

COURS + EXERCICES : TOUT SUR LA RÉDUCTION

Sous-espaces stables par un endomorphisme

f induit sur un SEV F stable un endomorphisme de F noté $\hat{f}$.

Polynôme d'endomorphismes et de matrices - $\ker P(f)$ et $\operatorname{im} P(f)$ sont stable par f -polynôme annulateur - structure d'idéal de l'ensemble des polynômes annulateurs d'un endomorphisme.

Polynôme minimal (noté Π_f) : existence en dimension finie.

Structure de $\mathbb{K}[f]$ et sa dimension égale au degré de Π_f .

Théorème de décomposition des Noyaux (TDN).

Valeurs propres - Spectre - Vecteurs propres - Sous-Espaces propres d'endomorphismes.

Stabilité : Si $f \circ g = g \circ f$ alors pour toute valeur propre λ de $f : E_\lambda(f)$ est stable par g .

Théorème fondamental : Les sous-espaces propres sont en somme directe.

Polynôme d'endomorphisme et éléments propres- valeurs propres possible d'un endomorphisme.

Spectre d'une homothétie, d'un projecteur, d'une symétrie.

Valeurs propres - Spectre - Vecteurs propres des matrices - Immersion $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Matrices semblables et éléments propres.

Polynôme caractéristique : $\chi_f(x) = x^n - \operatorname{tr}(f)x^{n-1} + \dots + (-1)^n \det f$. Les étudiants doivent connaître et démontrer les 3 coefficients "connus".

Le polynôme caractéristique de $\hat{f}$ induit par f sur un SEV F stable divise le polynôme caractéristique de $f : \chi_{\hat{f}}(x) | \chi_f(x)$.

Ordre de multiplicité m_λ d'une valeur propre ; $1 \leq \dim E_\lambda \leq m_\lambda$.

Théorème de Cayley-Hamilton (démonstration non exigible (exigible pour les meilleurs))

■ Le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de f ont les mêmes racines.

Réduction en dimension finie :

Diagonalisation : f est diagonalisable si la somme des sous-espaces propres est égale à E .

1ère caractérisation : Caractérisation avec une base de vecteurs propres ou avec une matrice diagonale dans une bonne base .

■ **2ème caractérisation** : $\chi_f(X)$ est scindé et pour toutes les valeurs propres : $\dim E_\lambda = m_\lambda$

Polynôme d'endomorphisme et réduction :

■ **3ème caractérisation** : f s'annule sur un polynôme scindé et n'ayant que des racines simples

Polynôme minimal d'un endomorphisme diagonalisable.

Si f est diagonalisable et F stable par f alors $\hat{f}$ est aussi diagonalisable.

Endomorphisme trigonalisable :

■ **caractérisation** : f est trigonalisable SSI le polynôme caractéristique de f est scindé sur $\mathbb{K}$.

Réduction des matrices : matrices diagonalisables - trigonalisables

■ Endomorphismes nilpotents - indice de nilpotence.

Équivalences : f est nilpotent $\iff f$ est trigonalisable avec 0 comme seule valeur propre $\iff \chi_f = x^n$.

■ Réduction des endomorphismes nilpotents dans le cas où $\dim E = n$, $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$

■ Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme tel que $\Pi_f(X)$ soit scindé dans $\mathbb{K}$. Alors E se décompose en somme directes de SEV stables par f sur chacun desquels f induit la somme d'une homothétie et d'un endomorphisme nilpotent.

Étude exhaustive de la réduction en dimension 2 et 3.

Prévisions : EVN