}{v_n}\right) = \ln\left(1-\dfrac{3}{2n}+O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)$

$$= -\frac{3/2}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \qquad \text{d'où : } \boxed{a=-\frac{3}{2}}$$

b) <u>Rappel</u> si f C^0/mcx et $\searrow$ de $\mathbb{R}^+$ ds $\mathbb{R}^+$ alors la série $\left(\sum \int_{n-1}^{n} f(t)\,dt - f(n)\right)$ cvg on l'applique à $f(t) = \frac{1}{t+1}$ c'est ↘ sur $\mathbb{R}^+$

$$S_{N-1} = \sum_{n=1}^{N-1}\left(\int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t+1} - \frac{1}{n+1}\right) = \int_0^{N-1} \frac{dt}{t+1} - \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n}$$

$$= \ln N - \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n}$$

or $S_N \longrightarrow l$ (Σ cvg) cqs $\ln N - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} l-1$

d'où $\sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n} \underset{+\infty}{=} \ln N + 1 - l + o(1) - \underbrace{\frac{1}{N}}_{o(1)}$

d'où $\boxed{\sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n} = \ln N + \gamma + o(1)}$

Rem: on a le même résultat avec la CBSS appliquée à
$u_n = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n} - \ln N$

c) * $\sum_{n=1}^{N-1} \ln \frac{v_{n+1}}{v_n} = \sum_{n=1}^{N-1} \ln v_{n+1} - \ln v_n$ car $v_n > 0, \forall n$

$= \ln v_N - \ln v_1$ somme télescopique

* $\sum_{n=1}^{N-1} \ln \frac{v_{n+1}}{v_n} = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{-3/2}{n} + \sum_{n=1}^{N-1} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$= -\frac{3}{2}(\ln N + \gamma + o(1)) + S'_{N-1}$

Par TC, $\left(\Sigma\, O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$ cvg d'où $S'_N \longrightarrow l' \in \mathbb{R}$

On a donc avec ces 2 formules égales :

$$\ln v_N - \ln v_1 = -\frac{3}{2}\ln N + \gamma + 1' + o(1)$$

donc $\ln v_N + \frac{3}{2}\ln N \xrightarrow[N\to\infty]{} \lambda \in \mathbb{R}$

d'où $v_N \cdot N^{3/2} \longrightarrow e^{\lambda}$

d° $\boxed{\text{posons } k = e^{\lambda} > 0 \,, \quad v_N \sim \frac{k}{N^{3/2}}}$

<u>Rem</u> c'est un cas particulier de la règle de Raabe-Duhamel :

$$v_N \sim \frac{k}{N^{-a}}$$

d) $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2n-1}{2n+2}$

donc $(2n+1+1)\, v_{n+1} = (2n-1)\, v_n$

d'où $\boxed{v_{n+1} = (2n-1) v_n - (2n+1) v_{n+1}}$

$$\sum_{n=2}^{N-1} v_{n+1} = \sum_{n=2}^{N-1} (w_n - w_{n+1}) \quad \text{avec} \quad w_n = (2n-1) v_n$$

$$= w_2 - w_N \xrightarrow[N\to\infty]{} w_2 \quad \text{car} \quad w_N \sim \frac{k\, 2N}{N^{3/2}} \to 0$$

d'où $\sum_{n=1}^{\infty} P(U_n) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n = v_1 + v_2 + w_2$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{8}{8}$$

d° $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} P(U_n) = 1 \quad \text{d'où l'év}^t \coprod_{n\in\mathbb{N}} U_n \text{ est presque certain}}$

1.1.1) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $(U+\lambda V)^2 = U^2 + 2\lambda UV + \lambda^2 V^2 \geqslant 0$ possède un moment d'ordre 2 (car $0 \leqslant |UV| \leqslant U^2 + V^2$).

On en déduit par linéarité et positivité de l'espérance que :

$P(\lambda) = E(U^2) + 2\lambda E(UV) + \lambda^2 E(V^2) \geqslant 0$ est un polynôme positif pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

Comme V n'est pas presque surement nulle, $E(V^2) \neq 0$ et donc P est un polynôme du second degré positif sur $\mathbb{R}$. Son discriminant est donc négatif, ce qui donne : $4E(UV)^2 - 4E(U^2)E(V^2) \leqslant 0$ d'où on conclut :

conclusion: $\boxed{E(U^2)E(V^2) - E(UV)^2 \geqslant 0}$

L'égalité équivaut à la nullité du discriminant du polynôme P donc si et seulement s'il existe un $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $P(\lambda) = E(U+\lambda V)^2) = 0$: soit $(U+\lambda V)^2$ presque surement nulle et donc $U + \lambda V$ presque surement nulle.

conclusion:

$\boxed{E(U^2)E(V^2) - E(UV)^2 = 0 \text{ si et seulement si } \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } U+\lambda V \text{ presque surement nulle.}}$

1.1.2) a) Si X est bornée , $e^{\tau|X|}$ l'est aussi et donc admet une espérance finie d'où :

conclusion: $\boxed{\forall \tau > 0,\ X \text{ vérifie } (C_\tau)}$

1.1.2) b) D'après la formule de transfert, e^{tX} admet une espérance finie si et seulement si la série $\left(\sum e^{tk}\mathbf{P}(X=k)\right)$ est absolument convergente.

Comme $e^{tk}\mathbf{P}(X=k) = e^{tk}p(1-p)^{k-1} = \dfrac{p}{1-p}(e^t(1-p))^k$, la série géométrique $\left(\sum e^{tk}\mathbf{P}(X=k)\right)$ est convergente si et seulement si $|e^t(1-p)| < 1$ soit $t < \ln(\dfrac{1}{1-p}) = -\ln(1-p)$.

Dans ces cas, $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} e^{tk}\mathbf{P}(X=k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{p}{1-p}(e^t(1-p))^k = \frac{p}{1-p}\frac{e^t(1-p)}{1-e^t(1-p)}$.

conclusion: $\boxed{E(e^{tX}) < +\infty \text{ si et seulement si } t < -\ln(1-p) \text{ et dans ce cas } E(e^{tX}) = \dfrac{pe^t}{1-e^t(1-p)}}$

1.1.2) c) On fait comme au b) :

$e^{tk}\mathbf{P}(X=k) = e^{tk}e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\dfrac{(e^t\lambda)^k}{k!}$ est le terme d'une série exponentielle convergente d'où :

conclusion: $\boxed{E(e^{tX}) < +\infty \text{ pour tout } t \in \mathbb{R} \text{ et l'on a } E(e^{tX}) = e^{-\lambda}e^{e^t\lambda}}$

1.1.3) a)

$\forall t \in [a,b]$, $\forall \omega \in \Omega$: $a \leqslant t \leqslant b$ donc $aX(\omega) \leqslant tX(\omega) \leqslant bX(\omega)$ ou $bX(\omega) \leqslant tX(\omega) \leqslant aX(\omega)$, donc par croissance de l'exponentielle , on a : $e^{aX(\omega)} \leqslant e^{tX(\omega)} \leqslant e^{bX(\omega)}$ ou $e^{bX(\omega)} \leqslant e^{tX(\omega)} \leqslant e^{aX(\omega)}$.

On en déduit que $e^{tX(\omega)} \leqslant \max(e^{aX(\omega)}, e^{bX(\omega)}) \leqslant e^{aX(\omega)} + e^{bX(\omega)}$.

En conséquence, on a $\underline{0 \leqslant e^{tX} \leqslant e^{aX} + e^{bX}}$ et l'on conclut avec la propriété $(\mathcal{P})$: |X|< Y et Y admet une espérence fini => X aussi

conclusion: $\boxed{\forall t \in [a,b]\ ,\ E(e^{tX}) < +\infty}$

L'ensemble $\{t \in \mathbb{R} \text{ tel que } E(e^{tX}) < +\infty\}$ est **convexe** et donc c'est un **intervalle**.

1.1.3) b) $\forall y \in \mathbb{R}$: $\theta_{k,t,a,b}(y)$ existe (dénominateur strictement positif) et l'on a :

$\theta_{k,t,a,b}(y) = \dfrac{y^k e^{ty}}{e^{ay}(1+e^{(b-a)y})} = \dfrac{y^k e^{(t-a)y}}{1+e^{(b-a)y}}$. Comme $t-a>0$ et $b-a>0$, on en déduit que $\displaystyle\lim_{y\to-\infty} \theta_{k,t,a,b}(y) = \frac{0}{1+0} = 0$ par théorèmes généraux et croissances comparées.

On fait de même en $+\infty$, en mettant en facteur au dénominateur e^{by} d'où : $\displaystyle\lim_{y\to+\infty} \theta_{k,t,a,b}(y) = 0$.

On en déduit l'existence d'un réel $A > 0$ tel que

$\forall y > A$, $|\theta_{k,t,a,b}(y)| \leqslant 1$ et $\forall y < -A$, $|\theta_{k,t,a,b}(y)| \leqslant 1$.

Sur le segment $[-A, A]$, la fonction $\theta_{k,t,a,b}$ est continue (par théorèmes généraux) et donc par le théorème des bornes atteintes, il existe $M \geqslant 0$ tel que $\forall y \in [-A, A]$, $|\theta_{k,t,a,b}(y)| \leqslant M$.

En conséquence $\forall y \in \mathbb{R}$, $|\theta_{k,t,a,b}(y)| \leqslant \max(M, 1)$ et l'on peut conclure :

conclusion: $\boxed{\theta_{k,t,a,b} \text{ est bornée sur } \mathbb{R} \text{ et } \lim_{y\to\pm\infty} \theta_{k,t,a,b}(y) = 0}$

1.1.3) c) Avec les notations de la question ci-dessus, notons $M_0 = \max(M, 1)$.

On a donc $0 \leqslant |X^k|e^{tX} \leqslant M_0(e^{aX} + e^{bX})$.

On conclut encore une fois avec la propriété $(\mathcal{P})$:

conclusion: $\boxed{\forall t \in]a, b[\ ,\ E(|X^k|e^{tX}) < +\infty}$

1.1.3) d) $\forall t \in [c, d]$, on a : $0 \leqslant |y^k|e^{ty} \leqslant |y^k|(e^{cy} + e^{dy})$, donc :

$\forall t \in [c, d]$, $\forall y \in \mathbb{R}$, $|\theta_{k,t,a,b}(y)| \leqslant \dfrac{|y^k|(e^{cy} + e^{dy})}{(e^{ay} + e^{by})} = |\theta_{k,c,a,b}(y)| + |\theta_{k,d,a,b}(y)|$.

Comme les deux fonctions $\theta_{k,c,a,b}$ et $\theta_{k,d,a,b}$ sont bornées sur $\mathbb{R}$ (car $a < c < b$ et $a < d < b$), on conclut :

conclusion: $\boxed{\text{Il existe } M_{k,a,b,c,d} \in \mathbb{R}^+ \text{ tel que } \forall t \in [c, d],\ \forall y \in \mathbb{R},\ |\theta_{k,t,a,b}(y)| \leqslant M_{k,a,b,c,d}}$

1.1.4) a) On a montrer au **1.1.3) a)** que $I = \{t \in \mathbb{R} \text{ tel que } E(e^{tX}) < +\infty\}$ est un intervalle , de plus comme X vérifie C_r, $\forall t \in [-\tau, \tau] : 0 \leqslant e^{tX} \leqslant e^{|t|\cdot|X|} \leqslant e^{\tau|X|}$ et avec $(\mathcal{P})$, $t \in I$

conclusion: $\boxed{I = \{t \in \mathbb{R} \text{ tel que } E(e^{tX}) < +\infty\} \text{ est un intervalle et contient } [-\tau, \tau]}$

1.1.4) b) Si l'on pose $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$, on a

$\forall t \in I$, $\varphi_X(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{tx_k}\mathbf{P}(X = x_k)$ (formule de transfert). Par théorèmes généraux (somme finie), on peut conclure :

conclusion: $\boxed{\varphi_X \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } I = \mathbb{R}}$

1.1.4) c) $\forall t \in I$, $\varphi_X(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} p_n e^{tx_n}$ (formule de transfert).

Posons pour tout entier n : $u_n(t) = p_n e^{tx_n}$.

i) Par théorèmes généraux, u_n est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ donc continue sur I et de classe C^∞ sur l'intérieur de I et $\forall t \in \mathring{I}$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $u_n^{(k)}(t) = p_n x_n^k e^{tx_n}$.

ii) La série $(\sum u_n)$ converge simplement sur I car $\forall t \in I$ $E(e^{tX}) < +\infty$, donc par théorème de transfert, $(\sum u_n(t))$ converge absolument.

iii) $\forall t \in [a, b] \in I$, $|u_n(t)| = p_n e^{tx_n} \leqslant p_n(e^{ax_n} + e^{bx_n}) = \alpha_n$ et $(\sum \alpha_n)$ converge et de somme $E(e^{aX}) + E(e^{bX})$. On en déduit la convergence normale de $(\sum u_n)$ sur $[a, b]$ et donc la continuité de φ_X sur I.

iii) $\forall t \in [c, d] \in \mathring{I}$, il existe $(a, b) \in I^2$ tels que $a < c < d < b$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$,

$|u_n^{(k)}(t)| = p_n|x_n^k|e^{tx_n} \leqslant M_{k,a,b,c,d}(e^{ax_n} + e^{bx_n}) = \beta_n$ et $(\sum \beta_n)$ converge et de somme $M_{k,a,b,c,d}(E(e^{aX}) + E(e^{bX}))$. On en déduit la convergence normale de $(\sum u_n^{(k)})$ sur $[c, d]$.

On en déduit que φ_X est C^∞sur $\mathring{I}$. On conclut avec le théorème de dérivation des séries de fonctions :

conclusion: $\boxed{\varphi_X \text{ est continue sur } I \text{ et } C^\infty \text{sur } \mathring{I}.}$

1.1.4) d) Avec le théorème de dérivation des séries de fonctions, on a : $\forall k \in \mathbb{N}$ et $\forall t \in \mathring{I}$:

$\varphi_X^{(k)}(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x_n^k p_n e^{tx_n} = E(X^k e^{tX})$ (formule de transfert).

conclusion: $\boxed{\forall k \in \mathbb{N} \text{ et } \forall t \in \mathring{I} : \varphi_X^{(k)}(t) = E(X^k e^{tX})}$

1.1.4) e) (Erreur d'énoncé ψ_X n'est définie que sur $\mathring{I}$ et non sur I)

Comme $\varphi_X(t) > 0$ pour tout $t \in I$, comme quotient, la fonction ψ_X est de classe C^∞sur $\mathring{I}$.

On a $\forall t \in \mathring{I}$: $\psi'_X(t) = \dfrac{\varphi''_X(t)\varphi_X(t) - \varphi'_X(t)\varphi'_X(t)}{\varphi_X(t)^2} = \dfrac{E(X^2e^{tX})E(e^{tX}) - E(Xe^{tX})^2}{\varphi_X(t)^2}$.

Si on pose $U = Xe^{tX/2}$ et $V = e^{tX/2}$, alors $\psi'_X(t) = \dfrac{E(U^2)E(V^2) - E(UV)^2}{\varphi_X(t)^2} \geqslant 0$ avec le **1.1.1)** et comme V n'est pas presque surement nulle, $\psi'_X(t) = 0$ si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda V + U = 0$ presque surement et donc $X = -\lambda$ presque surement.

conclusion: $\boxed{\psi_X \text{ est croissante sur } \mathring{I} \text{ et strictement croissante sur } \mathring{I} \text{ si } X \text{ n'est pas constant p.s.}}$

1.2.1)

$\mathbf{P}\left(|S_n - nE(X)| \geqslant n\delta\right) = \mathbf{P}\left(|\frac{S_n}{n} - E(X)| \geqslant \delta\right)$, or $E(\frac{S_n}{n}) = E(X)$ (par linéarité de l'espérance) et comme X admet un moment d'ordre 2, $\frac{S_n}{n}$ aussi et par indépendance des X_i, $V(\frac{S_n}{n}) = \frac{1}{n^2}(V(X_1) + \cdots + V(X_n)) = \frac{V(X)}{n}$.

Il ne reste plus qu'à appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev pour conclure :

__conclusion__: $\boxed{\mathbf{P}\left(|S_n - nE(X)| \geqslant n\delta\right) \leqslant \frac{V(X)}{n\delta^2}}$

1.2.2) D'abord, on a $1 \geqslant \mathbf{P}\left(|S_n - nE(X)| < n\delta\right) = 1 - \mathbf{P}\left(|S_n - nE(X)| \geqslant n\delta\right) \geqslant 1 - \frac{V(X)}{n\delta^2}$, donc par théorème d'encadrement, $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(|S_n - nE(X)| < n\delta\right) = 1$.

Ensuite $|S_n - nE(X)| < n\delta \Longleftrightarrow nE(X) - n\delta < S_n < nE(X) + n\delta$.

On souhaiterais avoir $nE(X) + n\delta \leqslant nv$ et $nE(X) - n\delta \geqslant nu$, ce qui est possible si

$0 < \delta \leqslant v - E(X)$ et $0 < \delta \leqslant E(X) - u$.

Prenons donc $\delta = \min(E(X) - u, v - E(x)) > 0$, on a alors :

$|S_n - nE(X)| < n\delta \Longrightarrow nu \leqslant S_n \leqslant nv$ et donc $(|S_n - nE(X)| < n\delta) \subset (nu \leqslant S_n \leqslant nv)$

On en déduit que $\mathbf{P}\left(|S_n - nE(X)| < n\delta\right) \leqslant \mathbf{P}\left(nu \leqslant S_n \leqslant nv\right) \leqslant 1$ et l'on conclut par théorème d'encadrement :

__conclusion__: $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \pi_n = 1}$

1.3.1) On a $u_n = u_{mq+r} \geqslant u_{mq} + u_r$ et par récurrence sur q, $u_{mq} \geqslant qu_m$

__Conclusion__1 : $\boxed{u_n \geqslant qu_m + u_r}$

$u_n \geqslant qu_m + u_r \Longrightarrow u_n - ns \geqslant qu_m + u_r - ns = qu_m + u_r - qms - rs = q(u_m - ms) + u_r - rs$

__Conclusion__2 : $\boxed{u_n - ns \geqslant q(u_m - ms) + u_r - rs}$

1.3.2) On en déduit que $\forall n = mq_n + r_n > 0$, $\frac{u_n}{n} - s \geqslant \frac{q_n}{n}(u_m - ms) + \frac{u_{r_n} - r_n s}{n}$ donc on a $\frac{u_n}{n} \geqslant \frac{q_n}{n}u_m + s - \frac{q_n}{n}ms + \frac{u_{r_n} - r_n s}{n}$

Or on a $\frac{q_n}{n} = \frac{q_n}{mq_n + r_n} = \frac{1}{m + \frac{r_n}{q_n}}$ et pour $n > m(> r_n)$, on a $q_n = \frac{n - r_n}{m}$ donc $\frac{q_n}{n} = \frac{1}{m + \frac{r_n m}{n - r_n}}$.

Comme (r_n) est bornée (par 0 et m), que m est fixé, on a $\lim_{n\to+\infty} \frac{q_n}{n} = \frac{1}{m}$ et donc comme $(u_{r_n} - r_n s)$ est aussi bornée (ne prend qu'un nombre fini de valeurs), on en déduit que :

$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{q_n}{n}u_m + s - \frac{q_n}{n}ms + \frac{u_{r_n} - r_n s}{n}\right) = \frac{u_m}{m} + s - s + 0 = \frac{u_m}{m}$.

Pour $\varepsilon > 0$, il existe $N > r$ tel que $\forall n > N$: $\frac{q_n}{n}u_m + s - \frac{q_n}{n}ms + \frac{u_{r_n} - r_n s}{n} \geqslant \frac{u_m}{m} - \varepsilon$.

On peut donc conclure :

__conclusion__: $\boxed{\text{il existe } N > r \text{ tel que } \forall n > N : \frac{u_n}{n} \geqslant \frac{u_m}{m} - \varepsilon.}$

1.3.3) Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Comme $s = \sup\left\{\frac{u_n}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$, il existe $m_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{u_{m_0}}{m_0} \geqslant s - \varepsilon/2$. Pour ce m_0 avec la question ci-dessus, il existe $N > m_0$ tel que $\forall n > N$: $\frac{u_n}{n} \geqslant \frac{u_{m_0}}{m_0} - \varepsilon/2 \geqslant s - \varepsilon$, comme on a $\forall n > N$: $\frac{u_n}{n} \leqslant s$, on a donc $\forall n > N$: $s - \varepsilon \leqslant \frac{u_n}{n} \leqslant s$, on conclut :

__conclusion__: $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = s}$

2.1.1) Si tout les X_i sont supérieurs à a alors S_n est supérieur à na. Précisons :

$(X_1 \geqslant a) \cap \cdots \cap (X_n \geqslant a) \subset (S_n \geqslant na)$, donc $\mathbf{P}\left((X_1 \geqslant a) \cap \cdots \cap (X_n \geqslant a)\right) \leqslant \mathbf{P}\left(S_n \geqslant na\right)$, et par indépendance mutuelle des $X_i \sim X$, on a donc $\mathbf{P}\left(X_1 \geqslant a\right)^n \leqslant \mathbf{P}\left(S_n \geqslant na\right)$.

En conséquence si $\mathbf{P}\left(S_n \geqslant na\right) = 0$ alors $\mathbf{P}\left(X_1 \geqslant a\right)^n = 0$ et donc $\mathbf{P}\left(X_1 \geqslant a\right) = 0$

Réciproquement on a : $(S_n \geqslant na) \subset (X_1 \geqslant a) \cup \cdots \cup (X_n \geqslant a)$, d'où (par inégalité de Boole)

$\mathbf{P}\left(S_n \geqslant na\right) \leqslant \mathbf{P}\left((X_1 \geqslant a) \cup \cdots \cup (X_n \geqslant a)\right) \leqslant \mathbf{P}\left(X_1 \geqslant a\right) + \cdots + \mathbf{P}\left(X_n \geqslant a\right) = n\mathbf{P}\left(X \geqslant a\right)$.

En conséquence si $\mathbf{P}\left(X_1 \geqslant a\right) = 0$ alors $\mathbf{P}\left(S_n \geqslant na\right) = 0$.

conclusion: $\boxed{\mathbf{P}(X_1 \geqslant a) = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{P}(S_n \geqslant na) = 0}$

2.1.2) a) Posons $X(\Omega) = \{x_n\ ,\ n \in J \subset \mathbb{N}\}$ et $Y = \{x_1 + \cdots + x_n\ ,\ (x_1, \ldots, x_n) \in X(\Omega)^n\}$.

On a Y qui est dénombrable car $X(\Omega)^n$ est dénombrable. $\forall y \in Y$:

$$\mathbf{P}(S_{m+n} - S_m = y) = \mathbf{P}(X_{m+1} + \cdots + X_{m+n} = y)$$
$$= \sum_{(x_1,\ldots,x_n)\in X(\Omega)^n, x1+\cdots+x_n=y} \mathbf{P}(X_{m+1} = x_1, X_{m+2} = x_2, \ldots, X_{m+n-1} = x_{n-1}, X_{m+n} = x_n)$$
$$= \sum_{(x_1,\ldots,x_n)\in X(\Omega)^n, x_1+\cdots+x_n=y} \mathbf{P}(X_{m+1} = x_1) \cdots \mathbf{P}(X_{m+n} = x_n) \text{ (avec l'indépendance)}$$
$$= \sum_{(x_1,\ldots,x_n)\in X(\Omega)^n, x_1+\cdots+x_n=y} \mathbf{P}(X_1 = x_1) \cdots \mathbf{P}(X_n = x_n)$$
$$= \mathbf{P}(X_1 + \cdots + X_n = y)$$

conclusion: $\boxed{S_{m+n} - S_m \text{ et } S_n \text{ ont la même loi}}$

2.1.2) b)

$$\mathbf{P}(S_n \geqslant nb)\,\mathbf{P}(S_m \geqslant mb) = \mathbf{P}(S_{m+n} - S_m \geqslant nb)\,\mathbf{P}(S_n \geqslant nb)$$
$$= \mathbf{P}\left(\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k \geqslant nb\right)\mathbf{P}\left(\sum_{k=1}^{m} X_k \geqslant mb\right)$$

Par le lemme des coalitions, $\displaystyle\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} X_k$ sont indépendantes, donc

$$\mathbf{P}(S_n \geqslant nb)\,\mathbf{P}(S_m \geqslant mb) = \mathbf{P}\left(\left(\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k \geqslant nb\right) \cap \left(\sum_{k=1}^{m} X_k \geqslant mb\right)\right)$$

Comme $\displaystyle\left(\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k \geqslant nb\right) \cap \left(\sum_{k=1}^{m} X_k \geqslant mb\right) \subset \left(\sum_{k=1}^{m+n} X_k \geqslant nb + mb\right)$, on peut conclure :

conclusion: $\boxed{\mathbf{P}(S_n \geqslant nb)\,\mathbf{P}(S_m \geqslant mb) \leqslant \mathbf{P}(S_{n+m} \geqslant (n+m)b)}$

2.1.3) D'après le 2.1.1) et l'hypothèse, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(S_n \geqslant na) > 0$ et donc son logarithme est bien définie et donc la suite aussi.

Comme $\gamma_a = \sup\left\{\dfrac{u_n}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$, avec $u_n = \ln(\mathbf{P}(S_n \geqslant nb))$ qui est sur-additive (2.1.2), existe et $\gamma_a \leqslant \ln 1 = 0$, on conclut avec le **1.3.3)** et le **2.1.2)b)** que

$\boxed{\text{la suite } \left(\dfrac{\ln(\mathbf{P}(S_n \geqslant na))}{n}\right) \text{ converge vers } \gamma_a \leqslant 0}$,

enfin par croissance de l'exponentielle et par définition de la borne supérieure, on a

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*\ ,\ \mathbf{P}(S_n \geqslant na) \leqslant e^{n\gamma_a}}$.

2.2.1) $e^{tS_n} = e^{tX_1} \cdots e^{tX_n}$ et par lemme des coalitions $e^{tX_1}, \ldots, e^{tX_n}$ sont indépendantes et admettent une espérance finie car $t \in I$ donc $E(e^{tS_n}) = E(e^{tX})^n = \varphi_X(t)^n$.

Premier cas : $t > 0$

Pour l'inégalité, utilisons Markov : $(S_n \geqslant na) = (e^{tS_n} \geqslant e^{nta})$ car $t > 0$ et l'exponentielle croissante d'où $\mathbf{P}(S_n \geqslant na) \leqslant \dfrac{E(e^{tS_n})}{e^{nta}} = \dfrac{\varphi_X(t)^n}{e^{nta}}$.

Deuxième cas : $t = 0$

L'inégalité est triviale car $\dfrac{\varphi_X(t)^n}{e^{nta}} = 1/1 = 1$, on peut donc conclure

conclusion: $\boxed{\forall t \in I \cap \mathbb{R}^+\ ,\ E(e^{tS_n}) = \varphi_X(t)^n \text{ et } \mathbf{P}(S_n \geqslant na) \leqslant \dfrac{\varphi_X(t)^n}{e^{nta}}}$

2.2.2) a)

Passons au logarithme dans l'inégalité précédente (tout est strictement positif) :

$\ln\Big(\mathbf{P}(S_n \geqslant na)\Big) \leqslant n\ln(\varphi_X(t)) - nta$, d'où pour $n = 1$, $\ln\Big(\mathbf{P}(S_1 \geqslant a)\Big) \leqslant \ln(\varphi_X(t)) - ta = \chi(t)$ et comme $S_1 = X$,

conclusion: $\boxed{\chi \text{ est minorée par } \ln\Big(\mathbf{P}(X \geqslant a)\Big)}$

2.2.2) b) La fonction φ_X est dérivable en 0 car $0 \in \mathring{I}$ et $\varphi'_X(0) = E(X^0 e^{0X})$ (grâce au 1.1.4d)) On en déduit en 0 que $\chi(t) = \ln(\varphi_X(0) + \varphi'_X(0)t + o(t)) - a + o(t) = (E(X) - a)t + o(t)$. Comme $a > E(X)$, on a $E(X) - a < 0$ et donc $\chi(t) \sim_0 (E(X) - a)t$

On en déduit que localement en 0 $\chi(t)$ est du signe $(E(X)-a)t$ qui est strictement négatif en 0^+. On peut conclure :

conclusion: $\boxed{\chi(t) \sim_0 (E(X) - a)t \text{ et } \eta_a < 0}$

2.2.2) c) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in I \cap \mathbb{R}^+$, $\ln\Big(\mathbf{P}(S_n \geqslant na)\Big) \leqslant n\ln(\chi(t))$, donc $\dfrac{\ln\Big(\mathbf{P}(S_n \geqslant na)\Big)}{n}$ minore χ sur $\forall t \in I \cap \mathbb{R}^+$ et par propriété de la borne inférieure (plus grand des minorants), on a : $\dfrac{\ln\Big(\mathbf{P}(S_n \geqslant na)\Big)}{n} \leqslant \eta_a$, enfin on multiplie par n et l'on passe à l'exponentielle :

conclusion: $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbf{P}(S_n \geqslant na) \leqslant e^{n\eta_a}}$

Enfin $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{\ln\Big(\mathbf{P}(S_n \geqslant na)\Big)}{n} \leqslant \eta_a$ prouve aussi que η_a est un majorant de $\left\{\dfrac{u_n}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$ (toujours avec $u_n = \mathbf{P}(S_n \geqslant nb)$) et donc $\gamma_a \leqslant \eta_a < 0$

conclusion: $\boxed{\gamma_a < 0}$

2.2.2) d) i. Comme $X(\Omega) = \{0, 1\}$, $\mathbf{P}(X \geqslant a) > 0$ si et seulement si $a \leqslant 1$. Comme $E(X) = p$, on conclut :

conclusion: $\boxed{\text{l'ensemble des } a \text{ qui conviennent est l'intervalle }]p, 1]}$

Ensuite $\varphi_X(t) = pe^t + 1 - p$, donc $\chi(t) = \ln(pe^t + 1 - p) - at$, d'où $\chi'(t) = \dfrac{pe^t}{pe^t + 1 - p} - a$, $\chi'(t) = 0$ ssi $t = \ln\left(\dfrac{a(1-p)}{p(1-a)}\right) = c$ et χ est décroissante sur $[0, c]$ puis croissante sur $[c, +\infty[$.

On en déduit que $\eta_a = \chi(c) = \left(\dfrac{1-p}{1-a}\right) - a\ln\left(\dfrac{a(1-p)}{p(1-a)}\right)$

conclusion: $\boxed{\eta_a = \ln\left(\dfrac{1-p}{1-a}\right) - a\ln\left(\dfrac{a(1-p)}{p(1-a)}\right)}$

2.2.2) d) ii. Comme $X(\Omega) = \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(X \geqslant a) > 0$ et $E(X) = \lambda$, on conclut :

conclusion: $\boxed{\text{l'ensemble des } a \text{ qui conviennent est l'intervalle }]\lambda, +\infty[}$

Ensuite $\varphi_X(t) = E(e^{tX}) = e^{-\lambda}e^{e^t\lambda}$ (1.1.3a) donc $\chi(t) = \lambda(e^t - 1) - ta$, $\chi'(t) = \lambda e^t - a$, on obtient comme au i) :

conclusion: $\boxed{\eta_a = a - \lambda - a\ln(\dfrac{a}{\lambda})}$

2.3.1) a)

Par la formule de transfert $E(e^{tX})$ et , il vient immédiatement :

conclusion: $\boxed{\displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} \frac{e^{tX}}{E(e^{tX})}\mathbf{P}(X = x) = 1}$

2.3.1) b)

Étudions la série $(\sum x\mathbf{P}(X' = x))$: $x\mathbf{P}(X' = x) = x\dfrac{e^{tX}}{E(e^{tX})}\mathbf{P}(X = x)$ et cette famille est sommable de somme $\dfrac{E(Xe^{tX})}{E(e^{tX})}$, on conclut avec 1.1.4d)

conclusion: $\boxed{E(X') = \dfrac{\varphi'_X(t)}{\varphi_X(t)}}$

Avec le 1.1.4e) cette fonction de t est strictement croissante sur I.

D'autre part $\chi'(t) = \dfrac{\varphi'_X(t)}{\varphi_X(t)} - a$ et comme χ présente un extremum en σ intérieur à $I \cap \mathbb{R}^+$, on a $\chi'(\sigma) = 0$, soit $\dfrac{\varphi'_X(\sigma)}{\varphi_X(\sigma)} = a$, enfin comme $t > \sigma$, $\dfrac{\varphi'_X(t)}{\varphi_X(t)} > \dfrac{\varphi'_X(\sigma)}{\varphi_X(\sigma)}$ d'où on conclut :

conclusion: $\boxed{E(X') > a}$

2.3.2) a) $f(X'_1, \ldots, X'_n) = \mathbb{1}_A$ où $A = (na \leqslant X'_1 + \cdots + X'_n \leqslant nb)$. On en déduit que $E(f(X'_1, \ldots, X'_n)) = E(\mathbb{1}_A) = \mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(na \leqslant S'_n \leqslant nb) = \dfrac{E(f(X_1, \ldots, X_n)e^{tS_n})}{\varphi_X(t)^n}$

D'autre part, $f(X_1,\dots,X_n)e^{tS_n}=\mathbb{1}_B$ où $B=(na\leqslant X_1+\cdots+X_n=S_n\leqslant nb)=C\cap D$ avec $(na\leqslant S_n)$ et $D=(S_n\leqslant nb)$, comme $\mathbb{1}_B=\mathbb{1}_C\cdot\mathbb{1}_D$ et que $\mathbb{1}_D e^{tS_n}=\mathbb{1}_{(S_n\leqslant nb)}e^{ntb}\leqslant e^{ntb}$ (on a égalité si $S_n(\omega)\leqslant nb$ et sinon on a $0\leqslant e^{ntb}$).

On a donc $f(X_1,\dots,X_n)e^{tS_n}\leqslant \mathbb{1}_{(S_n\geqslant na)}e^{ntb}$ et par croissance , linéarité et espérance d'une fonction indicatrice : $E(f(X_1,\dots,X_n)e^{tS_n})\leqslant \mathbf{P}\left(S_n\geqslant na\right)e^{ntb}$, on conclut :

<u>**conclusion**</u>: $\boxed{\mathbf{P}\left(na\leqslant S'_n\leqslant nb\right)\leqslant \mathbf{P}\left(S_n\geqslant na\right)\dfrac{e^{ntb}}{\varphi_X(t)^n}}$

2.3.2) b) Le 1.2.2, donne $\pi'_n=\mathbf{P}\left(na\leqslant S'_n\leqslant nb\right)$ tend vers 1 à l'infini car $a<E(X')<b$.

De l'inégalité de la question précédente, on en déduit que

$\ln(\pi'_n)\leqslant \ln(\mathbf{P}\left(S_n\geqslant na\right))+ntb-n\ln(\varphi_X(t))$, ensuite on divise par n et l'on fait tendre n vers l'infini d'où on obtient : $0\leqslant\gamma_a+tb-\ln(\varphi_X(t))$.

On a donc $0\leqslant\gamma_a+tb-\chi(t)+ta$ d'où $\eta_a\leqslant\chi(t)\leqslant\gamma_a+t(b-a)$

Donc $\eta_a\leqslant\gamma_a+t(b-a)$

Soit $\varepsilon>0$, comme $a=\dfrac{\varphi'_X(\sigma)}{\varphi_X(\sigma)}$, par continuité de $\dfrac{\varphi'_X}{\varphi_X}$, on peut donc choisir $t>\sigma$ tel que $|\dfrac{\varphi'_X(t)}{\varphi_X(t)}-\dfrac{\varphi'_X(\sigma)}{\varphi_X(\sigma)}|\leqslant\varepsilon$, en prenant $b=\dfrac{\varphi'_X(t)}{\varphi_X(t)}+\varepsilon$, ona bien $b>\dfrac{\varphi'_X(t)}{\varphi_X(t)}$ et $0<b-a<2\varepsilon$. On a donc $\eta_a\leqslant\gamma_a+t(b-a)\leqslant\gamma_a+2t\varepsilon$, quitte à prendre un t plus petit, on peut supposer que $t\leqslant\sigma+1$, donc $\eta_a\leqslant\gamma_a+t(b-a)\leqslant\gamma_a+2(\sigma+1)\varepsilon$. En faisant tendre ε vers 0, on obtient $\eta_a\leqslant\gamma_a$.

Avec le 2.2.2)c), on avait $\gamma_a\leqslant\eta_a$. On peut donc conclure que

<u>**conclusion**</u>: $\boxed{\gamma_a=\eta_a}$

2.3.3) a) L'idée avec le coefficient binomial est de sommer des Bernoulli. Considérons des variables indépendantes X_n suivant toutes une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$.

Dans ce cas on a $X_n\sim\mathcal{B}(n,1/2)$.

On a alors $U_n=\displaystyle\sum_{k\in A_n}2^n\mathbf{P}\left(S_n=k\right)=2^n\mathbf{P}\left(S_n\in A_n\right)$

Or $(S_n\in A_n)=\Big(S_n\geqslant(\dfrac{1}{2}+\alpha)n\Big)\cup\Big(S_n\leqslant(\dfrac{1}{2}-\alpha)n\Big)$ (réunion disjointe)

D'autre part $k\leqslant(\dfrac{1}{2}-\alpha)n$ si et seulement si $n-k\geqslant(\dfrac{1}{2}+\alpha)n$.

On en déduit (comme $\dbinom{n}{k}=\dbinom{n}{n-k}$) que

$U_n=2^n\mathbf{P}\Big(S_n\geqslant(\dfrac{1}{2}+\alpha)n\Big)/2=2^{n-1}\mathbf{P}\Big(S_n\geqslant(\dfrac{1}{2}+\alpha)n\Big)$.

On a donc $\dfrac{1}{n}\ln U_n=\dfrac{n-1}{n}\ln 2+\dfrac{1}{n}\ln\Big(\mathbf{P}\Big(S_n\geqslant(\dfrac{1}{2}+\alpha)n\Big)\Big)$

Avec le 2.2.2d) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}\ln U_n=\ln 2+\Big(\dfrac{1-p}{1-a}\Big)-a\ln\Big(\dfrac{a(1-p)}{p(1-a)}\Big)$ avec $p=\dfrac{1}{2}$ et $a=\alpha+\dfrac{1}{2}$.

<u>**conclusion**</u>: $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty}U_n^{\frac{1}{n}}=\dfrac{1}{(1/2-\alpha)^{1/2-\alpha}(\alpha+1/2)^{\alpha+1/2}}}$

2.3.3) b)

On redémontre (le faire!) que la somme de deux loi de Poisson indépendante est une loi de Poisson de paramètre la somme des paramètre. On considère donc une suite (X_n) indépendantes qui suivent toutes une loi de Poisson de paramètre λ.

Comme au a) on a $e^{-n\lambda}T_n=\mathbf{P}\left(S_n\geqslant\alpha n\right)$ avec $S_n\sim\mathcal{P}(n\lambda)$.

On en déduit $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}\ln T_n=a-a\ln(\dfrac{a}{\lambda})$ avec $a=\alpha$ d'où

<u>**conclusion**</u>: $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty}T_n^{\frac{1}{n}}=e^{\alpha}(\dfrac{\lambda}{\alpha})^{\alpha}}$