SPE MP ······ 2025-2026 | PROGRAMME DE COLLE 14

COLLE TROIS EN UN

I. EXERCICES : TOUT SUR LES EVN

II. COURS et EXERCICES : FONCTIONS VECTORIELLES DE LA VARIABLE RÉELLE

I. Dérivée en un point, fonctions de classe C^1

Si u est une application **linéaire** de F dans un $\mathbb{K}$-ev, G et si $f \in C^1(I,F)$ dérivée de $u \circ f$.
Soient F, G et H trois $\mathbb{K}$-ev et B une application **bilinéaire** de $F \times G$ dans H. Si $f \in C^1(I,F)$ et $g \in C^1(I,G)$ alors • $\boxed{B(f,g) \in C^1(I,H) \text{ et } (B(f,g))' = B(f',g) + B(f,g')}$.

Composition : Soit I et J, 2 **intervalles** de $\mathbb{R}$, soit $f \in C^1(I,F)$ et $\varphi \in C^1(J,\mathbb{R})$ telle que $\varphi(J) \subset I$, alors • $\boxed{f \circ \varphi \in C^1(J,\mathbb{R}) \text{ et } (f \circ \varphi)' = \varphi' \cdot (f' \circ \varphi)}$.

Dérivabilité et Base de F

II. Fonctions de classe C^k - Formule de Leibniz

III. Intégrale sur un segment

• ***Théorème***

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une **base** de E et soit f une **fonction vectorielle, continue par morceaux** de $I = [a,b]$ dans E, un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie p.
On définit les **fonctions coordonnées** de f : f_1, …, f_p de I dans $\mathbb{K}$ par la **relation** :
On a alors
$\left(\int_{[a,b]} f_1(x)\,\mathrm{d}x\right) e_1 + \cdots + \left(\int_{[a,b]} f_p(x)\,\mathrm{d}x\right) e_p$ ne dépend pas de la base $\mathcal{B}$ choisie et ne dépend donc que de f.

Linéarité , ***Modification d'une fonction en un nombre finie de valeurs*** , ***Chasles***
Intégrale de la borne supérieure

• **Théorème fondamental** : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in I$.

i) Si f est continue par morceaux de I dans E alors $F : x \longmapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est C^0 sur I.

ii) Si f est C^0 sur I alors $F : x \longmapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est une primitive de f (:$F' = f$). F est C^1 sur I. Plus précisément, F est la primitive de f qui s'annule en a.

Somme de Riemann - ***Inégalité triangulaire***
Techniques de calcul : CDV et IPP

IV. • Inégalité des Accroissements Finis et Formules de Taylor (T.R.I. - I.T.L. et T.Y.)

II. EXERCICES Tout sur l'intégration sur un segment de la MPSI

Cauchy-Schwarz, Somme de Riemann, intégration des fonctions complexes : application : $\int e^t \sin t\,\mathrm{d}t$, étude de la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, Changement de variables ... et **Primitives des fonctions usuelles** :
Mes chers étudiants doivent savoir effectuer entre autre le calcul des primitives des fractions rationnelles, des fractions trigonométriques (règle de Bioche), des fonctions du type $\int R(x, \sqrt{ax+b})dx$, $\int R(x, \sqrt{x^2+1})dx$, $\int R(x, \sqrt{x^2-1})dx$, $\int R(x, \sqrt{1-x^2})dx$.

Prévisions : Fonctions intégrables

JOYEUSES FÊTES DE FIN D'ANNÉE