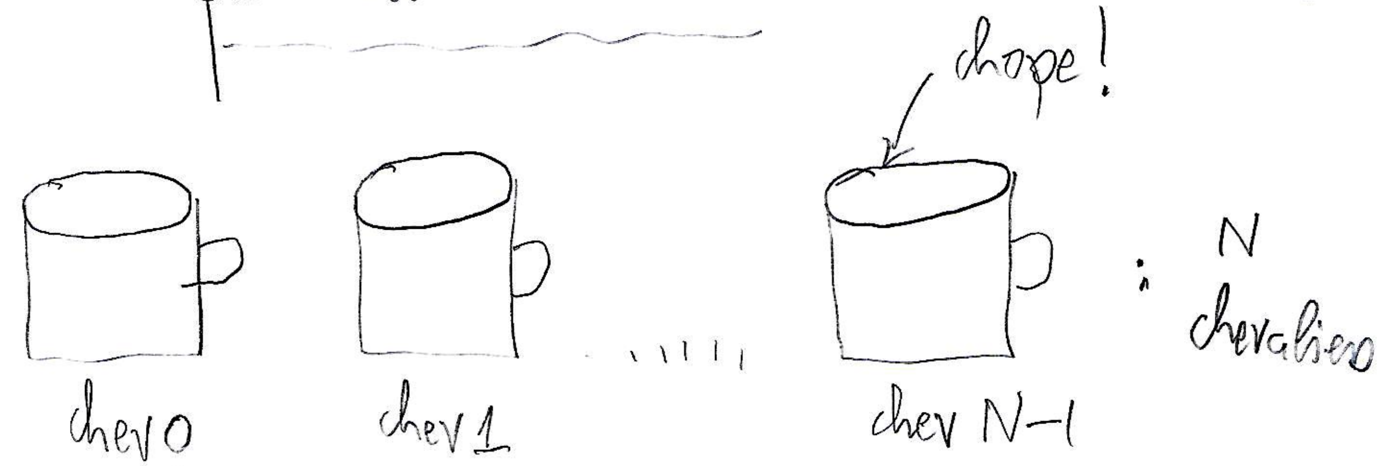
pb des chevaliers

a) 

↑ on pense à python

Le chevalier i prend sa chope, la "divise" en $N-1$ parts égales et distribue ces parts aux autres ($j \neq i$). On suppose que les chopes sont assez grandes et ne déborde jamais.

d'où la fonction <u>vidage(n, X)</u> :

for i in range(0, N−1) :
  for j in range(0, N−1) :
    if $j \neq i$ $X[j] = X[j] + \frac{1}{N-1} X[i]$

exemple
$X = [1, 2, 3]$
$\text{vidage}(3, X) = \left[\frac{29}{8}, \frac{19}{8}, 0\right]$

et $X = \text{vidage}(3, X)$ 10 fois donne à peu près $[4, 2, 0]$

Voir d'autre execution sur le corrigé python.

b) Matriciellement, le vidage VX pour $n=3$ est ; ②

si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, le premier vidage donne $\begin{pmatrix} 0 \\ y + \frac{x}{2} \\ z + \frac{x}{2} \end{pmatrix}$,

les 3 chopes au départ

le 2ème donne $\begin{pmatrix} \frac{y}{2} + \frac{x}{4} \\ z + \frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{x}{4} \end{pmatrix}$

les 3 chopes après les 3 vidages

et enfin le 3ème donne $VX = \begin{pmatrix} \frac{5}{8}x + \frac{3}{4}y + \frac{1}{2}z \\ \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{2}z \\ 0 \quad 0 \quad 0 \end{pmatrix}$

soit $V = \begin{pmatrix} 5/8 & 3/4 & 1/2 \\ 3/8 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

On trouve cette matrice pour tout N avec la fonction python : mat(n).

Exemple : $\text{mat}(3) = \begin{pmatrix} 0{,}625 & 0{,}75 & 0{,}5 \\ 0{,}375 & 0{,}25 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Enfin le a) à montrer expérimentalement que si l'on effectue beaucoup de vidage, la répartition se stabilise

Matriciellement cela veut dire que si X_0 est la répartition au départ après n vidages, la répartition vaut $X_n = V^n X_0$ et comme pour n grand,

$X_{n+1} = V X_n \approx X_n$, cela veut dire que X_n est (presque) un $\vec{vp}$ pour la vp 1,

Or avec l'exercice 34 de la page 34, $V^T \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

donc $sp(V) = \{1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\}$ et $\forall i \geqslant 2 \ |\lambda_i| < 1$

Si $E_1(V) = vect(\vec{u})$, on peut montrer que en général $\dfrac{X_n}{\|X_n\|_\infty} \xrightarrow[n \to \infty]{} \alpha \vec{u}$,

Voir les exemples sur les feuilles python.

```
# NainsChevaliersExecution.py

from numpy import *
from numpy.linalg import *


def vidage(n,X): # vidage effectue les n distributions à partir de X
    Y=X;
    for i in range(0,n):
        for j in range(0,n):
            if j!=i:
                Y[j]=Y[j]+Y[i]/(n-1)
        Y[i]=0
    return(Y)

def mat(n):
    M=[]
    for j in range(n):
        X=list(n*[0])
        X[j]=1
        Y=vidage(n,X)
        M=M+Y
    A=reshape(M,(n,n)) #matrice de taille n*n
    A=A.transpose() # on transpose
    return(A)


def normalisation(X,c): # fonction qui renvoie le vecteur c.X
    Y=X[::]
    for i in range(len(X)):
        Y[i]=c*Y[i]
    return(Y)


X=[1,20,300,14,175,784]
n=6
print('voici la distibution de départ: ',X)
for i in range(0,100):
    X=vidage(n,X)
print(' et voici la distibution après 100 passages: ',X)
```

```
print(' et voici la distibution après 101 passages: ',vidage(n,X))

print(' et voici X normalisé : ',normalisation(X,(n-1)/X[0]))

print('idem avec une autre dimension et un autre vecteur...')

X=[0,2,1300,14,1]
n=5
print('voici la distibution de départ: ',X)
for i in range(0,100):
    X=vidage(n,X)
print(' et voici la distibution après 100 passages: ',X)
print(' et voici la distibution après 101 passages: ',vidage(n,X))

print(' et voici X normalisé : ',normalisation(X,(n-1)/X[0]))


#A = matrix((5/8,3/4,1/2,3/8,1/4,1/2,0,0,0)).reshape((3,3))
print(' et voici la matrice qui effectue les n transformations : ')
A=mat(4)
X= matrix((7,2,3,10)).reshape((4,1)) #distribution de départ
print('A',A)
print('AX=',A*X) # renvoie toto(n,X)
print('et voici vidage(4,X)',vidage(4,[7,2,3,10]))
print('eigvals(A)=',eigvals(A)) # valeurs propre de A
print('eig(A)=',eig(A)) # vecteurs propre de A
print('Remarque: la présentation de eig(A) n''est pas très facile!!!')
print('eig(A) fournit un premier tableau des valeurs propres puis une matrice')
print('des vecteurs propres en colonne: si on regarde bien on retrouve bien ')
```

```
print('le vecteur [3,2,1,0] qui est solution du problème')

print('Voir la page Maple qui suit')

#ET L'EXECUTION :

#In [1]: (executing lines 1 to 70 of "NainsChevaliers.py")
#voici la distibution de départ:  [1, 20, 300, 14, 175, 784]
# et voici la distibution après 100 passages: [431.33333333333326, 345.0666666666666, 258.79999999999995, 172.5333333333333, 86.26666666666665, 0]
# et voici la distibution après 101 passages: [431.33333333333326, 345.0666666666666, 258.79999999999995, 172.5333333333333, 86.26666666666665, 0]
# et voici X normalisé :  [5.0, 4.0, 3.0, 2.0, 1.0, 0.0]
#idem avec une autre dimension et un autre vecteur...
#voici la distibution de départ:  [0, 2, 1300, 14, 1]
 #et voici la distibution après 100 passages: [526.8, 395.09999999999997, 263.4, 131.7, 0]
# et voici la distibution après 101 passages: [526.8, 395.09999999999997, 263.4, 131.7, 0]
# et voici X normalisé :  [4.0, 3.0, 2.0, 1.0, 0.0]
# et voici la matrice qui effectue les n transformations :
#A [[ 0.45679012  0.59259259  0.44444444  0.33333333]
# [ 0.34567901  0.25925926  0.44444444  0.33333333]
# [ 0.19753086  0.14814815  0.11111111  0.33333333]
# [ 0.          0.          0.          0.        ]]
#AX= [[ 9.04938272]
# [ 7.60493827]
```

```
# [ 5.34567901]
# [ 0.         ]]
#et voici vidage(4,X) [9.049382716049383, 7.604938271604939, 5.34567901234568, 0]
#eigvals(A)= [ 1.00000000+0.j -0.08641975+0.06983771j -0.08641975-0.06983771j
#  0.00000000+0.j        ]
#eig(A)= (array([ 1.00000000+0.j        , -0.08641975+0.06983771j,
#       -0.08641975-0.06983771j,  0.00000000+0.j        ]), array([[ 0.80178373+0.j        ,  0.70710678+0.j        ,
#         0.70710678-0.j        , -0.86602540+0.j        ],
#       [ 0.53452248+0.j        , -0.47140452+0.33333333j,
#        -0.47140452-0.33333333j,  0.28867513+0.j        ],
#       [ 0.26726124+0.j        , -0.23570226-0.33333333j,
#        -0.23570226+0.33333333j,  0.28867513+0.j        ],
#       [ 0.00000000+0.j        ,  0.00000000-0.j        ,
#         0.00000000+0.j        ,  0.28867513+0.j        ]]))
#Remarque: la présentation de eig(A) nest pas très facile!!!
#eig(A) fournit un premier tableau des valeurs propres puis une matrice
#des vecteurs propres en colonne: si on regarde bien on retrouve bien
#le vecteur [3,2,1,0] qui est solution du problème
#Voir la page Maple qui suit
```

```
> with(linalg):
Warning, the protected names norm and trace have been redefined and unprotected
> vidage:=proc(n,X)
> local Y,i,j;
> Y:=X;
> for i from 1 to n do
>   for j from 1 to n do
>     if j<>i then Y[j]:=Y[j]+Y[i]/(n-1);
>     fi;
>   od;
>  Y[i]:=0;
> od;
> Y; #le "return"
> end:
> X:=[1,2,123.,3,87];
                       X := [1, 2, 123., 3, 87]

> X:=vidage(5,X);
      X := [72.07128905, 71.50878905, 40.55566405, 31.86425780, 0]
> for i from 1 to 10 do X:=vidage(5,X);od;
      X := [86.68703935, 64.30538652, 44.06660174, 20.94097232, 0]

      X := [86.39449475, 64.90020816, 43.09204612, 21.61325092, 0]

      X := [86.40891736, 64.78420940, 43.20536496, 21.60150821, 0]

      X := [86.39807014, 64.80146046, 43.20040946, 21.60005990, 0]

      X := [86.40019636, 64.79995186, 43.19990898, 21.59994278, 0]

      X := [86.39999382, 64.79999358, 43.20000400, 21.60000858, 0]

      X := [86.39999889, 64.80000088, 43.20000076, 21.59999947, 0]

      X := [86.40000017, 64.80000002, 43.19999986, 21.59999998, 0]

      X := [86.40000001, 64.79999999, 43.20000001, 21.60000001, 0]

      X := [86.40000000, 64.80000000, 43.20000000, 21.60000000, 0]
>
> X:=[x,y,z];
                            X := [x, y, z]
> X:=vidage(3,X);
         X := [3/4 y + 5/8 x + 1/2 z, 1/2 z + 3/8 x + 1/4 y, 0]
> A:=matrix(3,3,[5/8,3/4,1/2,3/8,1/4,1/2,0,0,0]);
                            [5/8    3/4    1/2]
                            [                 ]
                       A := [3/8    1/4    1/2]
                            [                 ]
                            [ 0      0      0 ]
> eigenvects(A); # les éléments propres
  [1, 1, {[2, 1, 0]}], [-1/8, 1, {[1, -1, 0]}], [0, 1, {[-2, 1, 1]}]
> matriceVidage:=proc(n) # Matrice de l'opération de vidage
> local X,Z,A,i,j;
>  X:=[seq(x[i],i=1..n)];
>  Z:=vidage(n,X);A:=matrix(n,n);
>  for i from 1 to n do
>   for j from 1 to n do
>     A[i,j]:=coeff(Z[i],x[j],1);
>  od;od;
>  evalm(A);end:
>
> V:=matriceVidage(3);kernel(V-1);
                            [5/8    3/4    1/2]
                            [                 ]
                       V := [3/8    1/4    1/2]
                            [                 ]
                            [ 0      0      0 ]

                             {[2, 1, 0]}
```

```
> V:=matriceVidage(7);kernel(V-1);
            [70993     16807    2401   343    49                 ]
            [------ ,  ----- ,  ---- , ---- , --- , 7/36 , 1/6]
            [279936    46656    7776   1296   216                ]
            [                                                    ]
            [63217     9031     2401   343    49                 ]
            [------ ,  ----- ,  ---- , ---- , --- , 7/36 , 1/6]
            [279936    46656    7776   1296   216                ]
            [                                                    ]
            [54145     7735     1105   343    49                 ]
            [------ ,  ----- ,  ---- , ---- , --- , 7/36 , 1/6]
            [279936    46656    7776   1296   216                ]
            [                                                    ]
       V := [43561     6223     889    127    49                 ]
            [------ ,  ----- ,  ---- , ---- , --- , 7/36 , 1/6]
            [279936    46656    7776   1296   216                ]
            [                                                    ]
            [31213     4459     637     91    13                 ]
            [------ ,  ----- ,  ---- , ---- , --- , 7/36 , 1/6]
            [279936    46656    7776   1296   216                ]
            [                                                    ]
            [16807    2401    343     49                         ]
            [------ , ----- , ---- , ---- , 7/216 , 1/36 , 1/6]
            [279936   46656   7776   1296                        ]
            [                                                    ]
            [0 ,     0 ,     0 ,     0 ,     0 ,     0 ,     0]

                   {[6, 5, 4, 3, 2, 1, 0]}

>
>
```

E.P.I.T.A.

Corrigé de l'épreuve de mathématiques (3 h)

1°) *Calculs de probabilités conditionnelles*

a) La probabilité $\mathbb{P}_{AB_n}(AB_{n+1})$ est la probabilité, sachant que A et B sont face à face, que A et B ratent leurs cibles, et par indépendance des résultats des tirs, c'est $\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$.

b) La probabilité $\mathbb{P}_{AB_n}(A_{n+1})$ est la probabilité, sachant que A et B sont face à face, que A réussisse son tir et que B rate le sien.
Par indépendance des résultats des tirs, c'est $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$.
De même, on s'assurera que $\mathbb{P}_{AB_n}(B_{n+1}) = \frac{1}{9}$.
Enfin, la probabilité $\mathbb{P}_{AB_n}(\emptyset_{n+1})$ est la probabilité, sachant que A et B sont face à face, que A et B réussissent leurs tirs, et par indépendance des résultats des tirs, c'est $\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$.

c) Comme $(AB_n, A_n, B_n, \emptyset_n)$ forme un système complet d'événements, la formule des probabilités totales montre que la probabilité $\mathbb{P}(AB_{n+1})$ est égale à :

$$\mathbb{P}_{AB_n}(AB_{n+1})\,\mathbb{P}(AB_n) + \mathbb{P}_{A_n}(AB_{n+1})\,\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}_{B_n}(AB_{n+1})\,\mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}_{\emptyset_n}(AB_{n+1})\,\mathbb{P}(\emptyset_n).$$

Comme $\mathbb{P}_{A_n}(AB_{n+1}) = \mathbb{P}_{B_n}(AB_{n+1}) = \mathbb{P}_{\emptyset_n}(AB_{n+1}) = 0$, il reste donc :

$$\mathbb{P}(AB_{n+1}) = \mathbb{P}_{AB_n}(AB_{n+1})\,\mathbb{P}(AB_n) = \frac{2}{9}\,\mathbb{P}(AB_n).$$

En raisonnant de même, *et en n'écrivant que les termes non nuls*, on obtient :

$$\mathbb{P}(A_{n+1}) = \mathbb{P}_{AB_n}(A_{n+1})\,\mathbb{P}(AB_n) + \mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1})\,\mathbb{P}(A_n) = \frac{4}{9}\,\mathbb{P}(AB_n) + \mathbb{P}(A_n).$$

$$\mathbb{P}(B_{n+1}) = \mathbb{P}_{AB_n}(B_{n+1})\,\mathbb{P}(AB_n) + \mathbb{P}_{B_n}(B_{n+1})\,\mathbb{P}(B_n) = \frac{1}{9}\,\mathbb{P}(AB_n) + \mathbb{P}(B_n).$$

$$\mathbb{P}(\emptyset_{n+1}) = \mathbb{P}_{AB_n}(\emptyset_{n+1})\,\mathbb{P}(AB_n) + \mathbb{P}_{\emptyset_n}(\emptyset_{n+1})\,\mathbb{P}(\emptyset_n) = \frac{2}{9}\,\mathbb{P}(AB_n) + \mathbb{P}(\emptyset_n).$$

Ces relations se traduisent matriciellement comme suit :

$$E_{n+1} = E_n \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Et par récurrence facile, on a donc $E_n = E_0\, M^n = (1, 0, 0, 0)\, M^n$ où M est stochastique.

2°) *Diagonalisation de la matrice M*

a) La matrice M étant triangulaire, on lit sur sa diagonale ses valeurs propres : $\frac{2}{9}$, 1, 1, 1.

b) Le sous-espace propre associé à $\frac{2}{9}$ est clairement la droite Vect(e_1) où $e_1 = (1, 0, 0, 0)$.
En effet, si v est le vecteur de composantes x_1, x_2, x_3, x_4 dans la base canonique de $\mathbb{C}^4$, alors l'égalité $M\, v = \frac{2}{9}\, v$ équivaut à $x_2 = x_3 = x_4 = 0$.

Le sous-espace propre associé à 1 est l'hyperplan d'équation $7\, x_1 - 4\, x_2 - x_3 - 2\, x_4 = 0$.
En effet, si v est le vecteur de composantes x_1, x_2, x_3, x_4 dans la base canonique de $\mathbb{C}^4$, alors l'égalité $M\, v = v$ équivaut à $7\, x_1 - 4\, x_2 - x_3 - 2\, x_4 = 0$.
Il est de dimension 3 en tant qu'hyperplan de $\mathbb{R}^4$, et la somme des dimensions des sous-espaces propres de M étant égale à $1 + 3 = 4$, la matrice M est diagonalisable.

c) On considère 3 réels x, y, z et la matrice P définie par :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & x & y & z \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Le premier vecteur-colonne de P est vecteur propre associé à $\frac{2}{9}$.
Les vecteurs-colonnes suivants ne peuvent être associés à la valeur propre 2/9, et ils sont associés à 1 s'ils vérifient $7\, x_1 - 4\, x_2 - x_3 - 2\, x_4 = 0$. C'est le cas si $x = 4$, $y = 1$, $z = 2$.
La matrice P obtenue est inversible puisqu'elle est triangulaire avec $\det(P) = 7^3 \neq 0$.

En désignant par (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{C}^4$, on observe que :

$$P\, e_1 = e_1,\ P\, e_2 = 4\, e_1 + 7\, e_2,\ P\, e_3 = e_1 + 7\, e_3,\ P\, e_4 = 2\, e_1 + 7\, e_4.$$

Il en résulte que :

$$7\, e_2 = P\, e_2 - 4\, P\, e_1,\ 7\, e_3 = P\, e_3 - P\, e_1,\ 7\, e_4 = P\, e_4 - 2\, P\, e_1.$$

Puis en multipliant par P^{-1}:

$$P^{-1}\, e_1 = e_1,\ 7\, P^{-1}\, e_2 = e_2 - 4\, e_1,\ 7\, P^{-1}\, e_3 = e_3 - e_1,\ 7\, P^{-1}\, e_4 = e_4 - 2\, e_1.$$

La matrice inverse de P en résulte aussitôt :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 7 & -4 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sans faire aucun calcul, on observe que P est la matrice de passage de la base canonique à une base de vecteurs propres associés à $\frac{2}{9}$, 1, 1, 1.
Ainsi, $P^{-1}\, M\, P$ est la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à M dans la base de vecteurs propres précédente, et c'est donc la matrice suivante :

$$D = P^{-1}\, M\, P = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3°) *Probabilités pour que A ou B remportent le combat*

a) Par définition de la convergence d'une suite de matrices dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} D^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Et par continuité des opérations matricielles, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} M^n = \lim_{n\to+\infty} P\,D^n\,P^{-1} = P\left(\lim_{n\to+\infty} D^n\right)P^{-1}$$

$$= \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & -4 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

b) Comme $E_n = (1, 0, 0, 0)\,M^n$, on a $\lim E_n = (1, 0, 0, 0)\lim M^n = \left(0, \frac{4}{7}, \frac{1}{7}, \frac{2}{7}\right)$.

Donc A et B remportent le combat avec les probabilités $\frac{4}{7}$ et $\frac{1}{7}$, tous deux étant éliminés avec la probabilité $\frac{2}{7}$.

4°) *Durée moyenne du combat*

a) On a clairement $\mathbb{P}(T = 1) = \mathbb{P}(A_1 \cup B_1 \cup \emptyset_1)$, et ces trois événements étant deux à deux incompatibles, il vient $\mathbb{P}(T = 1) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(\emptyset_1) = \frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$.

b) Pour tout entier naturel n, on a $AB_1 \cap AB_2 \cap \ldots \cap AB_n = (T > n)$ car :

- si l'événement $AB_1 \cap AB_2 \cap \ldots \cap AB_n$ a lieu, le combat n'est pas fini à la $n^{\text{ème}}$ épreuve.
- si le combat n'est pas fini à la $n^{\text{ème}}$ épreuve, A et B sont encore en présence à ce moment et l'événement $AB_1 \cap AB_2 \cap \ldots \cap AB_n$ est bien réalisé.

Il en résulte qu'on a :

$$\mathbb{P}(T > n) = \mathbb{P}(AB_1 \cap AB_2 \cap \ldots \cap AB_n) = \mathbb{P}(AB_1)\,\mathbb{P}_{AB_1}(AB_2)\ \ldots \mathbb{P}_{AB_1\cap\ldots\cap AB_{n-1}}(AB_n).$$

Il en résulte que $\mathbb{P}(T > n) = \left(\frac{2}{9}\right)^n$ et comme $(T > n-1) = (T = n) \cup (T > n)$, on a :

$$\mathbb{P}(T = n) = \mathbb{P}(T > n-1) - \mathbb{P}(T > n) = \left(\frac{2}{9}\right)^{n-1} - \left(\frac{2}{9}\right)^n = \frac{7}{9}\left(\frac{2}{9}\right)^{n-1}.$$

On reconnaît une loi géométrique de paramètre 2/9.

c) Un simple calcul faisant intervenir la série géométrique conduit à :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(T = n) = \frac{7}{9}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{9}\right)^{n-1} = \frac{7}{9}\,\frac{1}{1-2/9} = 1.$$

De même, un calcul calcul faisant intervenir la série-dérivée de la série géométrique donne :

$$\mathbb{E}(T) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\,\mathbb{P}(T = n) = \frac{7}{9}\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{2}{9}\right)^{n-1} = \frac{7}{9}\,\frac{1}{(1-2/9)^2} = \frac{9}{7}.$$

■ Partie II

5°) *Premiers résultats de convergence*

a) Considérons deux matrices $A,\ B \in \mathcal{S}_n$ et montrons que $C = AB \in \mathcal{S}_n$:

- les coefficients $c_{i\,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i\,k}\, b_{k\,j}$ sont positifs puisque les $a_{i\,k}$ et $b_{k\,j}$ le sont.
- les sommes des lignes de $C = AB$ valent 1 puisqu'on a pour $1 \le i \le n$:

$$\sum_{j=1}^{n} c_{i\,j} = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{i\,k}\, b_{k\,j}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{i\,k}\, b_{k\,j}\right) = \sum_{k=1}^{n} a_{i\,k}\left(\sum_{j=1}^{n} b_{k\,j}\right) = \sum_{k=1}^{n} a_{i\,k} = 1.$$

Il en résulte aussitôt que les puissances d'une matrice stochastique sont stochastiques.

b) Si (M_k) est une suite de matrices stochastiques convergeant vers M, on sait que les coefficients $m_{i\,j}^{(k)}$ de M_k convergent vers les coefficients $m_{i\,j}$ de M, et donc :

- les coefficients $m_{i\,j} = \lim_{k\to+\infty} m_{i\,j}^{(k)}$ sont positifs puisque les $m_{i\,j}^{(k)}$ le sont.
- les sommes des lignes de M valent 1 puisque les lignes des M_k valent 1 :

$$\forall\, i \in [\![1,\, n]\!],\quad m_{i\,1} + m_{i\,2} + \ \ldots\ + m_{i\,n} = \lim_{k\to+\infty}\left(m_{i\,1}^{(k)} + m_{i\,2}^{(k)} + \ \ldots\ + m_{i\,n}^{(k)}\right) = 1.$$

c) Si la suite $\left(M^k\right)$ converge vers L, la suite $\left(M^{2\,k}\right)$ converge aussi vers L en tant que suite extraite de $\left(M^k\right)$, et elle converge vers L^2 en remarquant que $M^{2\,k} = M^k \times M^k$.

Par unicité de la limite, on a $L^2 = L$ et L est une matrice de projection.

5.d) Il s'agit donc d'établir que la suite $k \longrightarrow C_k$ converge vers $L = \lim M^k$, autrement dit que la suite réelle $\|C_k - L\|_\infty$ converge vers 0. A cet effet, remarquons d'abord que :

$$\|C_k - L\|_\infty = \frac{1}{n+1}\left\|\sum_{k=0}^{n}\left(M^k - L\right)\right\|_\infty \le \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\left\|M^k - L\right\|_\infty.$$

Par ailleurs, comme $L = \lim M^k$, on a par définition :

$$(\forall\, \varepsilon > 0),\ (\exists\, N \in \mathbb{N}),\ (\forall\, n \in \mathbb{N}) : \quad n \ge N \quad \Longrightarrow \quad \left\|M^k - L\right\|_\infty \le \varepsilon.$$

Pour $n \ge N$, on a donc :

$$\|C_k - L\|_\infty \le \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\left\|M^k - L\right\|_\infty = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{N-1}\left\|M^k - L\right\|_\infty + \frac{1}{n+1}\sum_{k=N}^{n}\left\|M^k - L\right\|_\infty.$$

La première somme $\sum_{k=0}^{N-1}\left\|M^k - L\right\|_\infty$ est une constante C.

La seconde somme compte moins de $n+1$ termes, tous inférieurs à ε.

On en déduit que :

$$\|C_k - L\|_\infty \le \frac{C}{n+1} + \varepsilon.$$

Le premier terme tend vers 0 et est aussi inférieur à ε pour $n \ge \frac{C}{\varepsilon} - 1$.

Ainsi donc, on a $\|C_k - L\|_\infty \le 2\,\varepsilon$ pour $n \ge \max\left(N,\ \frac{C}{\varepsilon} - 1\right)$.

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, cela signifie par définition que $\lim C_k = L$.

6°) *L'espace* $\mathbb{C}^n$ *est somme directe de* $\mathrm{Ker}(M - I_n)$ *et de* $\mathrm{Im}(M - I_n)$
a) Si M est stochastique, on a $M\, v_1 = v_1$ car la somme des lignes de M vaut 1.

b) Pour tout $x \in \mathbb{C}^n$, on a compte tenu de la positivité des coefficients $m_{i\,j}$ de M :

$$\forall\, i \in [\![1, n]\!], \qquad \left|\sum_{j=1}^{n} m_{i\,j}\, x_j\right| \le \sum_{j=1}^{n} m_{i\,j} \left|x_j\right| \le \sum_{j=1}^{n} m_{i\,j}\, \|x\|_\infty = \|x\|_\infty.$$

Cette majoration étant valable pour tout i, on en déduit que $\|Mx\|_\infty \le \|x\|_\infty$.
En particulier, si λ est une valeur propre de M et x un vecteur propre associé (donc non nul), on a $\|Mx\|_\infty = \|\lambda\, x\|_\infty = |\lambda|\, \|x\|_\infty \le \|x\|_\infty$, d'où $|\lambda| \le 1$.

On en déduit que $|\mathrm{Det}(M)| \le 1$ puisque $\mathrm{Det}(M)$ est le produit des n valeurs propres de M, et on a par inégalité triangulaire $|\mathrm{Tr}(M)| \le n$ puisque $\mathrm{Tr}(M)$ est leur somme.
Ajoutons que la matrice I_n est stochastique et réalise les égalités ci-dessus.

c) Si $y = Mx - x \in \mathrm{Im}(M - I_n) \cap \mathrm{Ker}(M - I_n)$, on a $My = y$, et en composant par M :

$$y = Mx - x, \quad y = M^2 x - Mx, \quad \dots\ , \quad y = M^{k-1} x - M^{k-2} x, \quad y = M^k x - M^{k-1} x.$$

Par addition, on obtient $k\, y = M^k x - x$, et puisque $M^k \in \mathcal{S}_n$ (qui est stable par produit) :

$$\|y\|_\infty = \frac{1}{k} \left\|M^k x - x\right\|_\infty \le \frac{1}{k} \left(\left\|M^k x\right\|_\infty + \|x\|_\infty\right) \le \frac{2\,\|x\|_\infty}{k}.$$

d) En faisant tendre k vers $+\infty$, on en déduit $y = 0$.
On a donc $\mathrm{Im}(M - I_n) \cap \mathrm{Ker}(M - I_n) = \{0\}$. Ainsi, la somme $\mathrm{Im}(M - I_n) \oplus \mathrm{Ker}(M - I_n)$ est directe, et comme le théorème du rang montre que sa dimension est n, on a établi que $\mathrm{Im}(M - I_n) \oplus \mathrm{Ker}(M - I_n) = \mathbb{C}^n$.

7°) *Etude de la convergence de la suite* $k \longrightarrow C_k$
a) Pour tout $x \in \mathbb{C}^n$, posons $x = x_1 + x_2$ où $x_1 \in \mathrm{Ker}(M - I_n)$ et $x_2 \in \mathrm{Im}(M - I_n)$.
On a donc $M\, x_1 = x_1$ et il existe $z \in \mathbb{C}^n$ tel que $x_2 = Mz - z$, ce qui donne :

$$C_k\, x = \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k} M^j x = x_1 + \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k} \left(M^{j+1} z - M^j z\right) = x_1 + \frac{1}{k+1} \left(M^{k+1} z - z\right).$$

Compte tenu de $M^k \in \mathcal{S}_n$ (qui est stable par produit) et de la question 6°, on en déduit :

$$\|C_k\, x - x_1\|_\infty = \frac{1}{k+1} \left\|M^{k+1} z - z\right\|_\infty \le \frac{1}{k+1} \left(\left\|M^{k+1} z\right\|_\infty + \|z\|_\infty\right) \le \frac{2\,\|z\|_\infty}{k+1}.$$

Comme $x_1 = Px$, on obtient en faisant tendre k vers $+\infty$: $\lim C_k\, x = Px$.

b) Quitte à appliquer ceci aux vecteurs $e_1, \dots, e_n$, on observe que $C_k\, e_j$, qui n'est autre que la $j^{\text{ème}}$ colonne de C_k, converge vers Pe_j, qui n'est autre que la $j^{\text{ème}}$ colonne de P.
Ainsi, chaque élément de C_k a pour limite l'élément correspondant de P, ce qui signifie que la suite (C_k) converge vers P au sens de $\|\,.\,\|_\infty$ (ou de toute autre norme, qui est équivalente puisque l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est de dimension finie).

c) Si la suite $\left(M^k\right)$ converge vers L, on a démontré que (C_k) converge aussi vers L, et comme on vient de voir que (C_k) converge vers P, ceci implique que si $\left(M^k\right)$ converge, c'est vers la matrice de projection P sur $\mathrm{Ker}(M - I_n)$ dans la direction $\mathrm{Im}(M - I_n)$.

8°) *Etude de la convergence de la suite $k \longrightarrow M^k$*

a) Si $\lambda \neq 1$ est valeur propre de M et si x est vecteur propre associé, on a $Mx = \lambda\, x$.
Donc $(M - I_n)\, x = (\lambda - 1)\, x$, d'où $x = (M - I_n)\, \frac{x}{\lambda - 1} \in \mathrm{Im}(M - I_n)$.
Il en résulte que $\mathrm{Ker}(M - \lambda\, I_n) \subset \mathrm{Im}(M - I_n)$ pour λ valeur propre de M distincte de 1.

b) Par conséquent, la somme directe des sous-espaces propres associés aux valeurs propres $\lambda \neq 1$ est bien incluse dans $\mathrm{Im}(M - I_n)$.
Et comme M est diagonalisable, la somme directe des sous-espaces propres de M est $\mathbb{C}^n$:

$$\mathrm{Ker}(M - I_n) \oplus \mathrm{Ker}(M - \lambda_2\, I_n) \oplus\ \ldots\ \oplus \mathrm{Ker}\left(M - \lambda_p\, I_n\right) = \mathbb{C}^n.$$

On en déduit que $\sum_{i=2}^{p} \dim(\mathrm{Ker}(M - \lambda_i\, I_n) = n - \dim(\mathrm{Ker}(M - I_n)) = \dim(\mathrm{Im}(M - I_n))$.
Et comme la somme directe des sous-espaces propres associées aux valeurs propres autres que 1 est incluse dans $\mathrm{Im}(M - I_n)$, cette égalité des dimensions donne le résultat voulu :

$$\mathrm{Ker}(M - \lambda_2\, I_n) \oplus\ \ldots\ \oplus \mathrm{Ker}\left(M - \lambda_p\, I_n\right) = \mathrm{Im}(M - I_n).$$

c) Comme M diagonalisable, tout vecteur x peut s'écrire $x = x_1 + x_2 +\ \ldots\ + x_p$ où chaque x_i appartient au sous-espace propre $\mathrm{Ker}(M - \lambda_i\, I_n)$ et vérifie donc $M\, x_i = \lambda_i\, x_i$.
Notons que x_1 étant la projection sur $\mathrm{Ker}(M - I_n)$ dans la direction de la somme des autres sous-espaces propres dont on a vu qu'elle est égale à $\mathrm{Im}(M - I_n)$, c'est la projection sur $\mathrm{Ker}(M - I_n)$ dans la direction $\mathrm{Im}(M - I_n)$, de sorte qu'on a bien $x_1 = P\,x$.
Par ailleurs, comme on a $M\, x_i = \lambda_i\, x_i$ pour $1 \leq i \leq p$ avec $\lambda_1 = 1$, il est clair que :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad M^k\, x = x_1 + \lambda_2^k\, x_2 +\ \ldots\ + \lambda_p^k\, x_k.$$

On en déduit que $M^k\, x - Px = M^k\, x - x_1 = \lambda_2^k\, x_2 +\ \ldots\ + \lambda_p^k\, x_k$.
Par inégalité triangulaire, on a alors :

$$\left\|M^k\, x - Px\right\|_\infty \leq |\lambda_2|^k\, \|x_2\|_\infty +\ \ldots\ + \left|\lambda_p\right|^k\, \|x_k\|_\infty.$$

Les valeurs propres $\lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_p$ autres que 1 étant ici de module strictement inférieur à 1, cette expression tend bien vers 0 quand k tend vers $+\infty$, ce qui implique $\lim M^k\, x = P\,x$.
Quitte à appliquer ceci aux vecteurs $e_1,\ \ldots,\ e_n$, on observe que $M^k\, e_j$, qui n'est autre que la $j^{\text{ème}}$ colonne de M^k, converge vers Pe_j, qui n'est autre que la $j^{\text{ème}}$ colonne de P.
Ainsi, chaque élément de M^k a pour limite l'élément correspondant de P, ce qui signifie que la suite $\left(M^k\right)$ converge vers P au sens de $\|\,.\,\|_\infty$ (ou de toute autre norme).

d) Comme la suite $k \longrightarrow M^k$ converge dès lors que M est diagonalisable et que 1 est sa seule valeur propre de module 1, considérons la matrice suivante dont les valeurs propres sont ± 1 :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice M est clairement stochastique, et on voit que $M^2 = I_2$, donc $M^3 = M$, etc.
On a ainsi $M^{2\,k} = I_2$ et $M^{2\,k+1} = M$ pour tout entier naturel k.
Et comme $M \neq I_2$, il est clair que la suite $\left(M^k\right)$ est alors divergente.
