exercice 1 a) $\underline{AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$ 1

b) En appliquant la relation avec les matrices du a) :

$$\underbrace{N((0))}_{=0} = N(A) \times N(B)$$

Comme $A \neq (0)$, $N(A) \neq 0$ idem pour B donc

$N(A)N(B) \neq 0$! absurde

d $\boxed{\nexists N \setminus \forall A, B \quad N(AB) = N(A)N(B)}$

---

exercice 2

a) $\exists M \geq 0 \setminus A \subset [-M, M]$ car A borné, par TOA,

comme $|P|$ est continue, $|P|$ est bornée sur $[-M, M]$,

donc borné sur A. Enfin comme A non vide :

$$\boxed{\sup_{t \in A} |P(t)| \text{ existe dans } \mathbb{R}.}$$

b) $\forall A$ non vide bornée, $\underline{N_A(P) \geq 0 \text{ (c'est le i))}}$,

$\underline{N_A(\lambda P) = |\lambda| N_A(P) \text{ (c'est le iii))}}$

$$\forall t \in A \quad |P(t)+Q(t)| \leq \underbrace{N_A(P)+N_A(Q)}_{\text{majorant}}$$

donc $\underline{N_A(P+Q) \leq N_A(P) + N_A(Q)}$ (c'est le iv))

<u>Reste le ii)</u>

si $N_A(P)=0 \Rightarrow \forall t \in A \ |P(t)|=0$

si A est infini alors $P=0$

si $A=\{a_1, \dots, a_k\}$ fini alors pour

$P=\prod_{i=1}^{k}(X-a_i) \in E$, $N_A(P)=0$ et $P \neq 0$

d'où $\boxed{\text{la C.N.S. est } A \text{ infini}}$

<u>exercice 3</u>

a) $N\left(\frac{x}{N(x)}\right)=1 \leq 1$ donc $\left\|\frac{x}{N(x)}\right\| \leq 1 \Rightarrow \underline{\|x\| \leq N(x)}$

Par symétrie on a aussi $N(x) \leq \|x\|$, d'où

$\forall x \neq 0 \quad \|x\|=N(x)$, comme $N(0)=\|0\|=0$,

d'où $\boxed{\| \ \| = N}$

exercice 4 $\forall (x,y) \in E^2$ (3)

$$|f(x)-f(y)| = \left| \frac{1}{1+\|x\|} - \frac{1}{1+\|y\|} \right|$$

$$= \left| \frac{\|y\| - \|x\|}{(1+\|x\|)(1+\|y\|)} \right|$$

$$\leq \frac{\|y-x\|}{(1+0)(1+0)}$$ ← inég. triangulaire inversée

d $\boxed{f \text{ 1- lipschitzienne}}$

Exercice 5 :

a) $A^{2n} \longrightarrow B$ comme suite extraite de (A^n).

D'autre part $A^{2n} = (A^n)^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} B^2$ par TG

Par unicité de la limite $\boxed{B^2 = B}$

b) $A^{n+1} = A \times A^n \longrightarrow A \times B$ et $A^{n+1} \longrightarrow B$

d $\boxed{AB = B}$

---

exercice 6 :

a) * Comme $F \subset \bar{F}$, $\bar{F} \neq \emptyset$

* $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall (x,y) \in \bar{F}$ $\left| \begin{array}{l} \exists a_n \in F \mid a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x \\ \exists b_n \in F \mid b_n \to y \end{array} \right.$

$c_n = \lambda a_n + b_n \in F$ car F sev et par TG

$\lim\limits_{n \to \infty} c_n = \lambda x + y$ qs $\underline{\lambda x + y \in \bar{F}}$

d° $\boxed{\bar{F} \text{ sev de } E}$

b) Soit H un hyperplan, $\bar{H}$ encore <u>s.e.v.</u>

On $H \subset \bar{H} \subset E$

Si $H = \bar{H}$: H est fermé

Sinon $H \subsetneq \bar{H}$: $\exists x \in \bar{H} \setminus H$ et donc

$H \oplus \text{vect}(x) = E \subset \bar{H} \subset H$ soit $\bar{H} = E$

d $\boxed{H \text{ fermé ou dense}}$

<u>exercice 7</u>

a) $f(t) = (1-t)^n$ f est $\searrow$ sur $[0,1]$

t	0		1
f	1	$\searrow$	0

donc $\underline{N_\infty(P_n) = 1}$

$P_n = 1 - \underline{\underline{n}} X^n + \frac{n(n-1)}{2} X^n - \dots$ donc $\underline{\|P_n\| \geq n}$

S'il existait $\alpha > 0 \setminus \forall P \in E$ $\|P\|_\infty \leq \alpha N_\infty(P)$

pour $P = P_n$: $n \leq \|P_n\|_\infty \leq \alpha \times 1$

On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $n \leq \alpha$: absurde

d'où $\boxed{\nexists \alpha > 0 \mid \| \cdot \|_\infty \leq \alpha N_\infty}$

b) Il faut trouver Q_n \

$N_\infty(Q_n)$ grand et $\|Q_n\|$ petit

donc Q_n n'a que des coeff. petits

il suffit de prendre Q_n avec bcp de coeff petits :

$Q_n = 1 + X + X^2 + \cdots + X^n$

$\underline{\forall n \in \mathbb{N} : \|Q_n\|_\infty = 1}$ et $\underline{N_\infty(Q_n) = n+1}$ ($Q_n \nearrow$ sur $[0,1]$)

S'il existait $\beta > 0 \mid N_\infty \leq \beta \| \cdot \|_\infty$, on aurait

$\forall n \in \mathbb{N}$ $n + 1 \leq \beta \times 1$: $\rightarrow\leftarrow$

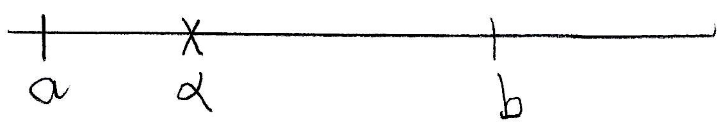
d'où $\boxed{\nexists \beta > 0 \mid N_\infty \leq \beta \| \cdot \|_\infty}$

<u>exercice 8</u>

a) $X \subset \mathbb{R}$, $a \in X$ et X majoré par b

d'où $\boxed{\alpha = \sup X \text{ existe}}$

b)

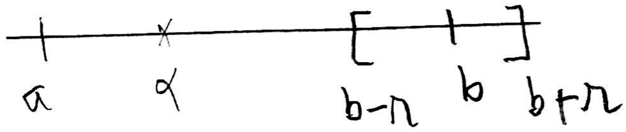


A et $[a,b]$ sont fermés donc X est fermé donc :

$\alpha \in \overline{X} = X$ d'où $\boxed{\alpha \in X}$

c) $b \in E - A$ qui est ouvert : $\exists\, r > 0 \mid$

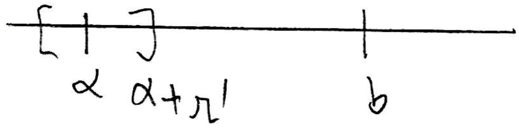
$$B_F(b, r) = [b-r, b+r] \subset E - A$$



cqs $\alpha \notin [b-r, b]$ d'où $\boxed{\alpha \neq b}$

d) Comme $\alpha \in A$ et A ouvert $\exists\, r' > 0 \mid [\alpha - r', \alpha + r'] \subset A$

Comme $\alpha \neq b$, $\alpha < b$

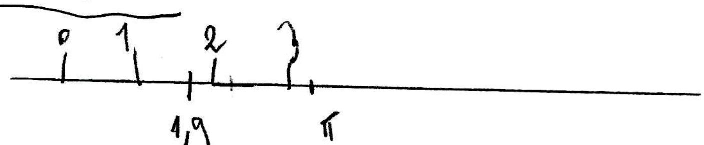


$[\alpha, \alpha + r'] \subset X$ d'où $\sup X \geq \alpha + r'$ $\rightarrow\leftarrow$

d'où $\boxed{A = \mathbb{R}}$

---

exercice 9

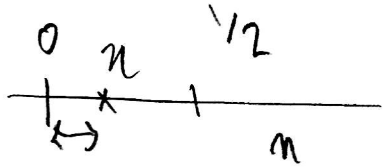


$f(0) = 0$, $f(\pi) = \pi - 3$, $f(1{,}9) = 2 - 1{,}9 = 0{,}1$

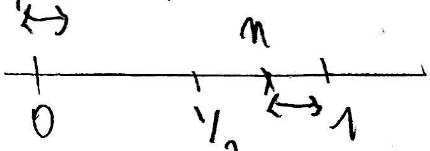
* $\forall x \in \mathbb{R}$ $\{x + 1 - n,\ n \in \mathbb{Z}\} = \{x - p,\ p \in \mathbb{Z}\}$

donc $f(x+1) = f(x)$

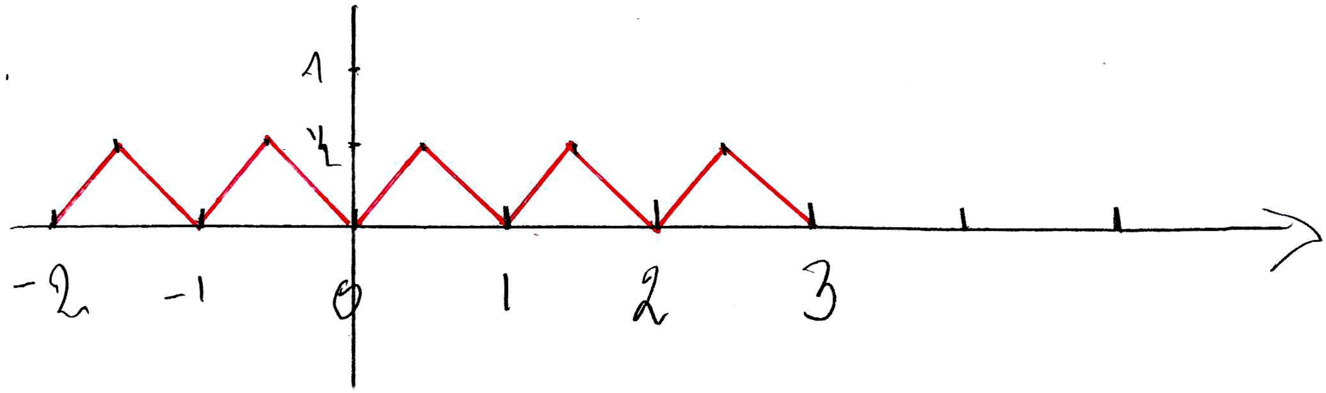
* $\forall x \in [0, \frac{1}{2}]$ $f(x) = x$



$\forall x \in [\frac{1}{2}, 1]$ $f(x) = 1 - x$



d'où



exercice 10

* Soit $(u(p))_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de A qui cvg vers v,

Mq $v \in A$

On a $\forall n\in\mathbb{N}\ \forall p\in\mathbb{N} \quad u(p)_n \le u(p)_{n+1}$ (*)

Montrons que $\lim_{p\to\infty} u(p)_n = v_n$

Soit $n\in\mathbb{N}$, fixé ; $\forall p\in\mathbb{N}$

$$0 \le |v_n - u(p)_n| \le \|v - u(p)\| \quad \text{(TE)}$$

$$\to 0 \leftarrow \quad p \to +\infty$$

d'où en (*) : $p\to+\infty$, il vient $v_n \le v_{n+1}$

donc $v \in A$ d' $\boxed{A \text{ fermé}}$

* Mq $(0) \notin \mathring{A}$: $\forall r>0 \quad u = \left(\frac{r(-1)^n}{n+1}\right) \in E$, $\|u\| = r$

donc $u \in B_F((0), r)$ et $u \notin A$ et $(0) \in A$.

d'où $\boxed{A \text{ non ouvert}}$