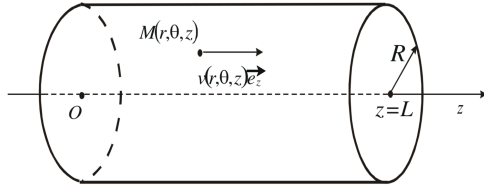


## DM n°7

*Électromagnétisme, Optique géométrique***Exercice 1 : Effet de peau dans un fil de cuivre**

On considère un fil de cuivre cylindrique de rayon  $R$  et de longueur  $L$  très grande devant le rayon. Ce fil est placé dans le vide. On note  $\sigma_0$  sa conductivité électrique supposée constante. On appelle  $(Oz)$  l'axe du fil de vecteur unitaire  $\vec{e}_z$ .



On prendra :  $\sigma_0 = 6,2 \times 10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$ ,  $\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$ ,  $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$ .

**Q.1** On applique une différence de potentiel  $U$  constante entre les deux extrémités du fil de cuivre. En supposant que le champ électrique créé dans le cuivre est uniforme, donner l'expression littérale de la norme  $J$  du vecteur densité volumique de courant en fonction de  $\sigma_0$ ,  $U$  et  $L$ .

**Q.2** Calculer alors l'intensité du courant traversant le fil de cuivre et en déduire l'expression littérale de la résistance électrique  $R_{elec}$  de ce fil.

Application numérique : calculer la résistance linéique  $R_{lin}$  de ce fil de section  $2,5 \text{ mm}^2$ .

Dans la suite, un courant sinusoïdal d'intensité  $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$  traverse le fil. La fréquence du courant est inférieure au térahertz ( $1 \text{ THz} = 10^{12} \text{ Hz}$ ).

**Q.3** Montrer que l'on peut négliger le courant de déplacement dans l'équation de Maxwell-Ampère.

**Q.4** Établir que le vecteur densité volumique de courant  $\vec{j}$  satisfait à l'équation différentielle suivante :

$$\Delta \vec{j} = \xi \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}$$

avec  $\xi$  à exprimer en fonction des données du problème.

Les symétries du problème permettent d'écrire le vecteur densité volumique de courant sous la forme complexe  $\vec{j} = J_0(r) e^{i\omega t} \vec{e}_z$  où  $r$  est la distance d'un point  $M$  du fil par rapport à l'axe. On donne, en coordonnées cylindriques, le Laplacien scalaire :  $\Delta(f(r)) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{df}{dr} \right)$ .

**Q.5** Établir l'équation différentielle du second ordre vérifiée par  $J_0(r)$ . On introduira la quantité  $\delta = \sqrt{\frac{2}{\sigma_0 \mu_0 \omega}}$ .

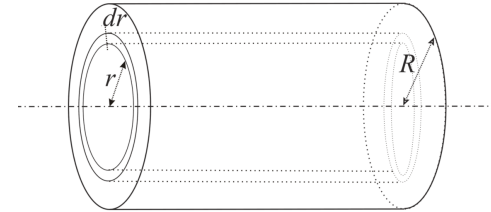
**Q.6** Calculer  $\delta$  à la fréquence 1 GHz. Comparer cette grandeur au rayon du fil de section  $2,5 \text{ mm}^2$ .

La résolution de l'équation différentielle précédente n'est pas demandée. On propose le modèle suivant : la conductivité électrique est une fonction exponentielle de la distance  $r$  suivant la loi  $\sigma(r) = \sigma_0 \exp\left(\frac{r-R}{\delta}\right)$ .

**Q.7** Tracer l'allure de  $\sigma(r)$  en précisant la tangente à la courbe en  $r = R$ . Quelle est l'abscisse du point d'intersection de cette tangente avec l'axe des abscisses ?

**Q.8** Justifier le fait que, en haute fréquence, on utilise des câbles formés de multiples brins de cuivre très fins et isolés électriquement les uns des autres (fils de Litz). Justifier également le fait que l'on recouvre les conducteurs en cuivre des circuits imprimés d'une mince pellicule d'argent.

On se propose maintenant de déterminer la résistance du fil de cuivre avec le modèle de conductivité choisi. On découpe la section circulaire du fil en éléments de surface annulaires de largeur  $dr$  et de longueur  $2\pi r$ . On découpe ainsi le fil en éléments de volume.



**Q.9** Quelle est la conductance électrique élémentaire  $dG$  d'un tel élément de volume ? On l'exprimera en fonction de  $r$ ,  $\sigma(r)$ ,  $dr$  et  $L$ .

**Q.10** Comment sont "branchés" entre eux ces éléments de volume ? En déduire la conductance totale  $G$  du fil en fonction de  $\delta$ ,  $R$ ,  $L$  et  $\sigma_0$ .

## Exercice 2 : Capture d'empreintes digitales par réflexion totale

Il existe différentes technologies de capteurs d'empreinte digitale, c'est-à-dire de dispositifs permettant d'obtenir une image numérisée d'une empreinte digitale, le plus souvent à des fins d'identification. Certaines de ces technologies sont embarquées dans des smartphones. La technologie dite *capteur optique d'empreinte digitale* est très employée, elle repose sur le phénomène de réflexion totale frustrée qui est l'objet de cette étude.

Le doigt est posé à plat sur l'hypoténuse d'un prisme droit isocèle taillé dans un verre d'indice optique noté  $n$ . Il est éclairé par une diode laser de longueur d'onde  $\lambda_0$  dans le vide. L'image de l'empreinte digitale à travers un système optique est formée sur un capteur CCD puis numérisée. La Fig. 2 décrit le schéma de principe de ce dispositif.



FIGURE 1 – Capteur d'empreinte digitale

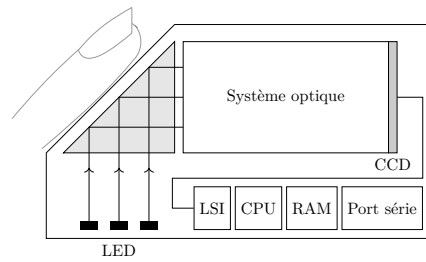


FIGURE 2 – Schéma de principe

En première approche, le système optique se résume à la traversée d'un dioptre ( $\mathcal{D}$ ) et d'une lentille convergente ( $\mathcal{L}$ ) (Fig. 3). Si  $A$  est un point objet de l'empreinte digitale, alors on note  $A_1$  l'image de  $A$  à travers le dioptre ( $\mathcal{D}$ ) et  $A'_1$  celle de  $A_1$  à travers la lentille ( $\mathcal{L}$ ) :

$$A \xrightarrow{(\mathcal{D})} A_1 \xrightarrow{(\mathcal{L})} A'_1$$

On définit également les longueurs algébriques suivantes :

$$D_1 = \overline{A_1 A'_1}, \quad D = \overline{A A'_1}, \quad p = \overline{O A_1}, \quad p' = \overline{O A'_1}$$

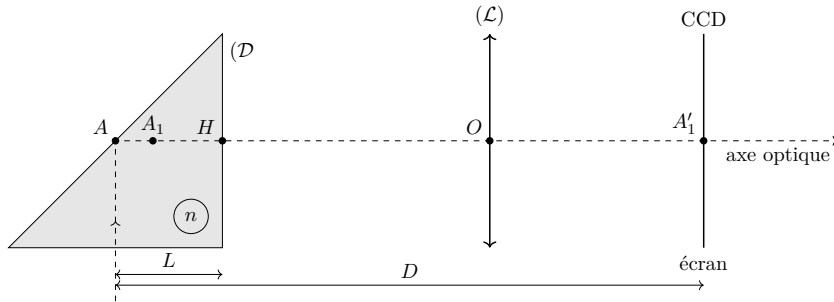


FIGURE 3 – Scéma optique

### I – Optique géométrique

#### I.A Conception du système optique

L'objectif ici est de choisir la distance focale  $f'$  de la lentille et sa position, par exemple en déterminant  $p'$ . À cet effet, on donne  $n = 1,5$ ,  $L = 3 \text{ cm}$ ,  $D = 10 \text{ cm}$  et le grandissement transversal  $\gamma = p'/p$  du système optique.

- Q.1** Montrer que, dans les conditions de Gauss, la relation de conjugaison entre  $A$  et  $A_1$  par le dioptre plan formé par la face de sortie du prisme s'écrit  $\overline{H A_1} = \frac{1}{n} \overline{H A}$ .

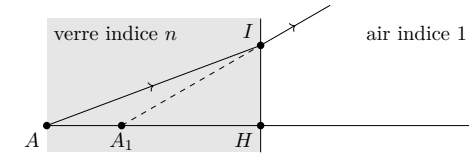


FIGURE 4

- Q.2** Exprimer  $p$  et  $p'$  en fonction de  $D_1$  et de  $\gamma$ . Déterminer alors  $f'$  en fonction de  $D_1$  et de  $\gamma$  à l'aide de la formule de conjugaison de Descartes :  $\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'}$ .

- Q.3** On souhaite déterminer la condition portant sur la distance focale  $f'$  d'une lentille convergente si l'on veut former l'image réelle sur un écran situé à une distance  $D_1$  d'un objet réel. En remarquant qu'il faut  $\gamma < 0$  pour obtenir une image réelle d'un objet réel, montrer que le rapport  $D_1/f'$  est inférieurement borné. En déduire l'inégalité vérifiée par  $f'$ .

- Q.4** Applications numériques : on suppose  $\gamma = -2$ . À quelle distance place-t-on la lentille devant l'écran et quelle est sa focale ?

- Q.5** On souhaite avoir une image la plus agrandie possible ( $|\gamma|$  maximal), mais sans augmenter l'encombrement du dispositif, ce qui impose de ne pas augmenter la longueur  $D_1$ . Dans quel sens faut-il faire varier  $f'$  ? En pratique, quelle limitation rencontre-t-on ?

#### I.B Résolution de l'image

Dans cette sous-partie, on fait abstraction du prisme, on considère que l'empreinte est positionnée en  $A_1$  au lieu de  $A$ . Une empreinte digitale est faite de sillons de profondeur moyenne  $e = 30 \mu\text{m}$  et dont deux crêtes voisines parallèles sont distantes de  $a = 100 \mu\text{m}$ . On note  $l_c$  la largeur d'un pixel (considéré comme étant de forme carrée) du capteur CCD. On cherche à obtenir l'image des crêtes du sillon sur le capteur CCD : la lentille conjugue le plan des crêtes, où se situe  $A_1$ , à l'écran CCD (Fig. 5).

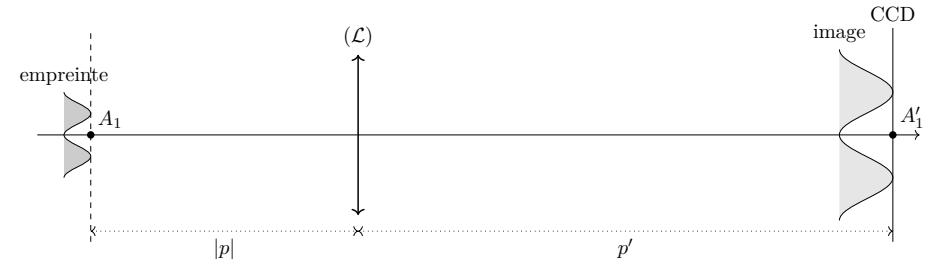


FIGURE 5

Sur la Fig. 6, les points  $M_1$ ,  $M_2$  et  $M_3$  détaillent le motif de l'empreinte et leurs images respectives  $M'_1$ ,  $M'_2$  et  $M'_3$  détaillent l'image de l'empreinte. On remarque que le point  $M'_2$  ne se forme pas tout à fait sur la surface du CCD, les rayons lumineux délimités par la monture de la lentille viennent former une petite tâche circulaire de diamètre  $\phi$ .

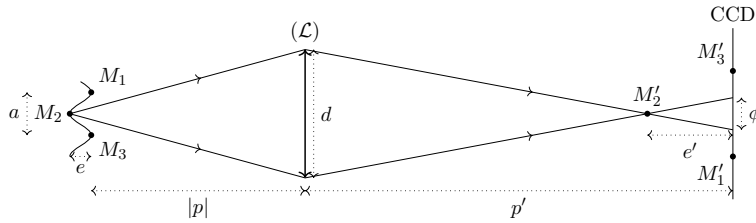


FIGURE 6 – Formation de l'image d'un sillon d'empreinte digitale

On note  $p'$  la distance entre la lentille et la surface du CCD et  $|p|$  avec  $p < 0$ , la distance entre la lentille et le plan formé par les points objets  $M_1$  et  $M_3$ . On note alors  $\gamma = p'/p$  le grandissement entre les couples de points conjugués  $(M_1, M'_1)$  et  $(M_3, M'_3)$ . On a  $\gamma = -2$ .

**Q.6** À quelle condition sur  $a$  et sur  $l_c$  peut-on distinguer deux crêtes successives? Quelle taille de pixel recommandez-vous?

**Q.7** On note  $d$  le diamètre de la monture de la lentille  $(\mathcal{L})$ . Montrer que  $\phi = \gamma d \frac{e}{p}$ , dans l'approximation  $e \ll |p|$ . En notant  $e'$  la distance de  $M'_2$  à la surface du capteur CCD, on pourra montrer  $e' \approx \gamma^2 e$ .

**Q.8** On voudrait que seules les crêtes soient nettes sur l'image et donc que les creux apparaissent flous. Pour cela, il faudrait que le diamètre  $\phi$  de la tache excède la distance  $M'_1 M'_3$ . Quelle inégalité doit alors vérifier le diamètre  $d$  de la monture? Montrer, en argumentant sur les ordres de grandeur, que c'est contraire au respect des conditions de Gauss.

### I.C Réflexion totale

Un montage simple avec une lentille ne permet donc pas de capturer facilement les empreintes digitales de sorte que seules les crêtes apparaissent sur l'image. On reprend donc le dispositif complet, incluant le prisme.

**Q.9** Énoncer soigneusement les lois de Snell-Descartes.

**Q.10** Définir la réflexion totale et en donner les conditions.

**Q.11** Étant donné la position de l'empreinte digitale, si on s'en tient strictement à l'énoncé des lois de Descartes, peut-on éclairer le doigt, afin de former son image sur le capteur CCD? On rappelle que  $n = 1,5$ .

Dans le montage proposé, la lentille permettra d'obtenir l'image du doigt sur l'écran du CCD. Néanmoins, il faut aborder l'optique ondulatoire pour comprendre comment le doigt est éclairé au travers du prisme.

## II – Passage d'une onde électromagnétique sur un dioptre

### II.A Relation de dispersion

**Q.12** Rappeler les équations de Maxwell dans une région vide de courant et de charge. En déduire l'équation de propagation d'une onde électromagnétique, sa relation de dispersion, sa vitesse de phase. Le vide est-il dispersif?

**Q.13** On admet que dans un milieu linéaire, homogène, isotrope et parfaitement transparent, tout se passe comme si l'on remplaçait dans la relation de dispersion précédente la permittivité du vide  $\epsilon_0$  par la grandeur  $n^2 \epsilon_0$ , appelée permittivité du milieu, où  $n$  est l'indice optique du milieu ( $n$  est un réel supérieur à 1). On rappelle que la valeur de l'indice optique d'un matériau varie avec la longueur d'onde  $\lambda_0$  dans le vide. En déduire la nouvelle relation de dispersion et l'expression de la vitesse de phase. Le milieu est-il dispersif?

### II.B Coefficients de réflexion et de transmission

On considère une onde électromagnétique monochromatique incidente polarisée rectilignement selon la direction  $\vec{e}_y$  et se propageant dans la direction donnée par son vecteur d'onde  $\vec{k}_i = k_{ix}\vec{e}_x + k_{iz}\vec{e}_z$ . On note  $i_1 = (\vec{e}_z, \vec{k}_i)$  l'angle d'incidence de cette onde sur le dioptre plan d'équation  $z = 0$ . Le champ électrique s'écrit :

$$\vec{E}_i(M, t) = E_0 \vec{e}_y \exp[-j(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})] \quad \text{où} \quad \vec{r} = O\vec{M}.$$

On note  $k_0 = \omega/c$ , le module de son vecteur d'onde dans le vide. Au passage du dioptre, cette onde donne naissance :

- à une onde réfléchie

$$\vec{E}_r = \underline{r} E_0 \vec{e}_y \exp[-j(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{r})]$$

- à une onde transmise (onde réfractée)

$$\vec{E}_t = \underline{t} E_0 \vec{e}_y \exp[-j(\omega t - \vec{k}_t \cdot \vec{r})]$$

où  $\underline{r}$  et  $\underline{t}$  sont des nombres complexes appelés coefficients de réflexion et de transmission en amplitude. De même, on note  $\vec{k}_r = k_{rx}\vec{e}_x - k_{rz}\vec{e}_z$  et  $\vec{k}_t = k_{tx}\vec{e}_x + k_{tz}\vec{e}_z$ . Enfin, on admet que les champs électriques et magnétiques sont continus à la traversée de ce dioptre.

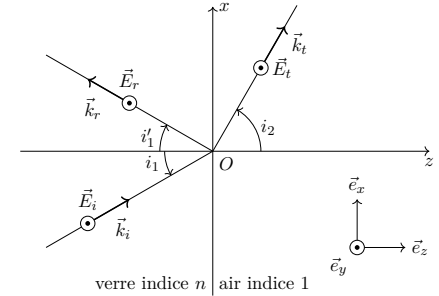


FIGURE 7

**Q.14** Montrer que, en tout point du dioptre,  $\exp(jk_{ix}x) + \underline{r} \exp(jk_{rx}x) = \underline{t} \exp(jk_{tx}x)$ .

**Q.15** En déduire une relation notée (2) entre  $\underline{r}$  et  $\underline{t}$ .

**Q.16** On admet que l'équation de la **Q.14** conduit à l'égalité  $k_{ix} = k_{rx} = k_{tx}$ . En déduire les deux relations de Descartes portant sur les angles  $i_1$ ,  $i'_1$  et  $i_2$ .

**Q.17** À partir de l'étude du champ magnétique, trouver une deuxième équation notée (3) reliant  $\underline{r}$  et  $\underline{t}$ .

La solution du système d'équation conduit à  $\underline{r} = \frac{1-\underline{\nu}}{1+\underline{\nu}}$  et  $\underline{t} = \frac{2}{1+\underline{\nu}}$ , où l'on a posé  $\underline{\nu} = \frac{k_{tz}}{k_{iz}}$ , qui est éventuellement un nombre complexe. On remarque immédiatement qu'on n'a jamais  $\underline{t} = 0$ , même dans le cas d'une réflexion totale. Il y a toujours une onde électromagnétique transmise. Dans la suite de cette sous-partie, nous nous intéressons à la forme que prend cette onde transmise.

**Q.18** Expliciter les composantes du vecteur d'onde  $\vec{k}_i$  en fonction de  $n$ ,  $k_0$  et  $i_1$ .

**Q.19** En remarquant que  $k_{tz}^2 = k_0^2 - k_{tx}^2$ , exprimer  $k_{tz}^2$  en fonction de  $n$ ,  $k_0$  et  $i_1$ . En déduire l'expression de  $k_{tz}$  (on distinguera deux cas). Écrire le champ électrique transmis complexe dans les deux cas (sans chercher à expliciter  $\underline{t}$ ).

**Q.20** Quelle est la forme de l'onde transmise dans le cas d'une réflexion totale? Comment la qualifie-t-on? Exprimer la longueur typique, notée  $\delta$ , de pénétration de cette onde dans la direction  $\vec{e}_z$ . Expliquer qualitativement pourquoi il n'y pas, en moyenne, de puissance propagée dans la direction  $\vec{e}_z$ .