exercice 1 (CCP MP 2011) Ds6: corrigé

1) $(0) \in C(A)$, $\forall (M, N, \lambda) \in C(A)^2 \times \mathbb{R}$:

$$A(\lambda M + N) = \underset{\uparrow \, \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \text{ algèbre}}{\lambda AM + AN} = \underset{\uparrow \, M, N \in C(A)}{\lambda MA + NA} = (\lambda M + N)A$$

d'où $\boxed{C(A) \text{ sev donc } \mathbb{R}\text{-ev}}$

2) On trouve $AX_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, $AX_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ et $AX_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Si l'on note $E = \mathbb{R}^3$ et $\vec{u}_i$ le vecteur canoniquement associé à X_i (do la base canonique de $\mathbb{R}^3$).
$\hookrightarrow b_0$

(donc $\vec{u}_1 = (1, 1, 1)$ ---)

On a donc $f(\vec{u}_1) = \vec{u}_1$, $f(\vec{u}_2) = 2\vec{u}_2$

Si T est semblable à $A = M_{b_0}(f)$, on doit avoir

$$T = M_{b_1}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(\vec{x}) & f(\vec{y}) & f(\vec{z}) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{array}$$

cqs, $f(\vec{x}) = 3\vec{x}$, $f(\vec{y}) = 2\vec{y}$ et $f(\vec{z}) = \vec{y} + 2\vec{z}$. ②

On voit donc que $\vec{x} = \vec{u}_1$ et $\vec{y} = \vec{u}_2$ pourrait convenir.

Evaluons $\underbrace{\vec{u}_2 + 2\vec{u}_3}_{\vec{y} + 2\vec{z}}$: $X_2 + 2X_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$= AX_3$

d'où <u>synthèse</u> :

posons $\underline{b_1 = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)}$

* Montrons que b_1 est une base de E :

$$rg(b_1) = rg\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

$C_2 - 4C_1$ $\qquad$ $C_2 + 2C_1$

cqs b_1 base de E et $M_{b_1}(f) = T$

d'où $\boxed{A = PTP^{-1} \text{ ; semblables avec } P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}}$

3) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in C(T)$: on a donc

$$MT = TM \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3a & 2b & b+2c \\ 3d & 2e & e+2f \\ 3g & 2h & h+2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a & 3b & 3c \\ 2d+g & 2e+h & 2f+i \\ 2g & 2h & 2i \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = g = 0 \\ c = 0 = d \\ h = 0 \\ a = a \ , \ e = i \ , \ f = f \end{cases}$$

donc $\boxed{C(T) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} , \ (a, e, f) \in \mathbb{R}^3 \right\}}$

$$C(T) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

et comme $\alpha \left(\ '' \ \right) + \beta \left(\ '' \ \right) + \gamma \left(\ '' \ \right) = (0) \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$

d'où $\boxed{\dim C(T) = 3}$

4) Notons ϕ cette application, ϕ est bien définie de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dans lui même,

* $\phi(I_3) = P^{-1} I_3 P = P^{-1}P = I_3$

* $\forall (M, N, \lambda) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})^2 \times \mathbb{R}$;

$\rightarrow \phi(\lambda M + N) = P^{-1}(\lambda M + N)P = P^{-1}(\lambda MP + NP)$
$= \lambda P^{-1}MP + P^{-1}NP = \lambda \phi(M) + \phi(N)$

$\rightarrow \phi(MN) = P^{-1}MNP = \underbrace{P^{-1}MP}\,\underbrace{P^{-1}NP} = \phi(M)\phi(N)$

cqs <u>ϕ morphisme d'algèbre</u>

* Montrons que ϕ injective ;

Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid \phi(M) = P^{-1}MP = (0)$

$\Rightarrow M = P(0)P^{-1} = (0)$

Comme ϕ endomorphisme en dim <u>finie</u>, <u>ϕ iso.</u>

d'où $\boxed{\phi \text{ automorphisme d'algèbres}}$

Pour $C(A)$, l'idée est de "revenir" à T :

si $M \in C(A)$, $AM = MA$

$$\iff PTP^{-1}M = MPTP^{-1}$$

$$\iff TP^{-1}MP = P^{-1}MPT$$

$$\iff T\phi(M) = \phi(M)T$$

$$\iff \phi(M) \in C(T)$$

Cqs $\underline{\phi(C(A)) = C(T)}$, par isomorphisme :

$$\boxed{\dim C(A) = \dim C(T) = 3}$$

5) a) $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 20 & -14 \\ 3 & 24 & -18 \\ -1 & 20 & -10 \end{pmatrix}$

Cqs si $A^2 + aA + bI_3 = (0)$, en regardant le coeff. 2,1 : $3 + a \times 0 + b \times 0 = 3 = 0$; absurde

d $\boxed{\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 \quad A^2 + aA + bI_3 \neq (0)}$

b) On a $AI_3 = I_3 A$, $AA = AA$ et $AA^2 = A^2 A$ ⑥

donc $(I_3, A, A^2) \in C(A)^3$ d'où

$\underline{\text{vect}(I_3, A, A^2) \subset C(A)}$ ($C(A)$ sev)

Etudions $\dim \text{vect}(I_3, A, A^2)$: Au vu du a) il semble que (I_3, A, A^2) libre ; prouvons le :

$\forall (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha I_3 + \beta A + \gamma A^2 = (0)$

si $\gamma \neq 0$, $A^2 = -\frac{\beta}{\gamma} A - \frac{\alpha}{\gamma} I_3$ absurde avec a)

donc $\gamma = 0$, si $\beta \neq 0$, $A = -\frac{\alpha}{\beta} I_3$: absurde

donc $\beta = 0$ et $\alpha I_3 = (0) \Rightarrow \alpha = 0$

cqs (I_3, A, A^2) libre et $\dim \text{vect}(I_3, A, A^2) = 3$
$= \dim C(A)$

donc inclusion + m dim :

d'où $\boxed{C(A) = \text{vect}(I_3, A, A^2)}$

(c) Notons $\mathbb{R}[A] = \{ P(A), P \in \mathbb{R}[X] \}$, on a :

$$\mathrm{vect}(I_3, A, A^2) \subset \mathbb{R}[A] \subset C(A) \text{ d'où } \boxed{\mathbb{R}[A] = C(A)}$$

On a toujours $\forall A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ $\mathbb{R}[A] \subset C(A)$, mais $C(A)$ peut être plus gros. Par exemple $A = I_3$, $C(A) = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Or $\mathbb{R}[A] = \mathrm{vect}(I_3) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\} \subsetneq C(A)$.

d'où : $\boxed{\text{Ce résultat n'est pas tjs vrai}}$

Problème

DS6 : corrigé (le III de ce corrigé est l'exercice du Ds6*)

1) $\Rightarrow]$ soit (a_n) suite de A \ $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$,

donc $\|a_n - x\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, comme 0 minore

$D = \{\|x-a\|, a\in A\}$, par caractérisation de

la borne inf : $\underline{d(x,A)=0}$

$\Leftarrow]$ De même $\exists (d_n)$ suite de D \ $d_n \to \inf D = d(x,A)$ $= 0$

Or $\forall n \in \mathbb{N}, \exists a_n \in A$ \ $d_n = \|x - a_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

d'où $\underline{x \in \overline{A}}$

2) $f(x) = \|(3-x, 4-2x-1)\|_1$

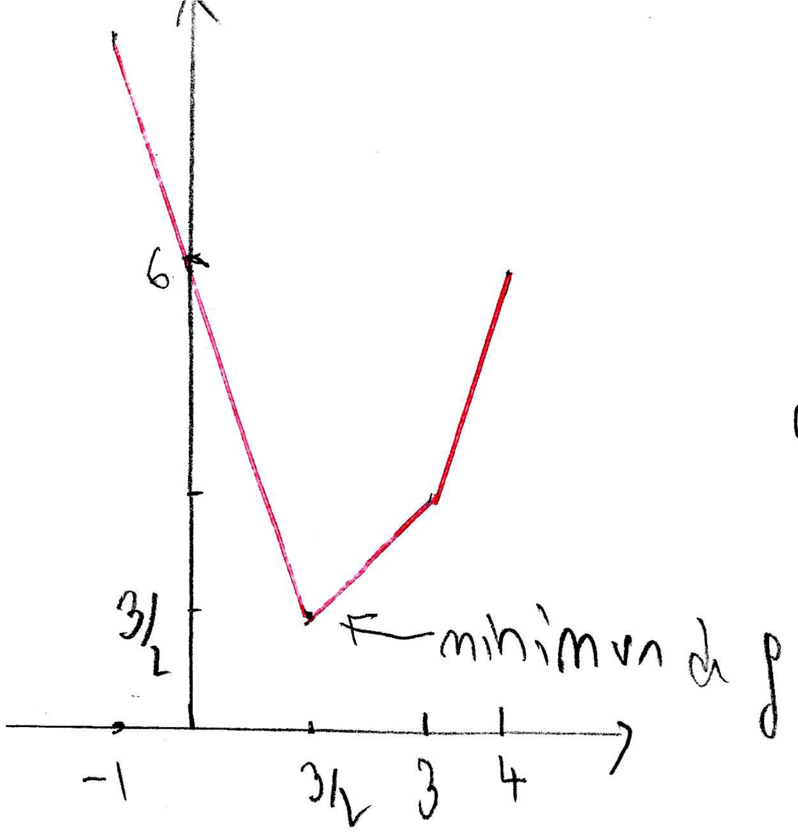
$= |x-3| + |2x-3|$

	$-\infty$ ... $3/2$	$3/2$ ... 3	3 ... $+\infty$
$\|x-3\|$	$-x+3$	$-x+3$	$x-3$
$\|2x-3\|$	$-2x+3$	$2x-3$	$2x-3$
$f(x)$	$-3x+6$	x	$3x-6$

d'où

x	$-\infty$	$3/2$	3	$+\infty$
f	$+\infty$ ↘	$3/2$ ↗	3 ↗	$+\infty$

d'où



d $\boxed{d(X,A) = \frac{3}{2}}$

atteint en $a = \left(\frac{3}{2}, 4\right)$

3) $f(y) = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (y-c)^2 + (t-d)^2$

f $C^1/\mathbb{R}$ par TG et $\forall y \in \mathbb{R}$ $f'(y) = 2(y-b) + 2(y-c)$

x	$-\infty$		$\frac{b+c}{2}$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	

cqo f est minimale par $y = \frac{b+c}{2}$

De $\hat{m}$ $\|X-A\|_2^2$ est minimale par rapport à x

en $x = a$ et minimale % à t en $t = d$

Cqo $\forall (x,y,t) \in \mathbb{R}^3$ $\|X-A\|_2^2 \geq 0 + f\left(\frac{b+c}{2}\right) + 0$

$\uparrow$ atteint en $\left(a, \frac{b+c}{2}, d\right)$

d° $\boxed{d(X, S_2(\mathbb{R})) = \dfrac{|b-c|}{\sqrt{2}}}$ ne pas oublier la $\sqrt{\ }$

Les questions 4-5-6-7-8-9 ont été retirées de ce Ds6

4.) $sp_{\mathbb{R}}(A) = sp_{\mathbb{C}}(A) = \{3, -7, 5\}$ donc $\underline{\rho(A) = 7}$

$sp_{\mathbb{C}}(B) = \{-i, i\}$ donc $\underline{\rho(B) = 1}$

5.) Par récurrence $\underline{A^n X = \lambda^n X}$

On a donc $\|A^n X\| \leq |||A^n|||\, \|X\|$

$\Rightarrow |\lambda^n|\, \|X\| \leq |||A^n||| \cdot \|X\|$

$\Rightarrow 0 \leq |\lambda^n| \leq |||A^n|||$ car $\|X\| > 0 \ (X \neq 0)$

Or (A^n) tend vers (0) signifie que $|||A^n||| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$,

par T.E. $\lim\limits_{n \to \infty} |\lambda^n| = 0$ d'où $\underline{|\lambda| < 1}$

d $\boxed{\rho(A) < 1}$

6.) Notons ϕ cette application, $\phi(\lambda M + N) = P(\lambda M + N)P^{-1}$

$= (\lambda PM + PN)P^{-1} = \lambda PMP^{-1} + PNP^{-1} = \lambda\phi(M) + \phi(N)$

d : $\boxed{\phi \text{ est linéaire et donc } C^0 \text{ en dim. finie}}$

7. $\exists P \in GL_p(\mathbb{R})$ $\exists D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_p \end{pmatrix}$ \

$A = PDP^{-1}$ et $sp(A) = sp(D) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_p\}$

comme $\forall i$ $|\alpha_i| \leq \rho(A) < 1$, $D^n = \begin{pmatrix} \alpha_1^n & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_p^n \end{pmatrix} \to (0)$

grâce au 6. et le critère séquentiel,

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} A^n = P(0)P^{-1} = (0)}$$

8. Comme $N^p = (0)$ (indice de nilpotence $\leq p$) et que Δ et N commutent, $\forall n \geq p$:

$$A^n = \sum_{k=0}^{p-1} \binom{n}{k} N^k \Delta^{n-k}$$

Pour k fixé, $k \in [\![0, p-1]\!]$ $\binom{n}{k} = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \sim \dfrac{n^k}{k!}$

ensuite $\Delta = P\begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_p \end{pmatrix}P^{-1}$, $\binom{n}{k}\Delta^{n-k} = P\begin{pmatrix} \binom{n}{k}\alpha_1^{n-k} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \binom{n}{k}\alpha_p^{n-k} \end{pmatrix}P^{-1}$

Par croissance comparée, $\binom{n}{k}\alpha_i^{n-k} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, car $0 \leq |\alpha_i| \leq \rho(A) < 1$, d'où par TG et de 6.,

$$\underline{A^n \longrightarrow (0)}$$

9.) On conclut à l'équivalence avec la 5.) et la 8.)

10.) a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \in X$, $I_2 \notin X$

b) $A \in X \iff \chi_A(x)$ admet 2 racines réelles distinctes

$\iff \Delta(\chi_A(x)) = tr(A)^2 - 4\det(A) > 0$

rappel : $\chi_A(x) = x^2 - tr(A)x + \det A$

Posons $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$

$A \longmapsto tr(A)^2 - 4\det(A)$

On a : i) $X = f^{-1}(]0, +\infty[)$

ii) f continue$/_E$ par TG et parce que tr et $\det$ sont $C^0/_E$ (p-linéaire en dim finie)

iii) $]0, +\infty[$ ouvert de $\mathbb{R}$.

d'où $\boxed{X \text{ ouvert de } E}$

6

c) si $A \in X$, les val. propres de A sont :

$$tr(A) \pm \sqrt{tr(A)^2 - 4\det(A)}$$

cqô $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$

$A \longmapsto tr(A) + \sqrt{tr(A)^2 - 4\det(A)}$

Par TG, d'où $\boxed{f \text{ continue sur } X}$

d) $A_n = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 3+\frac{1}{n} \end{pmatrix} \in X$ $sp(A_n) = \{3, 3+\frac{1}{n}\}$

et $A_n \to A$ d $\boxed{A \in \overline{X}}$

e) Au vu de d), il semble que $\overline{X} = \{$matrices ayant 2 val propres de $\mathbb{R}\}$

Soit $A \in E \setminus A$ admet 2 val propres α et β (réelles)

1er cas $\alpha \neq \beta$ $A \in X \subset \overline{X}$

2nd cas $\alpha = \beta$ χ_A scindé de $\mathbb{R}$ donc A trigo-nalisable : $\exists P \in GL_2(\mathbb{R}) \setminus A = P \begin{pmatrix} \alpha & c \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} P^{-1}$

$c \in \mathbb{R}$

$$A_n = P\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha + \frac{1}{n} \end{pmatrix} P^{-1} \in X \text{ et } A_n \xrightarrow{TG} A$$

cqs $A \in \overline{X}$.

<u>Récip.</u> Soit $A \in \overline{X}$, $\exists A_n \longrightarrow A$ & $A_n \in X$

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\chi_{A_n}(x) = x^2 - \text{tr}(A_n)x + \det A_n$

$\forall x \in \mathbb{R}$ $\xrightarrow[n \to \infty]{TG} x^2 - \text{tr}(A)x + \det A$

or $\forall n \in \mathbb{N}$ $\Delta_n = \text{tr}(A_n)^2 - 4\det(A_n) > 0$

$\xrightarrow[n \to \infty]{} \text{tr}(A)^2 - 4\det(A) \geq 0$

d'où χ_A scindé s/ $\mathbb{R}$

d/ $\boxed{\begin{aligned} \overline{X} &= \{A \in E \mid \chi_A \text{ scindé s/ } \mathbb{R}\} \\ &= \{A \in E \mid A \text{ trigonalisable}\} \end{aligned}$

f/ L'idée $P \hookrightarrow Q$ et $\alpha \hookrightarrow \gamma$, $\beta \hookrightarrow \delta$

Comme $GL_2^+(\mathbb{R})$ est connexe par arc :

$\exists f : [0,1] \longrightarrow GL_2^+(\mathbb{R}) \mid f$ $C^0/[0,1]$ | $f(0) = P$ et $f(1) = Q$

Soit $F : [0,1] \longrightarrow E$

$$t \longmapsto g(t)\begin{pmatrix}(1-t)\alpha+t\gamma & 0 \\ 0 & (1-t)\beta+t\delta\end{pmatrix}g(t)^{-1}$$

Montrons que F convient :

i) F est C^0 par TG et $g : GL_2(\mathbb{R}) \longrightarrow GL_2(\mathbb{R})$

$$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} \longmapsto \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$$

C^0 / $GL_2(\mathbb{R})$

ii) $F(0)=A$, $F(1)=B$

iii) $\forall t\in[0,1]$

$$(1-t)\beta+t\delta-[(1-t)\alpha+t\gamma]$$
$$=(1-t)(\beta-\alpha)+t(\delta-\gamma)$$

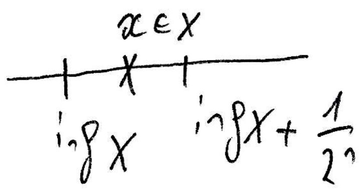
Comme $(\beta-\alpha, \delta-\gamma)\in\mathbb{R}^{+*}$ et que $\mathbb{R}^{+*}$ est convexe (intervalle), $(1-t)(\beta-\alpha)+t(\delta-\gamma)\in\mathbb{R}^{+*}$

cqs $F(t)\in X$, cqs F est un chemin de X qui joint A à B.

d'où $\boxed{X \text{ connexe/arc}}$

II a) $d(x_0, H) = \inf\{\|x_0 - y\|,\ y \in H\}$

Par caractérisation (séquentielle) de la borne inf. : $\exists y_n \in H \mid$



$$d(x_0, H) \leq \|x_0 - y_n\| < d(x_0, H) + \frac{1}{2^n}$$

d'où $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} \|x_0 - y_n\| = d(x_0, H)}$

b) Comme la suite $(\|x_0 - y_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, elle est bornée

donc $\exists M \in \mathbb{R}_+ \mid \forall n \in \mathbb{N}\ \|x_0 - y_n\| \leq M$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}$:

$y_n \in B_F(x_0, M)$. Comme E est un $\mathbb{R}$-evn de dim. finie, la boule fermé (et bornée !) $B_F(x_0, M)$ est compact,

Par Bolzano-Weierstrass, il existe $y_0 \in B_F(x_0, M)$, il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ st $\nearrow$ tel que $\lim\limits_{n\to\infty} y_{\varphi(n)} = y_0$

Comme E est de dim. finie, H est fermé (comme tous sev).

donc $y_0 \in \overline{H} = H$. d'où $\boxed{(y_{\varphi(n)}) \text{ converge vers } y_0 \in H}$

c) On reprend le a) $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_0 - y_{\varphi(n)}\| \overset{T.G}{=} \|x_0 - y_0\| \overset{a)}{=} d(x_0, H)$

d'où $\boxed{d(x_0, H) = \|x_0 - y_0\|}$

2 a) $\operatorname{Ker} h = h^{-1}(\{0\})$: image réciproque d'une fermé ($\{0\}$) par une application continue (h) donc $\boxed{\operatorname{Ker} h \text{ fermé}}$

b) Si h n'est pas continue $\forall K > 0\ \exists x \in E \mid$
$|h(x)| > K\|x\|$

Pour $K = n+1 > 0$, $\exists x_n \in E \mid \ |h(x_n)| > (n+1)\|x_n\|$

On a donc $x_n \neq 0$ et si l'on pose $t_n = \dfrac{x_n}{h(x_n)}$, on a

$h(t_n) = 1$ et $\|t_n\| < \dfrac{1}{n+1}$ donc $\begin{cases} h(t_n) = 1, \forall n \in \mathbb{N} \\ \lim\limits_{n\to\infty} t_n = 0 \end{cases}$

On en déduit que $u_n = t_n - t_0 \in \operatorname{Ker} h$ et que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = -t_0$. Comme $\operatorname{Ker} h$ est fermé, $-t_0 \in \operatorname{Ker} h$ d'où $h(t_0) = 0$. Or $h(t_0) = 1$; Absurde.

d $\boxed{\text{Si } \operatorname{Ker} h \text{ est fermé, } h \text{ est continue.}}$

c) Comme $H \subset \overline{H}$, $\overline{H} \neq \phi$. Soit $(x, y, \lambda) \in \overline{H}^2 \times \mathbb{R}$. Il existe (x_n) et (y_n) suites de H telles que $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ et $y = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lambda x_n + y_n \in H$, par TG $\lim\limits_{n\to\infty}(\lambda x_n + y_n) = \lambda x + y \in \overline{H}$

d'où $\boxed{\overline{H} \text{ sev de } E,}$

d) Soit H un hyperplan de E. Si $H \neq \overline{H}$, il existe $u \in \overline{H} - H$ et l'on a $H \oplus \text{vect}(u) = E$ (voir le cours dualité) donc, $\overline{H}$ étant un sev, $H \oplus \text{vect}(u) \subset \overline{H}$ soit $E \subset \overline{H}$ $(\subset E)$ d'où $\overline{H} = E$

d'où $\boxed{\overline{H} = H \text{ ou } \overline{H} = E \text{ : } H \text{ dense dans } E.}$

⟶ suite ⟶

III 1) a) $\forall y \in H$: $|h(x_0 - y)| \leq |||h|||.\|x_0 - y\|$ donc

$|h(x_0)| \leqslant \underbrace{|||h|||}_{\neq 0 \text{ car } h \neq 0}.\|x_0 - y\|$. d'où $\boxed{\|x_0 - y\| \geqslant \frac{|h(x_0)|}{|||h|||}}$

b) $\frac{|h(x_0)|}{|||h|||}$ est donc un minorant de $\{\|x_0 - y\|, y \in H\}$

d'où $\boxed{d(x_0, H) \geqslant \frac{|h(x_0)|}{|||h|||}}$

c) Si $x_0 \in H$, $0 \in \{\|x_0 - y\|, y \in H\}$ donc $0 \geqslant d(x_0, H) \geqslant 0$: $d(x_0, H) = 0$.

Réciproquement : si $d(x_0, H) = 0$, il existe (y_n) suite de H tel que $\|x_0 - y_n\| \xrightarrow[n \to \infty]{} d(x_0, H) = 0$ donc $y_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x_0$. On en déduit que $x_0 \in \overline{H} = H$. d'où $\boxed{d(x_0, H) = 0 \Leftrightarrow x_0 \in H}$

ou + simple avec le I 1)

d) i) voir page 15

ii) Comme $x_0 \notin H$, $H \oplus \text{vect}(x_0) = E$ d'où $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists y_n \in H$ et $\exists \lambda_n \in \mathbb{R}$ tel que $w_n = \lambda_n x_0 + y_n$.

De plus comme $|||h||| > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geqslant n_0$: $|h(w_n)| > 0$. soit $w_n \notin H$

d'où $\boxed{\forall n \geqslant n_0 \quad \lambda_n \neq 0}$

iii) $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad |h(w_n)| = \frac{|\lambda_n|\,|h(x_0)|}{\|\lambda_n x_0 + y_n\|} = \frac{\cancel{|\lambda_n|}\,|h(x_0)|}{\cancel{|\lambda_n|}\,\|x_0 + \frac{1}{\lambda_n} y_n\|}$

on $-\frac{1}{\lambda_n} y_n \in H$ donc $\|x_0 + \frac{1}{\lambda_n} y_n\| \geqslant d(x_0, H)$

d $\boxed{|h(w_n)| \leqslant \frac{|h(x_0)|}{d(x_0, H)}}$

e) Dans le cas où $x_0 \notin H$, on passe à la limite au 1) d) iii)
et avec le 1 b), on a l'égalité voulue. Enfin
cette égalité est valable (avec le 1 c)) si $x_0 \in H$

d $\boxed{\forall x_0 \in H \quad d(x_0, H) = \frac{|h(x_0)|}{|||h|||}}$

2) $E = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \lim_{n \to \infty} u_n = 0\} \subset \ell^\infty(\mathbb{R})$

Absolument

a) $\forall u \in E \quad \frac{u_n}{2^{n+1}} = O\left(\frac{1}{2^n}\right)$ donc par TC $\boxed{\left(\sum \frac{u_n}{2^{n+1}}\right) \text{ converge.}}$

b) Grâce au a), h bien définie. Par linéarité de la
somme d'une série, h est linéaire.

$\forall u \in E \quad |h(u)| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|u\|_\infty}{2^{n+1}} = \frac{\|u\|_\infty}{2} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \|u\|_\infty$

Csq $\boxed{h \text{ est continue et } |||h||| \leq 1}$

c) $\|v_p\|_\infty = \sup\{0, 1\} = 1 \quad (v_p \in E)$

$h(v_p) = \sum_{n=0}^{p} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1 - 1/2^p}{1 - 1/2}\right) = 1 - \frac{1}{2^p}$ csq $\boxed{\frac{h(v_p)}{\|v_p\|_\infty} = 1 - \frac{1}{2^p}}$

csq $\boxed{\lim_{p\to\infty} \frac{h(v_p)}{\|v_p\|_\infty} = 1}$

Comme $v_p \neq 0$ $\frac{|h(v_p)|}{\|v_p\|_\infty} \leq |||h|||$, d'où par $p\to\infty$, $1 \leq |||h|||$

cl $\boxed{|||h||| = 1}$

d) Supposons qu'il existe $u \in E-\{0\}$ \ $1 = \frac{|h(u)|}{\|u\|_\infty}$

On a $|h(u)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|u\|_\infty}{2^{n+1}} = \|u\|_\infty$

égalité si $\forall n$ $|u_n| = \|u_\infty\| \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$

Absurde : cl $\boxed{\forall u \in E-\{0\} \quad |h(u)| < \|u\|_\infty}$

e) Puisque h est continue, le II 2 a) assure que : $\boxed{H \text{ est fermé}}$

f) Soit $x_0 \notin H$ ($H \neq E$ cf II 2° d)) s'il existait $y \in H$ tel que $d(x_0, H) = \|x_0 - y\|_\infty$, alors on aurait $\|x_0 - y\|_\infty = \frac{|h(x_0)|}{|||h|||}$ (III 1e))

Comme $|h(x_0)| = |h(x_0 - y)|$ et $x_0 - y \neq 0$ ($x_0 \notin H$) on devrait avoir $|||h||| = \frac{|h(x_0-y)|}{\|x_0-y\|_\infty}$ Absurde vu le III 2 d)

cl $\boxed{d(x_0, H) \text{ n'est pas atteinte}}$

2) i) Par caractérisation séquentielle :

$\exists x_n \in E \setminus \|x_n\| \leq 1$ et $|h(x_n)| \longrightarrow |||h|||$,

Comme $h \neq 0$, $|||h||| > 0$ d'où $\exists n_0 \in \mathbb{N} \mid$

$\forall n \geq n_0 \; |h(x_n)| \geq |||h||| - \frac{|||h|||}{2} > 0$,

d'où $h(x_n) \neq 0$ et donc x_n ≠0 .

$\forall n \geq n_0 \; \|x_n\| \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{\|x_n\|} \geq 1$ donc :

$$|h(x_n)| \leq \left|h\left(\frac{x_n}{\|x_n\|}\right)\right| \leq |||h||| \quad \left(\text{car } \left\|\frac{x_n}{\|x_n\|}\right\| \leq 1\right)$$

Par TE $\left|h\left(\frac{x_n}{\|x_n\|}\right)\right| \longrightarrow |||h|||$

Posons $w_n = \frac{x_{n-n_0}}{\|x_{n-n_0}\|}$, on a

$\forall n \in \mathbb{N} \; \|w_n\| = 1$ et $|h(w_n)| \longrightarrow |||h|||$

Corrigé de l'exercice du DS6* : ↑

Corrigé du problème du DS6 * : ↓

1) S^{n-1} est la boule fermée de centre 0 et de rayon 1 pour la norme euclidienne (notée ici $\|\ \|$). S^{n-1} est donc borné et fermé comme image réciproque de $\{1\}$ par $x \mapsto \|x\|$ qui est continue sur $\mathbb{R}^n$ (car 1-lip). comme $\mathbb{R}^n$ est de dim. finie, d'où $\boxed{S^{n-1} \text{ compact de } \mathbb{R}^n}$

soit $f : \begin{array}{l} S^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \|Mx\| \end{array}$ est continue sur TG sur S^{n-1}, par théorème des bornes atteintes, $\boxed{\|M\|_{op} = \max f \text{ existe}}$

2) * $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\|M\|_{op} \in \mathbb{R}^+$

* ______, si $\|M\|_{op} = 0$, alors $\forall x \in S^{n-1}$, $\|Mx\| = 0$ donc $Mx = 0$, $\forall y \in \mathbb{R}^n$: si $y = 0$: $My = 0$ et si $y \neq 0$, $\frac{y}{\|y\|} \in S^{n-1}$ donc $M\frac{y}{\|y\|} = 0$ d'où $My = 0$, en considérant son endomorphisme canoniquement associé, $\underline{M = 0}$

* $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall x \in S^{n-1}$:
$\|\lambda M x\| \leqslant |\lambda|\,\|M\|_{op}$ donc $\underline{\|\lambda M\|_{op} \leqslant |\lambda| . \|M\|_{op}}$

si $\lambda = 0$ $\|\lambda M\|_{op} = |\lambda| . \|M\|_{op} = 0$

si $\lambda \neq 0$, $\|\frac{1}{\lambda}\lambda M\|_{op} \leqslant \frac{1}{|\lambda|}\|\lambda M\|_{op} \Rightarrow \underline{|\lambda|\,\|M\|_{op} \leqslant \|\lambda M\|_{op}}$

cqs $\underline{\|\lambda M\|_{op} = |\lambda|\ \|M\|_{op}}$

* $\forall (M,N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, $\forall x \in S^{n-1}$ $\|(M+N)x\| \leqslant \|M\|_{op} + \|N\|_{op}$

donc $\underline{\|M+N\|_{op} \leqslant \|M\|_{op} + \|N\|_{op}}$ d'où $\|\ \|_{op}$ norme

* $\forall (M,x,y) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times (\mathbb{R}^n)^2$, si $x - y = 0$: $\|Mx - My\| = 0 = \|M\|_{op} \times$

si $x - y \neq 0$: $\|M \frac{x-y}{\|x-y\|}\| \leqslant \|M\|_{op} \Rightarrow \underline{\|Mx - My\| \leqslant \|M\|_{op} \|x-y\|}$

3) * Si $M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, $\sigma(M) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$

$\forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in S^{n-1}$, $Mx = \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 \\ \vdots \\ \lambda_n x_n \end{pmatrix}$ et $\|Mx\| = \sqrt{\lambda_1^2 x_1^2 + \cdots + \lambda_n^2 x_n^2}$

d'où $\|Mx\| \leqslant \sqrt{\alpha^2 (x_1^2 + \cdots + x_n^2)} = \alpha$ avec $\alpha = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n}(|\lambda_i|)$

soit $j \setminus \alpha = |\lambda_j|$ et $x_j = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow$ j-ème ligne : $\|Mx_j\| = |\lambda_j| = \alpha$

cqs $\underline{\|M\|_{op} = \max\{|\lambda|, \lambda \in \sigma(M)\}}$

* cas géné : th spectral $\exists P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ $\exists D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \setminus$

③

$\Pi = PD\,{}^tP$ et $P = \mathrm{Pass}(b_0, b_1)$ avec b_0 base OTN

car Π sym de $\mathbb{R}^n$ et $b_1 = (u_1, \dots, u_n)$ base OTN de $\vec{vp}$:

$\Pi u_i = \lambda_i u_i$

$\forall x \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{b_1} \in S^{n-1}$ $\Pi x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i u_i$

$\Rightarrow \|\Pi x\| = \sqrt{\lambda_1^2 x_1^2 + \dots + \lambda_n^2 x_n^2}$

$\leq \alpha = \max(|\lambda_i|, i \in [\![1, n]\!])$

$\hookrightarrow$ égalité pour $x = u_j \setminus \alpha = |\lambda_j|$

d'où $\boxed{\|\Pi\|_{op} = \max\{|\lambda|, \lambda \in \sigma(\Pi)\}}$

4) $J_n = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ $\mathrm{rg}\, J_n = 1$ donc $\dim E_0(J) = n-1$ et

comme $\mathrm{Tr}(J_n) = n$, $\boxed{\sigma(J_n) = \{0, n\}}$

$\boxed{E_n(J_n) = \mathrm{vect}\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } E_0(J) = H_{/x_1 + \dots + x_n = 0} = E_n(J_n)^{\perp}}$

$\boxed{\|J_n\|_{op} = n}$ (avec la 3) car J_n symétrique)

5) Pour $x_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow$ j-ème ligne $\Pi x_j = \begin{pmatrix} \Pi_{1j} \\ \vdots \\ \Pi_{nj} \end{pmatrix}$ et

$\forall i$ $|\Pi_{ij}| \leq \sqrt{\Pi_{1j}^2 + \dots + \Pi_{nj}^2} = \|\Pi x_j\| \leq \|\Pi\|_{op}$

④

cqf $\|\Pi\|_{op}$ majore $\{|\Pi_{ij}|, (i,j) \in [\![1, n]\!]^2\}$

d'où : $\boxed{\max\{|\Pi_{ij}|;\ 1 \leq i,j \leq n\} \leq \|\Pi\|_{op}}$

6) $\Pi x = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} \Pi_{1j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} \Pi_{nj} x_j \end{pmatrix}$ avec $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in S^{n-1}$

$\|\Pi x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \Pi_{ij} x_j \right)^2$ cauchy schwarz ds $\mathbb{R}^n$

or $\left| \sum_{j=1}^{n} \Pi_{ij} x_j \right| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \Pi_{ij}^2} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \Pi_{ij}^2} \times 1$

d'où $\|\Pi x\|^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \Pi_{ij}^2$ d'où $\boxed{\|\Pi\|_{op} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \Pi_{ij}^2}}$

on a égalité ssi $\begin{pmatrix} \Pi_{1j} \\ \vdots \\ \Pi_{nj} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ sont colinéaires

donc en sommant il faut que toutes les colonnes de Π soient

colinéaires à $c = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in S^{n-1}$ tel que $\|\Pi\|_{op} = \|\Pi c\|$

d'où égalité ssi $\mathrm{rg}\,\Pi \leq 1$ d'où $\boxed{\|\Pi\|_{op} = \sqrt{\sum_i \sum_j \Pi_{ij}^2} \iff \mathrm{rg}\,\Pi \leq 1}$

7) Avec le CS $\|M\|_{op} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} 1^2} = n$ d'où $\boxed{\|M\|_{op} \leq n}$

si $M \in \Sigma_n$ et $\|M\|_{op} = n$ alors

$$\|M\|_{op}^2 = n^2 \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} M_{ij}^2 \leq n^2$$

donc $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (\underbrace{1 - M_{ij}^2}_{\geq 0}) = 0$ d'où $\forall i,j \quad M_{ij} = \pm 1$

d'où $M = \begin{pmatrix} \pm 1 & \cdots & \pm 1 \\ \vdots & & \vdots \\ \pm 1 & & \pm 1 \end{pmatrix}$ mais avec le cas d'égalité du CS,

il faut et il suffit $\operatorname{rg} M \leq 1$ d'où $M = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \lambda_2 \varepsilon_1 & \cdots & \lambda_n \varepsilon_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varepsilon_n & \lambda_2 \varepsilon_n & & \lambda_n \varepsilon_n \end{pmatrix}$

avec $\varepsilon_i, \lambda_i \in \{-1, 1\}$ qq et ind.

d'où $\boxed{\text{Il y a } 2^{n+n-1} = 2^{2n-1} \text{ telles matrices}}$

8) Avec les SE : $\operatorname{ch} t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!}$ et $e^{t^2/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{2^n n!}$

Mq $\forall n \in \mathbb{N} : 2^n n! \leq (2n)!$

$\forall n \geq 1 \quad (2n)! = n! \times \underbrace{(n+1)}_{\geq 2}\underbrace{(n+2)}_{\geq 2}\cdots\underbrace{(n+n)}_{\geq 2} \geq 2^n n!$

$n = 0 \quad 2^0 \cdot 0! = 1 \geq (2 \cdot 0)! = 1$ d'où $\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \quad \operatorname{ch} t \leq e^{t^2/2}}$

Sans les SE : on pose $g(t) = \ln(\operatorname{ch} t) - t^2/2$

$g'(t) = \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t} - t \qquad g''(t) = \frac{\cancel{\operatorname{ch} t}}{\cancel{\operatorname{ch} t}} - \frac{\operatorname{sh}^2 t}{\operatorname{ch}^2 t} - \cancel{1} < 0$

t	$-\infty$	0	$+\infty$
g''		$-$	
g'	$+\infty$	$\searrow 0 \searrow$	$-\infty$
g		$\nearrow 0 \searrow$	

donc $\forall t \in \mathbb{R} \quad g(t) \leq 0$

$\iff \ln(\operatorname{ch} t) \leq t^2/2$

$\iff \operatorname{ch} t \leq e^{t^2/2}$

9) Posons $\lambda = \frac{1+x}{2} \geq 0$ et $\lambda \leq \frac{1+1}{2} = 1$ donc $\lambda \in [0, 1]$,

ensuite $1 - \lambda = \frac{1-x}{2}$ et $x = 2\lambda - 1$

$$e^{tx} = e^{t(2\lambda - 1)} = e^{t(\lambda + \lambda - 1)} = e^{\lambda t + (1-\lambda)(-t)}$$

or $\exp'' = \exp \geq 0$ donc exp est convexe sur $\mathbb{R}$

d'où $e^{tx} = e^{\lambda t + (1-\lambda)(-t)} \leq \lambda e^t + (1-\lambda) e^{-t}$

d'où : $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in [-1, 1] \quad e^{tx} \leq \frac{1+x}{2} e^t + \frac{1-x}{2} e^{-t}}$

10) Posons $X(\Omega) = \{x_i \mid i \in I\}$ et $I \subset \mathbb{N}$ (X discrète)

Comme X est bornée par 1, $\forall i \in I \quad x_i \in [-1, 1]$.

$\forall i \in I : 0 \leq e^{tx_i} P(X = x_i) \leq e^t P(X = x_i)$ et $\left(\sum e^t P(X = x_i)\right)$ cvg

$\forall t \in \mathbb{R}$

donc par TC, $\left(\sum e^{tx_i} P(X = x_i)\right)$ cvg et par Th. de transfert,

e^{tX} admet une espérance finie et on a :

$$E(e^{tX}) = \sum_{i\in I} e^{tx_i} P(X=x_i)$$

Avec le 9), $e^{tx_i} \leq \frac{1+x_i}{2} e^{t} + \frac{1-x_i}{2} e^{-t}$, donc (tout cvg) :

$$\underline{E(e^{tX})} \leq \sum_{i\in I} \left(\frac{1+x_i}{2} e^{t} + \frac{1-x_i}{2} e^{-t}\right) P(X=x_i)$$

$$\leq \sum_{i\in I} \frac{e^t}{2} P(X=x_i) + \sum_{i\in I} \frac{x_i e^t}{2} P(X=x_i) + \sum_{i\in I} \frac{e^{-t}}{2} P(X=x_i) - \sum \frac{x_i e^{-t}}{2} P(X=x_i)$$

$$\leq \frac{e^t}{2}\times 1 + \frac{e^t}{2}\underbrace{E(X)}_{=0} + \frac{e^{-t}}{2}\times 1 + \frac{e^{-t}}{2}\underbrace{E(X)}_{=0}$$

$$\leq \frac{e^t+e^{-t}}{2} = \operatorname{ch} t \underline{\leq e^{t^2/2}}$$

d'où $\boxed{X \text{ est } 1\text{-sous gaussienne}}$

Posons $Y = \frac{X}{\alpha}$, $E(Y) = \frac{1}{\alpha} E(X) = 0$ donc Y centrée et bornée par 1, donc $\forall t \in \mathbb{R}$ $E(e^{\alpha t Y}) \leq e^{(\alpha t)^2/2}$ soit $\forall t \in \mathbb{R}$ $E(e^{tX}) \leq e^{\alpha^2 t^2/2}$ d'où : $\boxed{X\ \alpha \text{ sous-gaussienne}}$

11) $Y = \sum_{i=1}^{n} \mu_i X_i$, $e^{tY} = \prod_{i=1}^{n} e^{\mu_i t X_i}$ et comme $(X_1, \dots, X_n)$ sont mutuellement indép., $(\mu_1 t X_1, \dots, \mu_n t X_n)$ aussi et comme $e^{\mu_i t X_i}$ admet une espérance finie (cf. le 10°),

$$E(e^{tY}) = \prod_{i=1}^{n} E(e^{\mu_i t X_i}) \leq \prod_{i=1}^{n} e^{\alpha^2(\mu_i t)^2/2}$$

X_i α sous-gauss. et tout est ≥ 0

donc $E(e^{tY}) \leq e^{\alpha^2 \frac{t^2}{2}\underbrace{(\mu_1^2+\dots+\mu_n^2)}_{=1}} = e^{\alpha^2 t^2/2}$

d'où $\boxed{\sum_{i=1}^{n} \mu_i X_i \ \alpha\text{-sous gaussienne}}$

12) * On a $(X \geq \lambda) = (e^{tX} \geq e^{t\lambda})$ car $t>0$ et exp st↗ d'où

$$P(X\geq\lambda) = P(e^{tX} \geq e^{t\lambda}) \leq \frac{E(e^{tX})}{e^{t\lambda}} \quad \text{(inégalité de Markov)}$$

$$\leq e^{\alpha^2 t^2/2 - t\lambda} \quad (X\ \alpha\text{-sous G.})$$

d'où $\boxed{\forall t>0 \quad P(X\geq\lambda) \leq \exp\left(\alpha^2\frac{t^2}{2} - t\lambda\right)}$

* $(|X|\geq\lambda) = (X\geq\lambda) \cup (X \leq -\lambda) = (X\geq\lambda) \cup (-X\geq\lambda)$

Or $-X$ est aussi α-sous G car $E(e^{t(-X)}) = E(e^{-tX}) \leq e^{\alpha^2 t^2/2}$

donc $P(|X|\geq\lambda) = P(X\geq\lambda) + P(-X\leq\lambda)$ (réunion disjointe) $(\lambda>0)$

$$\leq 2e^{\frac{\alpha^2t^2}{2} - t\lambda} \quad \text{et ce } \forall t>0$$

Posons $g(t) = \frac{\alpha^2 t^2}{2} - t\lambda$, $g'(t) = \alpha^2 t - \lambda$ d'où :

$$\begin{array}{c|ccc} & 0 & \lambda/\alpha^2 & +\infty \\ \hline & 0 & & +\infty \\ & & \searrow \; -\lambda^2/2\alpha^2 \; \nearrow & \end{array}$$

$g\left(\frac{\lambda}{\alpha^2}\right) = -\frac{\lambda^2}{2\alpha^2}$

on a donc $P(|X| \geq \lambda) \leq 2 e^{g\left(\frac{\lambda}{\alpha^2}\right)} = 2 e^{-\lambda^2/2\alpha^2}$

d'où $\boxed{\forall \lambda > 0 \quad P(|X| \geq \lambda) \leq 2 \exp\left(\frac{-\lambda^2}{2\alpha^2}\right)}$

13) Posons $Y = \lfloor X \rfloor$, Y est une v.a.d. car $Y(\Omega) \subset \mathbb{Z}$ et $\forall k \in \mathbb{Z}$ $(Y = k) = (k \leq X < k+1) \in \mathcal{A}$.

Ensuite $0 \leq Y \leq X$ et $0 \leq X \leq Y + 1$ donc :

X admet une espérance finie $\Leftrightarrow$ Y admet une esp. finie.

D'autre part $\forall k \geq 1$, $\begin{cases} (X \geq k) \subset (Y+1 \geq k) = (Y \geq k-1) \\ (Y \geq k) \subset (X \geq k) \end{cases}$

d'où $0 \leq P(X \geq k) \leq P(Y \geq k-1)$

$0 \leq P(Y \geq k) \leq P(X \geq k)$

donc $\left(\sum P(X \geq k)\right)$ cvg $\Leftrightarrow$ $\left(\sum P(Y \geq k)\right)$ cvg

On en déduit de ces 2 équivalences et de la formule de l'antirépartition par Y que $\boxed{X \text{ admet une esp. finie} \Leftrightarrow \left(\sum P(X \geq k)\right) \text{ cvg}}$

Ensuite $(X \geq k) = (\lfloor X \rfloor \geq k)$ (double inclusion)

$$\begin{array}{ccc} | & | & | \\ k & \lfloor X \rfloor & X \end{array}$$

d'où si X admet une espérance finie,

$E(\lfloor X \rfloor) = \sum_{k \geq 1} P(\lfloor X \rfloor \geq k) = \sum_{k \geq 1} P(X \geq k)$

formule de l'antirépartition

Comme on a $\lfloor X \rfloor \leq X \leq \lfloor X \rfloor + 1$ et que l'espérance est croissante, d'où : $\boxed{\sum_{k \geq 1} P(X \geq k) \leq E(X) \leq \sum_{k \geq 1} P(X \geq k) + 1}$

14) $e^{\frac{\beta^2 X^2}{2}} \geq k \Leftrightarrow \beta^2 \frac{X^2}{2} \geq \ln k$ car $k > 0$

$\Leftrightarrow |X| \geq \sqrt{\frac{2 \ln k}{\beta^2}}$

d'où $P\left(e^{\frac{\beta^2 X^2}{2}} \geq k\right) = P\left(|X| \geq \sqrt{\frac{2 \ln k}{\beta^2}}\right) \leq 2 e^{-\frac{2 \ln k}{2\alpha^2 \beta^2}}$ ← c'est le 12)

d'où $\boxed{P\left(e^{\frac{\beta^2 X^2}{2}} \geq k\right) \leq 2 k^{-\eta} \quad \text{où } \eta = \alpha^{-2} \beta^{-2}}$

Avec le 13), comme $\left(\sum \frac{2}{k^\eta}\right)$ cvg $(\eta > 1)$, par TC, $e^{\frac{\beta^2 X^2}{2}}$ admet une espérance finie et $E\left(e^{\frac{\beta^2 X^2}{2}}\right) \leq 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} k^{-\eta}$

d' : $\boxed{E\left(e^{\frac{\beta^2 X^2}{2}}\right) \leq 1 + 2\zeta(\eta)}$

15) Supposons que $\forall A \subset K$, fini : $K \not\subset \bigcup_{a\in A} B_{a,\varepsilon/2}$

Soit $a_0 \in K$ (car $K \neq \emptyset$), pour $A=\{a_0\}$, $K \not\subset B_{a_0,\varepsilon/2}$: $\exists a_1 \in K \mid a_1 \notin B_{a_0,\varepsilon/2}$

donc $\|a_0 - a_1\| > \varepsilon/2$

pour $A = \{a_0, a_1\} \subset K$, fini : $\exists a_2 \in K \setminus \bigcup_{a\in A} B_{a,\varepsilon/2}$

donc $\|a_0 - a_2\| > \varepsilon/2$ et $\|a_1 - a_2\| > \varepsilon/2$

Supposons construit $(a_0, \dots, a_n) \in K^{n+1} \mid \forall 0 \leqslant i < j \leqslant n$:

$\|a_i - a_j\| > \varepsilon/2$

pour $A = \{a_0, \dots, a_n\} \subset K$ et fini donc $\exists a_{n+1} \in K - \bigcup_{i=0}^{n} B_{a_i,\varepsilon/2}$

et donc $\forall 0 \leqslant i < j \leqslant n+1$: $\|a_i - a_j\| > \varepsilon$

On en déduit l'existence d'1 suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de K telle que : $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2$ $i \neq j \Rightarrow \|a_i - a_j\| > \varepsilon/2$. cpt

D'après B.W., $\exists \lambda \in K$ et $\exists \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ st $\nearrow$ \

$\lim_{n\to\infty} a_{\varphi(n)} = \lambda$, d'où $\forall n \in \mathbb{N}$ $\frac{\varepsilon}{2} < \|a_{\varphi(n+1)} - a_{\varphi(n)}\| \xrightarrow[n\to\infty]{TG} \|\lambda - \lambda\| = 0$

donc $\frac{\varepsilon}{2} \leqslant 0$: absurde

d'où $\boxed{\exists A \subset K, \text{ fini} \mid K \subset \bigcup_{a\in A} B_{a,\varepsilon/2}}$

16) * si Λ est infini on a alors l'existence d'1 suite (a_n) qui vérifie les m̂ hypothèses qu'en 15) : absurde, donc

Λ fini

* Soit $A \subset K$, fini tel que $K \subset \bigcup_{a\in A} B_{a,\varepsilon/2}$

$\forall x \in \Lambda$ $\exists a_x \in A \mid x \in B_{a_x,\varepsilon/2}$ (car $\Lambda \subset K \subset \bigcup \dots$)

si $a_x = a_y \Rightarrow \|x - a_x\| \leqslant \varepsilon/2$ et $\|y - a_x\| \leqslant \varepsilon/2$

$\Rightarrow \|x - y\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \varepsilon$

comme $x \neq y \Rightarrow \|x - y\| > \varepsilon$, on a $a_x = a_y \Rightarrow x = y$

d'où $f : \Lambda \to A$, $x \mapsto a_x$ est injective, d'où $\boxed{|\Lambda| \leqslant |A|}$

* si Λ de cardinal maximal et supposons $K \not\subset \bigcup_{a\in\Lambda} B_{a,\varepsilon}$, donc $\exists x \in K \mid x \notin \bigcup_{a\in\Lambda} B_{a,\varepsilon}$ donc $\forall a \in \Lambda$ $\|a - x\| > \varepsilon$, d'où

$\Lambda' = \Lambda \cup \{x\}$ vérifie l'hypothèse : $\forall x \neq y$ de Λ' : $\|x - y\| > \varepsilon$

et $|\Lambda'| > |\Lambda|$: absurde d'où $\boxed{K \subset \bigcup_{a\in\Lambda} B_{a,\varepsilon}}$

17) * $\forall x \in B_{a,\varepsilon/2}$: $\|x - 0\| \leqslant \|x - a\| + \|a - 0\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + 1$ $(a \in S^{n-1})$

d'où $\boxed{B_{a,\varepsilon/2} \subset B_{0,1+\varepsilon/2}}$

$*\ \bigcup_{a\in\Lambda} B_{a,\varepsilon/2} \subset B_{0,1+\frac{\varepsilon}{2}}$

or les $B_{a,\varepsilon/2}$ sont 2 à 2 disjoints (même démo qu'au 16) d'où

$$\mu\Big(\bigcup_{a\in\Lambda} B_{a,\varepsilon/2}\Big) \leq \mu\big(B_{0,1+\frac{\varepsilon}{2}}\big)$$

$\Rightarrow |\Lambda|\cdot\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^n \leq \left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)^n$ d'où $\boxed{|\Lambda| \leq \left(\frac{2+\varepsilon}{\varepsilon}\right)^n}$

18) Si $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $\frac{2+\varepsilon}{\varepsilon} = 5$, d'après le 15), $\exists A \subset K = S^{n-1}$ tel que A fini et $S^{n-1} \subset \bigcup_{a\in A} B_{a,1/2}$.

Posons $I = \{ i \in \mathbb{N} \setminus \exists \Lambda \subset S^{n-1}, |\Lambda| = i$ et $\forall (x,y)\in\Lambda^2 . x\neq y \Rightarrow \|x-y\|>1\}$

On a $*I$ majorée par $|A|$ (c'est le 16'))

$*\ I \neq \emptyset : \Lambda = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\right\}$ convient donc $1 \in I$.

$*\ I$ possède donc un + gd elt p et donc $\exists \Lambda_0 \subset S^{n-1}$, $|\Lambda_0| = p$, Λ_0 de cardinal maximal donc (tj, le 16')) ;

$S^{n-1} \subset \bigcup_{a\in\Lambda_0} B_{a,1}$ et avec le 17) : d'où $\boxed{|\Lambda_0| \leq 5^n}$

19) $\forall i$ $y_i = \sum_{j=1}^n x_j \underbrace{\Pi^{(n)}_{i,j}}_{\text{mutuellement indépendants}}$ et $\sum_{j=1}^n x_j^2 = 1$ car $x \in S^{n-1}$

D'après le 11), $\boxed{y_i \text{ est } \alpha\text{-sous gaussienne}}$

Ensuite $(y_1, \dots, y_n)$ sont mutuellement indépendantes (c'est la même démo. que le lemme des coalitions), d'où $\left(e^{\gamma y_1^2}, \dots, e^{\gamma y_n^2}\right)$ aussi, cqs :

$$E\left(e^{\gamma\|y\|^2}\right) = E\left(e^{\sum_{i=1}^n \gamma y_i^2}\right) = \prod_{i=1}^n E\left(e^{\gamma y_i^2}\right) \underset{\text{c'est le 14)}}{\leq} 5^n$$

d'où $\boxed{E\left(e^{\gamma\|y\|^2}\right) \leq 5^n}$

$$\mathbb{P}(\|y\| \geq \eta\sqrt{n}) = \mathbb{P}\left(e^{\gamma\|y\|^2} \geq e^{\gamma\eta^2 n}\right) \underset{\text{Markov}}{\leq} \frac{5^n}{e^{\gamma\eta^2 n}} = \left(5e^{-\gamma\eta^2}\right)^n$$

d'où $\boxed{\mathbb{P}(\|y\| \geq \eta\sqrt{n}) \leq \left(5e^{-\gamma\eta^2}\right)^n}$

20) $\exists b \in S^{n-1} \setminus \|\Pi^{(n)}\|_{op} = \|\Pi^{(n)} b\|$ (cf 19))

d'après le 18), $\exists a \in \Lambda_n \setminus \|a-b\| \leq \frac{1}{2}$ d'où

$$\underbrace{\|\Pi^{(n)} b\|}_{\|\Pi^{(n)}\|_{op}} - \|\Pi^{(n)} a\| \leq \|\Pi^{(n)} b - M^{(n)} a\| \underset{\text{c'est le 2)}}{\leq} \|\Pi^{(n)}\|_{op} \|a-b\| \leq \frac{1}{2}\|\Pi^{(n)}\|_{op}$$

d'où $\|\Pi^{(n)} a\| \geq \|\Pi^{(n)} b\| - \frac{1}{2}\|\Pi^{(n)}\|_{op} = \frac{1}{2}\|\Pi^{(n)}\|_{op} \geq \eta\sqrt{n}$

d'où $\boxed{\exists a \in \Lambda_n \setminus \|\Pi^{(n)} a\| \geq \eta\sqrt{n}}$

On a donc $\left(\|M^{(n)}\|_{op} \geq 2r\sqrt{n}\right) \subset \bigcup_{a \in \Delta_n} \left(\|M^n a\| \geq r\sqrt{n}\right)$ (15)

d'où $\mathbb{P}\left(\|M^n\|_{op} \geq 2r\sqrt{n}\right) \leq \mathbb{P}\left(\bigcup \text{——}\right)$

$$\leq \sum_{a \in \Delta_n} \mathbb{P}\left(\|y_a\| \geq r\sqrt{n}\right)$$

(notation de 19)

$$\leq \sum_{a \in \Delta_n} \left(5 e^{-\gamma r^2}\right)^n$$ cf le

or $|\Delta_n| \leq 5^n$ (18))

ainsi $\mathbb{P}\left(\|M^{(n)}\|_{op} \geq 2r\sqrt{n}\right) \leq 5^n \left(5 e^{-\gamma r^2}\right)^n$

d'où $\boxed{\mathbb{P}\left(\|M^{(n)}\|_{op} \geq 2r\sqrt{n}\right) \leq \left(25 e^{-\gamma r^2}\right)^n}$