

exercice 1

(1)

1) i) Montrons que $N(x)$ existe et positif.

$$2x^2 + xy + y^2 = (x+y)^2 + x^2 \geq 0, \text{ donc}$$

$$N(x) \text{ existe et } N(x) \geq 0$$

$$\text{ii) } N(x) = 0 \Rightarrow 2x^2 + xy + y^2 = 0$$

$$\Rightarrow (x+y)^2 + x^2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow x=y=0 \Rightarrow x=(0,0)$$

$$\text{iii) } N(\lambda x) = \sqrt{\lambda^2(2x^2 + xy + y^2)} = |\lambda| N(x)$$

$$\text{iv) } N(x+x') = \sqrt{(x+x'+y+y')^2 + (x+x')^2}$$

$$\begin{aligned} x &= (x, y) \\ x' &= (x', y') \end{aligned}$$

$$= \| (x+x'+y+y', x+x') \|_2$$

$$= \| (x+y, x) + (x'+y', x') \|_2$$

$$\leq \underbrace{\| (x+y, x) \|_2}_{N(x)} + \underbrace{\| (x'+y', x') \|_2}_{N(x')} \quad \text{car } \| \cdot \|_2 \text{ est une norme}$$

$$\text{donc } N(x+x') \leq N(x) + N(x')$$

$$\text{d'o } \boxed{N \text{ norme sur } \mathbb{R}^2}$$

$$2) (x, y) \in S \Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 = 1$$

(2)

$$\Leftrightarrow (x+y)^2 + x^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow (x+y)^2 = 1 - x^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 & (\text{car } 1 - x^2 = (x+y)^2 \geq 0) \\ |x+y| = \sqrt{1-x^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-1, 1] \\ x+y = \pm \sqrt{1-x^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x, y) \in \Gamma_1 \text{ ou } (x, y) \in \Gamma_2$$

$$\mathcal{U}^0 \quad \boxed{S = \Gamma_1 \cup \Gamma_2}$$

3) Etudions la fonction f définie par $f(x) = -x + \sqrt{1-x^2}$
 f C^0 sur $[-1, 1]$ et C^1 sur $] -1, 1 [$ par T.G.

$$\forall x \in] -1, 1 [\quad f'(x) = -1 - \frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}} = -1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{-\sqrt{1-x^2} - x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$-\sqrt{1-x^2} - x \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} \leq -x$$

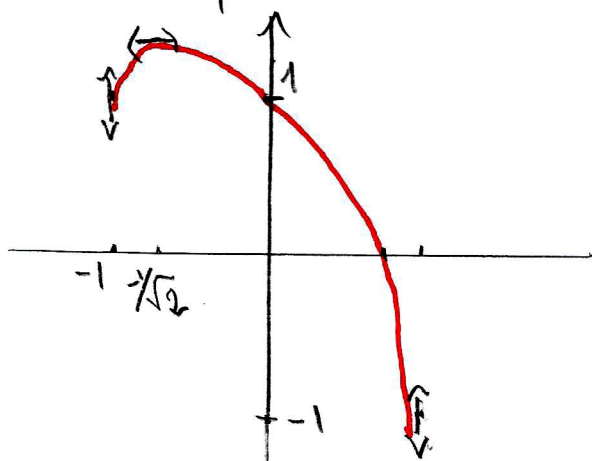
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x \geq 0 \\ 1-x^2 \leq (-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x^2 \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

③

$$\Leftrightarrow n \in \left[-1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \text{ d'où}$$

n	-1	$-1/\sqrt{2}$	0	1
g'		+	0	-
g				

Diagram showing the function g on the interval $[-1, 1]$. The function starts at $(-1, 1)$, passes through $(0, 1)$, and ends at $(1, -1)$. The derivative g' is positive on $[-1, 0]$ and negative on $[0, 1]$. The function has a local maximum at $n = -1/\sqrt{2}$.

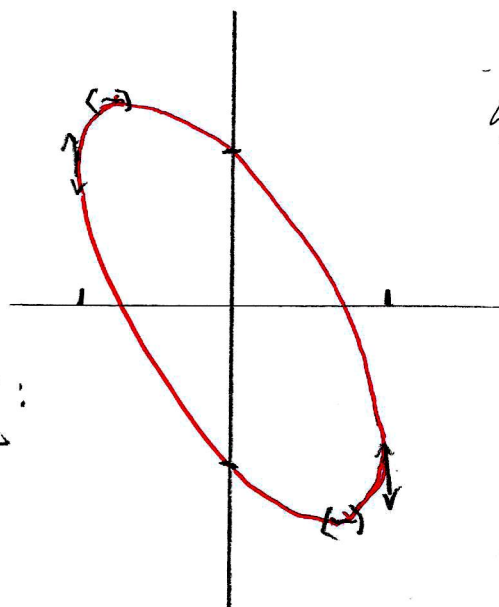
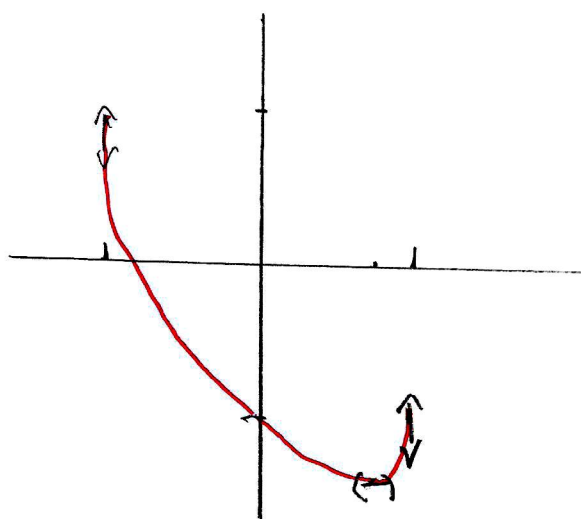


$\lim_{n \rightarrow \pm 1} g'(n) = \pm \infty$
 pr TLD, g admet
 des tangentes verticales

De $\hat{m}$ pour $g(n) = -n - \sqrt{1-n^2}$

n	-1	$1/\sqrt{2}$	1
g'		0	+
g			

Diagram showing the function g on the interval $[-1, 1]$. The function starts at $(-1, 1)$, passes through $(0, 1)$, and ends at $(1, -1)$. The derivative g' is negative on $[-1, 0]$ and positive on $[0, 1]$. The function has a local minimum at $n = 1/\sqrt{2}$.



superbe
 ellipse!

d'o
le tracé de S est :

$$4) \forall (n, y) \in E$$

(4)

$$\begin{aligned} - N(n, y) &= \sqrt{2n^2 + 2ny + y^2} \\ &\leq \sqrt{2n^2 + 2|ny| + y^2} \quad (ny \leq |ny|) \\ &\leq \sqrt{2n^2 + 4|n| \cdot |y| + y^2} \\ &\leq \sqrt{2} \sqrt{(|n| + |y|)^2} \quad \text{tout est positif} \\ &\leq \sqrt{2} \|(n, y)\|_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} - \|(n, y)\|_1 &= |n| + |y| \\ &= \sqrt{n^2 + 2|n||y| + y^2} \\ &\leq \sqrt{2n^2 + 2|n||y| + y^2} \end{aligned}$$

$$\text{Si } ny > 0, \quad \|(n, y)\|_1 \leq \sqrt{2n^2 + 2ny + y^2} \leq N(n, y)$$

Si $ny < 0$, c'est + compliqué : cherchons $\lambda > 0$.

$$\text{tel que } \forall (n, y) \in \mathbb{R}^2 \quad x^2 - 2ny + y^2 \leq \lambda(2n^2 + 2ny + y^2)$$

$$\text{Soit } (2\lambda - 1)n^2 + (2\lambda + 2)ny + (\lambda - 1)y^2 \geq 0$$

$$\text{il suffit donc que } 2\lambda - 1 > 0 \text{ et } \Delta = (2\lambda + 2)^2 - 4(2\lambda - 1)(\lambda - 1) < 0$$

(5)

cqs $\lambda > \frac{1}{2}$ et $\Delta = 4\lambda(5-\lambda) < 0$

posons $\lambda = 6$ on a donc

$$\begin{cases} \forall (n, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ny \leq 0 & \|(n, y)\|_1^2 \leq 6 N(n, y)^2 \\ \forall (n, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ny \geq 0 & \|(n, y)\|_1 \leq \sqrt{6} N(n, y) \end{cases}$$

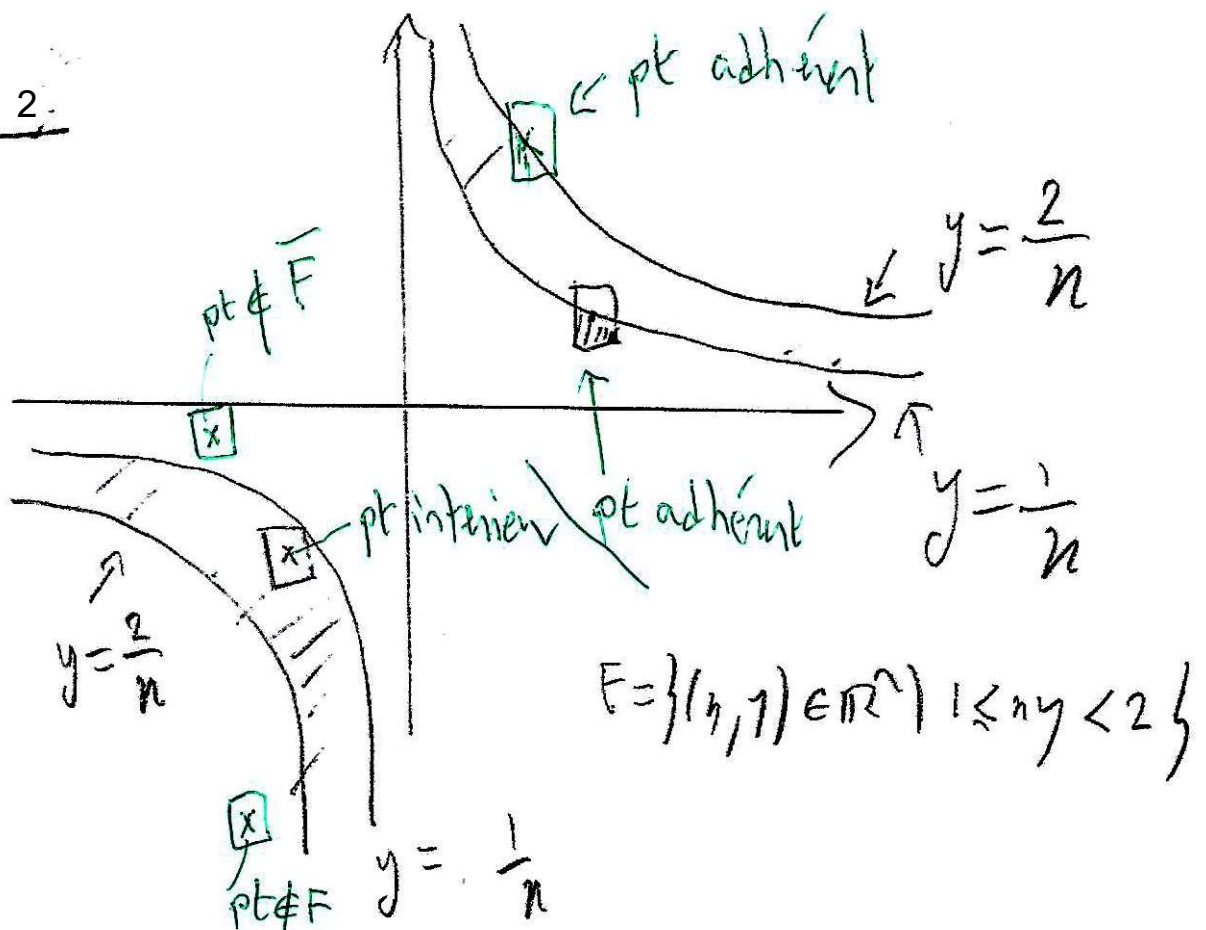
cqs $\forall (n, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \|(n, y)\|_1 \leq \sqrt{6} N(n, y)$

$$\text{d'où } \boxed{N \leq \sqrt{2} \|_1 \text{ et } \|_1 \leq \sqrt{6} N}$$

On en déduit que N et N_1 sont équivalentes, ce qui est normal vu que $\mathbb{R}^2$ est de dimension finie!

Remarque: on pourrait montrer que $\|_1 \leq \sqrt{5} N$ et que c'est la meilleure constante.

Exercice 2:



$$\overset{\circ}{F} = \{(h, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < ny < 2\}$$

$$\overline{F} = \{(h, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq ny \leq 2\}$$

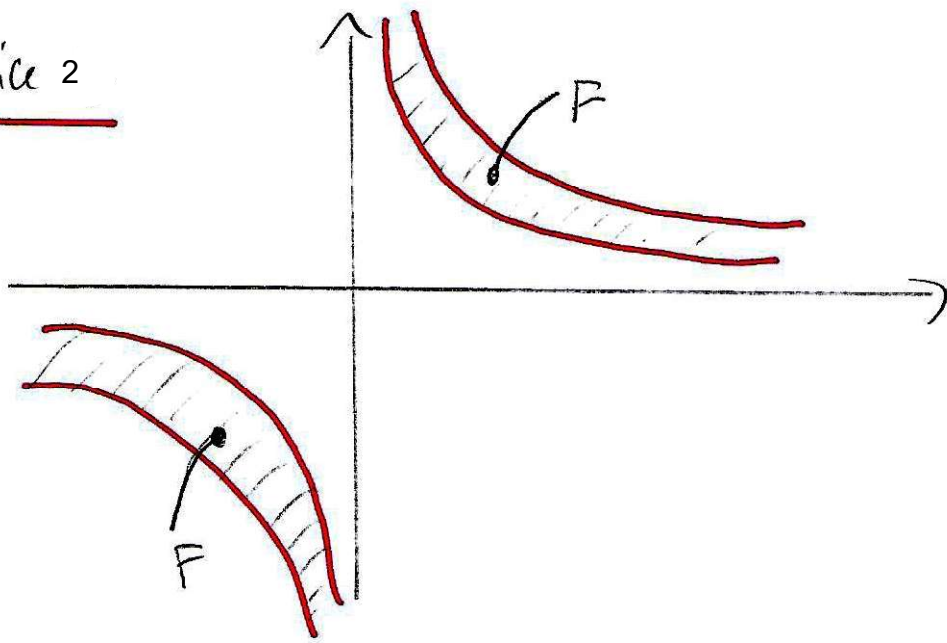
$$\partial F = \{(h, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ny \in \{1, 2\}\}$$

Facultatif: voici la démo.

complète $\hookrightarrow$

exercice 2

①



On a $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq xy < 2\}$

Montrer que $\overset{\circ}{F} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < xy < 2\}$

$$\bar{F} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq xy \leq 2\}$$

Posons $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < xy < 2\}$

soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y) \mapsto xy$

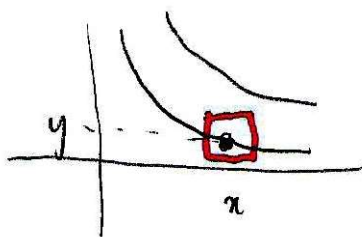
C^∞ par TG sur $\mathbb{R}^2$.

$\Omega = f^{-1}(]1, 2[)$ est ouvert comme image

reciproque d'ouvert ($]1, 2[$ est ouvert) par $f \in C^0/\mathbb{R}$.

Comme $\Omega \subset F$, $\Omega \subset \overset{\circ}{F}$ car $\overset{\circ}{F}$ est $\varepsilon + \eta$ (par l'inclusion) ouvert inclus dans F . ②

Réciproquement, soit $(\eta, \gamma) \in \overset{\circ}{F}$, si $(\eta, \gamma) \notin \Omega$, comme $\overset{\circ}{F} \subset F$ on a $\eta\gamma = 1$. On $\exists \pi > 0$ $\beta_F(|(\eta, \gamma)|, \pi) \subset F$ par la norme infinie



supplément $\forall \eta > 0$ donc $\gamma = \frac{1}{\eta} > 0$ (idem si $\eta < 0$...)

soit $(x - \pi, \gamma)$ $(x - \pi)\gamma = 1 - \pi\gamma < 1$ absurde

car $(x - \pi, \gamma) \in \beta_F(|(\eta, \gamma)|, \pi) \subset F$

donc $(\eta, \gamma) \in \Omega$

d'où : $\overset{\circ}{F} = \Omega = \{(\eta, \gamma) \mid 1 \leq \eta\gamma \leq 2\}$

Posons $\Delta = \{(\eta, \gamma) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq \eta\gamma \leq 2\}$

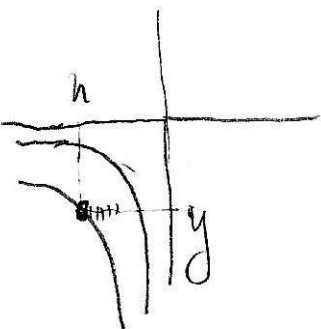
$\Delta = g^{-1}([1, 2])$ est fermé comme image réciproque de fermé $[1, 2]$ par une application continue.

Comme $F \subset \Delta$, $\bar{F} \subset \Delta$ car $\bar{F}$ est le petit fermé contenant F . ③

Réciproquement, soit $(n, y) \in \Delta$ donc $1 \leq ny \leq 2$

Si $1 < ny < 2$ alors $(n, y) \in F$

Si $ny = 2$, supposons par exemple que $n < 0$ et $y = \frac{2}{n} < 0$ idem si $n & y > 0$



Considérons $\vec{u}_n = (n + \frac{1}{n}, y)$

$$(n + \frac{1}{n})y = ny + \frac{y}{n} = 2 + \frac{y}{n} < 2 \quad \forall n \geq 1$$

$$\text{et } 2 + \frac{y}{n} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{y}{n} \geq -1 \Leftrightarrow n \geq -y > 0$$

csq : $\forall n \geq E(-y) + 1 > 0$, $\vec{u}_n \in F$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{u}_n = (n, y)$

donc $(n, y) \in \bar{F}$

$$d' : \boxed{\bar{F} = \Delta = \{(n, y) \mid 1 \leq ny \leq 2\}}$$

$$\text{csq : } \boxed{F_2(F) = \mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2 \text{ avec } \mathcal{H}_i : |ny| = i}$$

exercice 3 : $\forall (f, g) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

①

1)* $N'_\infty(f) = |f(0)| + N_\infty(f')$ existe car f étant C^1 , f' est C^0 sur $[0, 2]$, de plus $N'(f) \geq 0$.

* $N'_\infty(f) = 0 \Rightarrow f(0) = 0$ et $f' = 0$: applic. nulle / $[0, 2]$

donc $\exists C \in \mathbb{R} \mid \forall t \in [0, 2] : f'(t) = C$

et comme $f(0) = 0, C = 0$: cqs $f = 0$.

$$* N'_\infty(\lambda f) = |\lambda f(0)| + N_\infty(\lambda f')$$

$$= |\lambda| |f(0)| + |\lambda| N_\infty(f') \quad \uparrow \text{linéarité de la dérivée}$$

$$= |\lambda| N'_\infty(f) \quad \uparrow \text{norme}$$

$$* N'_\infty(f+g) = |(f+g)(0)| + N_\infty(f'+g')$$

$$\leq |f(0)| + |g(0)| + N_\infty(f) + N_\infty(g)$$

$$\leq N'_\infty(f) + N'_\infty(g)$$

d'o N'_∞ norme sur E

2*) On a un lien entre f et f' avec ... le T.A.F. !
 $\forall t \in [0, 2] \quad f(t) - f(0) = (t-0)f'(c) \quad (c \in]0, 2[)$

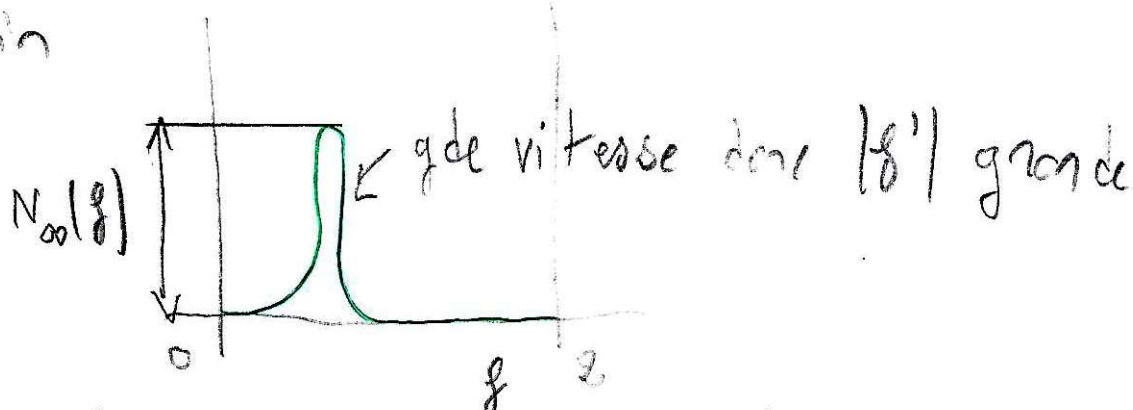
(2)

donc $|f(t)| \leq |f(0)| + t |f'(c)|$
 $\forall t \in [0, 2] \leq |f(0)| + 2 N_\infty(f')$
 $\leq 2|f(0)| + 2 N_\infty(f')$

d'

$$N_\infty(f) \leq 2 N'_\infty(f)$$

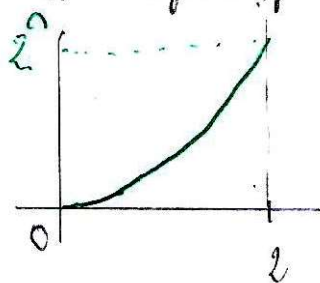
Par contre f' peut être très grande sans que f soit grande:
 cinématiquement si on roule à 2 à l'heure
 pendant 59' et à 100 pendant 1 seconde, on n'ira
 pas loin



Cherchons des fonctions f dont la dérivée est infiniment
 plus grande que f à l'infini : $f_n(t) = t^n$

on a $N_\infty(f_n) = 2^n$

$N'_\infty(f_n) = 0 + n 2^{n-1} \quad \forall n \geq 1$



s'il existait $\beta > 0 \quad \forall f \in E \quad N'_\infty(f) \leq \beta N_\infty(f_n)$
 pour $n \geq 1$ et $f = f_n$:

$$\forall n \geq 1 : n 2^{n-1} \leq \beta 2^n$$

(3)

donc $n \leq 2\beta$ absurde

$$d' N'_\infty \not\propto N_\infty \text{ et } N_\infty \text{ et } N'_\infty \text{ non équivalentes}$$

3°) Utilisons la suite (f_n) : $N_\infty(f_n) \rightarrow +\infty$ et $N'_\infty(f_n) \rightarrow +\infty$
mais + vite vers l'infini avec N'_∞ .

$$\text{Posons } g_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n} 2^n} f_n(t)$$

$$N_\infty(g_n) = \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ donc } (g_n) \text{ cvg vers } 0 \text{ pour } N_\infty$$

$$N'_\infty(g_n) = \frac{\sqrt{n}}{2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty \text{ donc } (g_n) \text{ est } \underline{\text{non bornée}}$$

pour N'_∞ , d'où (g_n) diverge pour N'_∞

$$4^\circ) \forall n \in \mathbb{N} \quad N_\infty(f_n) = 1 \quad (f_n \nearrow \text{ de } 0 \text{ à } 2),$$

$$\text{cgs } \forall n \in \mathbb{N} \quad f_n \in S_\infty(0, 1)$$

$$* \forall t \in [0, 2] \quad 0 \leq \underbrace{\left| f_{\varphi(n)}(t) - g(t) \right|}_{\downarrow 0} \leq N_\infty(f_{\varphi(n)} - g) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$\swarrow \quad \searrow$
 $0 \leftarrow T.E.$

$$\text{on } f_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0, 2[\\ 1 & \text{si } t = 2 \end{cases}$$

(4)

cgs $\forall t \in [0, 2[: g(t) = 0$ et par continuité de

$$g \in E \text{ en } 2, g(2) = \lim_{t \rightarrow 2} g(t) = 0$$

$$\text{d'où } \underline{\forall t \in [0, 2] \quad g(t) = 0 (*)}$$

$$\text{En cgs si } f \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\varphi(n)} g, N_\infty(f_{\varphi(n)}) = 1 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} N_\infty(g)$$

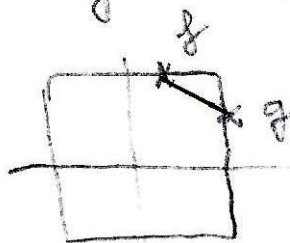
$$\text{donc } N(g) = 1 \quad \text{or } (*) \text{ donne } g = 0 \text{ donc } N_\infty(g) = 0$$

absurde

On conclut que la suite (f_n) ne possède aucune valeur d'adhérence dans E (et donc dans $S_\infty(0, 1)$).

d' $S_\infty(0, 1)$ non compact pour N_∞ (bien que $\left\{ \begin{array}{l} \text{fermé} \\ \text{et} \\ \text{borné} \end{array} \right.$)

5°) L'idée est que la boule fermée unité est convexe donc connexe par arc, puis de "normaliser" l'arc.



$$(1-t)f + tg \in B_F$$

donc $\frac{(1-t)f + tg}{N_\infty((1-t)f + tg)} \in S_\infty$

si $t \neq 0$

Notons $B_F^\infty(0,1)$ la boule unité pour N_∞ . (5)

1^{er} cas Soit (f,g) libre de $S_\infty(0,1) \subset B_F^\infty(0,1)$;

donc $\forall (\lambda, \mu) \neq (0,0) : \lambda f + \mu g \neq 0$.

Soit $\gamma : [0,1] \longrightarrow E$

$$t \longmapsto \frac{(1-t)f + tg}{N_\infty((1-t)f + tg)}$$

* γ bien défini et C^0 sur $[0,1]$ par TG

* $\forall t \in [0,1] : \gamma(t) \in S_\infty(0,1)$

* $\gamma(0) = f$ et $\gamma(1) = g$ donc f et g connectés de S_∞

2^{ème} cas (f,g) liée alors $f \neq 0$ et $g \neq 0$ (car $N_\infty(f) = N_\infty(g) = 1$)
 $\hookrightarrow$ de $S_\infty(0,1)$

on a donc $\text{vect}(f) = \text{vect}(g)$. On E est de dim.
infinie (par exemple $(f_0, f_1, \dots, f_n)$ est libre $\forall n \in \mathbb{N}$
avec $f_n(t) = t^n$ (infinité de racine...)).

Soit donc $h \notin \text{vect}(f)$, $h \neq 0$ et posons $h_0 = \frac{h}{N_\infty(h)}$,
 (f, h_0) libre de $S_\infty(0,1)$ donc f et h_0 connectés de $S_\infty(0,1)$
de $\hat{m}(g, h_0) \longrightarrow g$

Par transitivité, f et g sont connectés à $S_\infty(0,1)$. (6)

d° $S_\infty(0,1)$ est connexe par arc

Remarque : cette demo. est valable pour tout evn
 $(E, \|\cdot\|)$ quelconque dès que $\dim E \geq 2$.

$$* \forall (f, g) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{R} : \forall t \in [0, 1]$$

$$\begin{aligned} \underbrace{\varphi(\lambda f + g)}(t) &= t^2 (\lambda f + g)(t) \\ &= \lambda t^2 f(t) + t^2 g(t) = \lambda \varphi(f)(t) + \varphi(g)(t) \\ &= \underbrace{[\lambda \varphi(f) + \varphi(g)]}(t) \end{aligned}$$

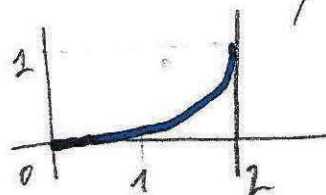
donc $\varphi(\lambda f + g) = \lambda \varphi(f) + \varphi(g)$ et φ est linéaire

$$\begin{aligned} * \forall f \in E, \forall t \in [0, 1] \quad N(\varphi(f)) &= \int_0^2 |t^2 f(t)| dt \leq 4 \int_0^2 |f(t)| dt \\ &\leq 4 N_1(f) \end{aligned}$$

$$\text{csg : } \boxed{\varphi \text{ est continue sur } E \text{ et } \|\varphi\| \leq 4}$$

L'idée est que le 4 est la valeur de $t \mapsto t^2$ en 2, on va donc évaluer φ en des fonctions à toute la surface (donc la norme 1) soit normalisées autour de $t = 2$. Essayons

par exemple avec la fonction $t \mapsto \left(\frac{t}{2}\right)^n$



1) Un calcul immédiat donne :

$$P_n^{-1} N P_n = \begin{pmatrix} 0 & a_{1,2}/n & a_{1,3}/n^2 & \dots & a_{1,p}/n^{p-1} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & 0 & a_{p-2,p}/n^2 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec } N = \begin{pmatrix} 0 & a_{1,2} \\ & \ddots \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Comme tous les coefficients sont des $O(\frac{1}{n})$, on a donc

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} P_n^{-1} N P_n = (0)}$$

2) $\Rightarrow$ Comme $A \in M_p(\mathbb{C})$, A est triangulable :

$$\exists P \in GL_p(\mathbb{C}) \exists T = \begin{pmatrix} d_1 & * \\ & \ddots \\ 0 & d_p \end{pmatrix} = D + N, D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ & \ddots \\ 0 & d_p \end{pmatrix}$$

$$\text{et } N = \begin{pmatrix} 0 & * \\ & 0 \end{pmatrix} \text{ tel que } A = P T P^{-1} \text{ donc ;}$$

$$T \in E_A \text{ et donc } \forall n \geq 1, P_n^{-1} T P_n \in E_A \text{ on}$$

$$P_n^{-1} T P_n = P_n^{-1} \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ & \ddots \\ 0 & d_p \end{pmatrix} P_n + P_n^{-1} N P_n$$

$$\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{calcul élimatoire de 3 matrices diagonales}} \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ & \ddots \\ 0 & d_p \end{pmatrix} + 0 = D$$

Donc $D \in \overline{E_A}$, or E_A est fermé donc $D \in E_A$: (2)

$\exists Q \in GL_p(\mathbb{C}) \mid A = Q D Q^{-1}$ et A diagonalisable

$\Leftrightarrow$ si A diagonalisable, $\exists D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_p \end{pmatrix}$ tel que
 $A = P D P^{-1}$.

Posons $\chi_A(\lambda) = a_p \lambda^p + \dots + a_0$ et $\pi_A(\lambda) = \prod_{i=1}^q (\lambda - \beta_i)$

Soit (A_n) une suite de E_A qui converge vers $B \in M_p(\mathbb{C})$.
 $\uparrow$ racines, rac. simples

Montrons que $B \in E_A$.

$\forall n \in \mathbb{N} \exists Q_n \in GL_p(\mathbb{C}) \mid A_n = Q_n A Q_n^{-1}$ d'où

$\chi_{A_n} = \chi_A$ et $\pi_{A_n} = \pi_A$ car A et A_n sont diagonalisables.

Donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_p A_n^p + \dots + a_0 I_p = \prod_{i=1}^q (A_n - \beta_i I_p) = (0)$

d'où par TG, qd $n \rightarrow +\infty$, on a :

$$a_p B^p + \dots + a_0 I_p = \prod_{i=1}^q (B - \beta_i I_p) = 0$$

d'où B est diagonalisable ($3^{\text{ème}}$ cas.) et $\chi_B(z) = \chi_A(z)$ (3)

donc par la 2^{ème} conséc. $\left| \begin{array}{l} \dim E_\lambda(B) = \dim E_\lambda(A) = m(\lambda) \\ \forall \lambda \in \text{sp}(B) = \text{sp}(A) \end{array} \right.$

csq : B et A sont semblables à la même matrice

diagonale. Par transitivité : $B \in E_A$

d'où E_A est fermé.

d' : A diagonalisable $(\Rightarrow) E_A$ fermé