DS 5 (4 heures)

Électromagnétisme

La calculatrice est **autorisée**

La plus grande importance sera apportée au soin de la copie ainsi qu'à la clarté des raisonnements. Toute réponse, même qualitative, se doit d'être justifiée. Les affirmations, même justes, mais non justifiées ne seront pas prises en compte. Les résultats doivent être **encadrés**.

En cas de non respect de ces consignes, un malus sera attribué à la copie comme indiqué dans les tableaux suivants qui stipulent les critères et les effets sur la note le cas échéant :

Critère	**Indicateur**
Lisibilité de l'écriture	L'écriture ne ralentit pas la lecture.
Respect de la langue	La copie ne comporte pas de fautes d'orthographe ni de grammaire.
Clarté de l'expression	La pensée du candidat est compréhensible à la première lecture.
Propreté de la copie	La copie comporte peu de ratures, réalisées avec soin et les parties qui ne doivent pas être prises en compte par le correcteur sont clairement et proprement barrées.
Identification des questions et pagination	Les différentes parties du sujet sont bien identifiées et les réponses sont numérotées avec le numéro de la question. La pagination est correctement effectuée.
Mise en évidence des résultats	Les résultats littéraux et numériques sont clairement mis en évidence.

Nombre de critères non respéctés	**Palier de Malus**	**Effet sur la note**
0	0	aucun
1–2	1	-3.3%
3–4	2	-6.7%
5–6	3	-10%

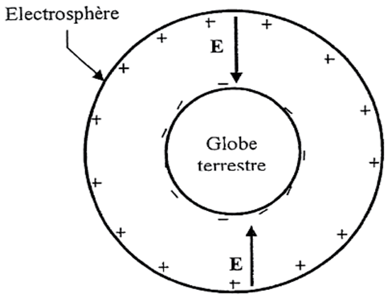
Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'essentiel des données et formules utiles se trouve dans un formulaire en fin d'énoncé.

Exercice 1 : Orage et foudre

L'électrosphère est une couche atmosphérique ionisée. L'électrosphère et la Terre, forment un gigantesque condensateur terrestre (Figure 1), où le champ électrique par beau temps est dirigé de l'électrosphère vers la Terre et atteint environ 100 à $120\,\mathrm{V \cdot m^{-1}}$. Les armatures de ce condensateur sphérique sont l'électrosphère d'une part et le globe terrestre d'autre part, entre lesquelles il y a la troposphère et la stratosphère qui constituent le diélectrique, dont l'épaisseur est d'environ $80\,\mathrm{km}$.

L'air comprend en permanence des charges électriques, positives et négatives, créées par les rayonnements cosmiques ou la radioactivité de la Terre. Par beau temps, il en résulte un courant atmosphérique de densité volumique $\vec{j}$ tendant à décharger le condensateur.
Suite aux perturbations atmosphériques et sous certaines conditions, il se forme des nuages orageux en général du type cumulo-nimbus de couleur sombre (Figure 1). Ils constituent une gigantesque machine thermique d'environ $10\,\mathrm{km}$ de diamètre dont la base et le sommet sont respectivement à environ $2\,\mathrm{km}$ et $15\,\mathrm{km}$ d'altitude. Sa formation est rendue possible par l'élévation d'air chaud par des courants ascendants dont la vitesse est de quelques mètres par seconde. Lors de son ascension, cette masse d'air se charge en humidité jusqu'à devenir un nuage. La partie supérieure, où il fait froid, est occupée par les particules de glace, tandis que les gouttes d'eau s'établissent dans la partie inférieure.



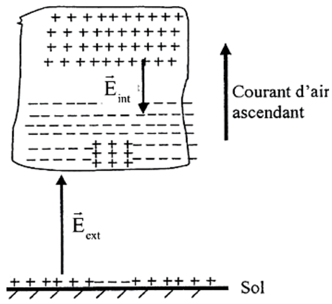


FIGURE 1 – Terre et électrosphère (gauche), cumulonimbus et dipôles électriques (droite)

Les violents courants ascendants provoquent des collisions entre les gouttes d'eau et les micro-particules de glace, ce qui crée des charges électriques par frottement. Ces micro-particules de glace, plus légères et chargées positivement, sont emportées vers le haut par le courant d'air ascendant et occupent ainsi la partie supérieure du nuage qui forme le pôle positif. Les gouttes d'eau chargées négativement s'étab1issent dans la partie inférieure et créent le pôle négatif. Cependant, une petite quantité de charges positives demeurent à la base du nuage. Le nuage fait apparaître sur la Terre, par influence électrique, une charge de signe opposé et crée ainsi deux véritables dipôles électriques (Figure 1) :

- un dipôle interne généré entre les pôles positif et négatif du nuage. Si le champ électrique interne devient suffisamment grand, il provoque un claquage interne dans le nuage ;
- un dipôle externe, généré entre la base du nuage et la surface de la Terre. Si le champ électrique externe atteint des conditions critiques de l'ordre de $20\,\mathrm{kV \cdot m^{-1}}$, il finit par provoquer une grande décharge entre le nuage et la Terre.

Données

Constantes utiles

- Permittivité diélectrique du vide : $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{36\pi}10^{-9}\,\mathrm{F \cdot m^{-1}}$
- Rayon terrestre : $R_T = 6370\,\mathrm{km}$
- Conductivité électrique du sol : $\gamma_s = 1{,}0 \times 10^{-2}\,\mathrm{S \cdot m^{-1}}$
- Résistance électrique entre deux pieds d'un homme : $\Theta_h = 2{,}5\,\mathrm{k\Omega}$

Rappels d'électrostatique

- Capacité d'un condensateur plan : $C = \dfrac{\varepsilon_0 S}{e}$ ou S est la surface des deux armatures en regard et e la distance entre les armatures.
- Densité volumique d'énergie électrostatique : $w_e = \dfrac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$ ou E est le champ électrique.
- Énergie stockée dans un condensateur : $W = \dfrac{1}{2}CU^2 = \dfrac{Q^2}{2C}$ où U est la différence de potentiel entre les deux armatures et Q la charge du condensateur.

I – Étude d'un condensateur sphérique

Un condensateur sphérique à air (Figure 2), dont la permittivité diélectrique est assimilable à celle du vide ε_0, est formé de deux armatures concentriques, de rayon R_1 et R_2, avec $R_1 < R_2$. L'armature intérieure de rayon R_1 porte une charge totale Q uniformément répartie. L'armature extérieure porte la charge totale $-Q$ uniformément répartie. On travaille ici dans la base classique des coordonnées sphériques $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ et en régime permanent.

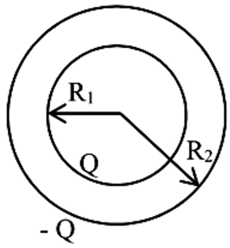


Figure 2 – Condensateur sphérique

Q.1 Par des arguments clairs et précis d'invariance et de symétrie, justifier qu'entre les armatures, le champ électrique est de la forme : $\vec{E}(M) = E_r(r)\vec{u}_r$.

Q.2 Déterminer l'expression du champ électrique $E_r(r)$ entre les armatures, en fonction de r, Q et ε_0.

Q.3 En déduire la différence de potentiel $V_1 - V_2$ entre les deux armatures en fonction de Q, R_1, R_2 et ε_0.

Q.4 Déterminer alors l'expression de la capacité de ce condensateur sphérique en fonction de R_1, R_2 et ε_0.

Q.5 Le diélectrique n'est en réalité pas parfait. Il possède une résistivité électrique certes grande mais finie. Il circule alors un courant de densité volumique dans tout l'espace inter-conducteur. Faire un dessin montrant l'allure et le sens des lignes de courant dans le cas où $Q > 0$.

II – Analyse du préambule

En vous appuyant sur le texte fourni en préambule, répondre aux six questions suivantes.

Q.6 Donner une valeur approchée de la capacité du condensateur délimité par l'électrosphère et le globe terrestre.

Q.7 Quel est l'ordre de grandeur de l'énergie électrique stockée en permanence et par beau temps dans L'électrosphère ?

Q.8 Le champ électrique qui règne à la surface de la Terre est-il, en général, dans le même sens ou en sens opposé suivant que le temps est clément ou orageux ?

Q.9 Lequel de l'éclair ou de la foudre correspond à un claquage diélectrique interne au nuage ?

Q.10 La foudre est-elle toujours descendante ou non ?

Q.11 Quel est l'ordre de grandeur de la différence de potentiel entre la Terre et le nuage juste avant 1'arrivée de la foudre ?

Q.12 Quel est l'ordre de grandeur de l'énergie véhiculée par un coup de foudre de courant $I = 50\,\text{kA}$ et d'une durée de $10\,\text{ms}$? Dans le cadre des énergies renouvelables, vous parait-il judicieux de vouloir récupérer cette énergie ? Une argumentation de quelques mots est attendue.

III – Protection contre la foudre

Pour protéger les personnes et les installations électriques en cas de coup de foudre, il convient de dévier le courant de foudre vers la Terre.

Une prise de terre (figure 3) est constituée d'une coque hémisphérique métallique de centre O, de rayon intérieur R_a, et de rayon extérieur R_b. On note γ_m la conductivité électrique du métal qui constitue cette prise. Le sol, assimilé au demi espace $z < 0$ et de conductivité électrique γ_s.

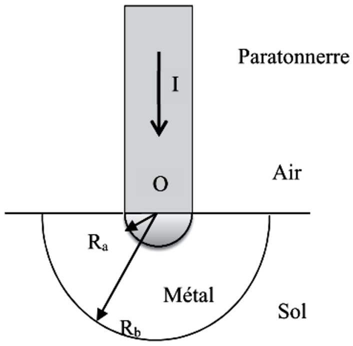


FIGURE 3 – Modèle simplifié d'une prise de terre

La prise de terre se décompose ainsi en deux résistances hémisphériques Θ_m et Θ_s, l'une en métal de rayon intérieur R_a et de rayon extérieur R_b, l'autre associée au sol de rayon intérieur R_b et de rayon extérieur infini. Elle est destinée à recevoir un courant I provenant d'un paratonnerre. Ce courant est supposé indépendant du temps et descendant. On suppose également que le courant qui traverse la prise de terre, est radial. Sa densité est de la forme $\vec{j} = j(r)\vec{u}_r$ en coordonnées sphériques.

Q.13 Rappeler l'unité de la grandeur $j(r)$ et donner son expression en fonction de I et r.

Q.14 Exprimer alors le champ électrique $E(r)$ régnant dans le sol.

Q.15 En déduire l'expression du potentiel électrique $V(r)$ régnant dans le sol en fonction de I, r et γ_s. On supposera que $V = 0$ loin du point O.

Cette répartition non uniforme du potentiel à la surface de la Terre explique le foudroiement indirect des hommes ou des animaux. On appelle Θ_h, la résistance d'un corps humain mesurée entre ses deux pieds supposés distants de $a = 1{,}0\,\text{m}$. Pour ne pas être électrocuté (c'est-à-dire pour que son corps ne soit pas traversé par un courant supérieur à une valeur seuil notée $I_{max} = 25\,\text{mA}$), un homme doit rester éloigné d'une distance au moins égale à D de la prise de terre.

Q.16 Trouver une relation entre D, a, Θ_h, I, I_{max} et γ_s.

Q.17 En supposant $D \gg a$, exprimer D en fonction de a, Θ_h, I, I_{max} et γ_s.

Q.18 Faire l'application numérique : évaluer D pour $I = 50\,\text{kA}$. Ce phénomène d'électrocution à distance touche-t-il plutôt les grands animaux (vaches, chevaux) ou les petits animaux (lapins, renards) ?

On cherche maintenant à déterminer l'expression de la résistance d'une coque hémisphérique homogène, de conductivité électrique γ, comprise entre les rayons R_i et R_e et parcourue par un courant radial. On la décompose en une infinité de coques hémisphériques élémentaires comprises entre les rayons r et $r + \mathrm{d}r$.

Q.19 Montrer que la résistance élémentaire d'une coque hémisphérique élémentaire vaut $\mathrm{d}\Theta_C = \dfrac{\mathrm{d}r}{2\pi\gamma r^2}$.

Q.20 En déduire, en fonction de γ, R_i et R_e, la résistance totale Θ_C de la coque hémisphérique.

Q.21 Donner l'expression de la résistance globale, notée Θ_g, de la prise de terre en fonction de γ_s, γ_m, R_a et R_b.

Q.22 Application numérique : évaluer Θ_g pour $R_a = 1{,}0\,\text{cm}$, $R_b = 35\,\text{cm}$ et $\gamma_m = 6{,}0\,\text{S}\cdot\text{m}^{-1}$. La législation en terme de sécurité électrique impose que $\Theta_g < 25\,\Omega$, est-ce respecté dans le cas de cette prise ? Sinon, que préconisez-vous pour remédier à ce problème ?

Exercice 2 : Création de champs magnétiques

I – Création d'un champ tournant

Q.1 Énoncer les équations de Maxwell dans le cas général.

On se place pour toute la suite, dans un régime qualifié d'ARQS magnétique, dans lequel la densité de courant de déplacement $\varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ est négligeable devant la densité de courant "réel" $\vec{j}$.

Q.2 Donner la forme de l'équation de Maxwell-Ampère dans le cadre de cette approximation et énoncer le théorème d'Ampère.

Q.3 Après avoir précisé les symétries et invariances du champ magnétique créé par un solénoïde unique infini d'axe (Ox), qui contient n spires par unité de longueur parcourues par une intensité I, établir que celui-ci sépare l'espace en deux zones de champ uniforme.

Q.4 On admet que le champ extérieur est nul. Établir dans ce cas l'expression du champ intérieur créé par le solénoïde unique en fonction de μ_0, n, I et le vecteur unitaire $\vec{u}_x$, l'orientation du courant étant celle qui correspond au sens direct autour de $\vec{u}_x$.

On considère à présent un ensemble de deux solénoïdes infinis identiques d'axes (Ox) et (Oy) perpendiculaires concourants en O comme l'indique la Figure 4. Les spires sont considérées comme circulaires car réalisées sur des cylindres de rayon R comportant n spires jointives par unité de longueur. Les spires du solénoïde d'axe (Oy) sont parcourues par une intensité $I_y = I_0 \cos(\omega t + \varphi)$ et celles du solénoïde d'axe (Ox) par une intensité $I_x = I_0 \cos(\omega t)$. L'orientation des courants correspond au sens direct autour des axes respectifs.

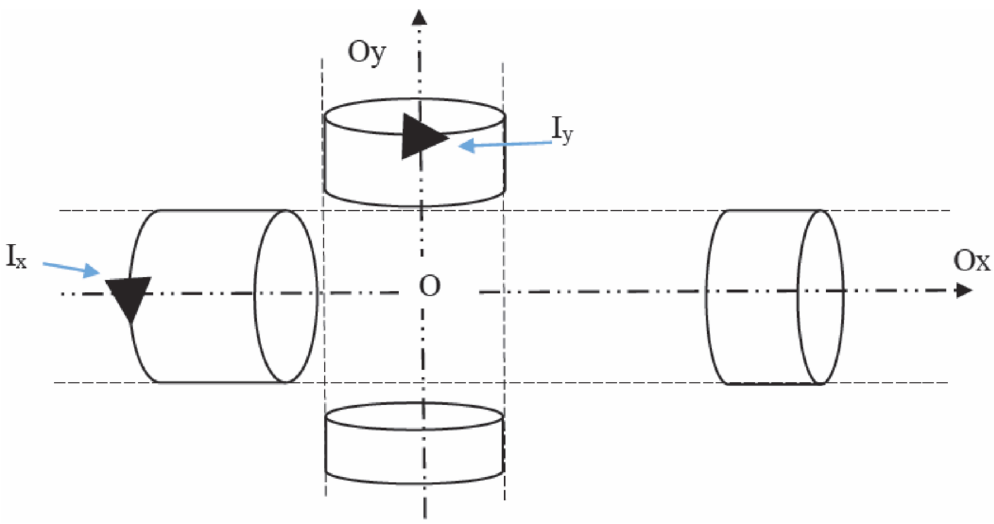


FIGURE 4 – Configuration des solénoïdes infinis, seules quelques spires sont représentées

Q.5 Établir que le champ magnétique dans la zone commune aux deux circuits, pour un déphasage $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, est un champ «tournant», c'est-à-dire un champ de norme constante B_1 porté par un vecteur unitaire qui tourne à vitesse uniforme dans le plan (xOy). On précisera sa norme B_1 et sa vitesse de rotation Ω.

II – Création d'un champ permanent intense

On utilise un solénoïde «épais» (épaisseur $e = R_2 - R_1$) considéré comme la superposition de solénoïdes infinis (en réalité de longueur $L \gg R_2$) de même axe (Oz). Il est réalisé par un empilement jointif de spires de section carrée, de côté $a = 1{,}0\,\text{mm}$, enroulées sur un cylindre de longueur $L = 4{,}0\,\text{m}$, depuis un rayon $R_1 = 20\,\text{cm}$ jusqu'à un rayon $R_2 = 25\,\text{cm}$. Les spires sont des fils de cuivre parcourus par un courant continu

I_0 uniformément réparti, orienté dans le sens direct autour de (Oz). La situation est schématisée sur la Figure 5. Les sections carrées sont dans les plans $(\vec{u}_r, \vec{u}_z)$ c'est-à-dire en positionnement radial.

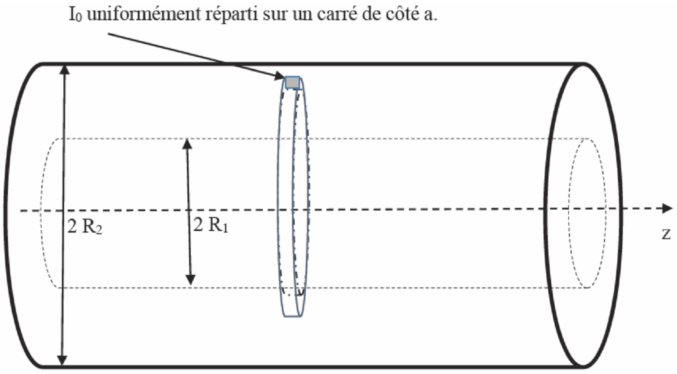


FIGURE 5 – Solénoïde épais

Q.6 Exprimer le vecteur densité volumique de courant $\vec{j}$ pour $R_2 > r > R_1$.

Q.7 Établir que l'expression du champ sur l'axe vaut $B_0 = \dfrac{\mu_0 I}{a^2}(R_2 - R_1)$.

Q.8 Quelle est l'intensité nécessaire pour engendrer un champ de 1 Tesla ?

Pour obtenir un champ intense, sans problème d'échauffement, on utilise des matériaux supraconducteurs qui perdent totalement leur résistivité en dessous d'une température critique T_c, qui dépend du champ magnétique. Ces matériaux ont des propriétés magnétiques intéressantes : en régime permanent, ils «expulsent» le champ magnétique. La loi constitutive de ces supraconducteurs est :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{j} = -\Lambda \vec{B} \quad (\Lambda > 0)$$

On rappelle la formule d'analyse vectorielle suivante : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{A}) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}\vec{A}) - \Delta\vec{A}$.

Q.9 En supposant qu'on peut appliquer les équations de Maxwell du vide dans le matériau supraconducteur de perméabilité μ_0 et de permittivité ε_0, exprimer l'équation différentielle à laquelle obéit le champ magnétique en régime permanent.

Q.10 Faire apparaître dans l'équation différentielle obtenue une grandeur homogène à une longueur notée δ.

On considère qu'un supraconducteur de ce type occupe un demi-espace $x \leq 0$ et que les sources du champ sont telles que règne dans l'espace extérieur $(x > 0)$ un champ permanent uniforme $\vec{B}_{ext} = B_0\vec{u}_z$. On considère qu'il n'y a pas de discontinuités spatiales du champ magnétique.

Q.11 En utilisant les invariances du problème, montrer que le champ dans le supraconducteur s'écrit sous la forme :

$$\vec{B}(M) = B_x(x)\vec{u}_x + B_y(x)\vec{u}_y + B_z(x)\vec{u}_z$$

Q.12 Déterminer le champ permanent régnant dans le supraconducteur.

Q.13 En déduire la densité de courant volumique.

Q.14 L'ordre de grandeur du paramètre δ est de 5×10^{-8} m. Commenter.

Q.15 Tracer, sans faire de calculs, l'allure de $B_z(r)$ dans une symétrie cylindrique comme en Figure 5 où le supraconducteur occupe le volume d'un cylindre creux d'épaisseur $e = 100\delta$, de longueur L très grande devant son rayon R, lui-même très supérieur à e. On suppose que le champ vaut $B_0\vec{u}_z$ dans l'espace intérieur au cylindre creux.

Exercice 3 : Quelques généralités sur les ondes électromagnétiques

Dans cet exercice, nous nous proposons d'étudier la propagation des ondes électromagétiques dans le vide puis la réflexion d'une onde plane progressive sur un conducteur parfait.

I – Propagation des ondes électromagnétiques dans le vide

On considère une onde électromagnétique (EM) associée au champ $(\vec{E}, \vec{B})$. L'espace est rapporté au repère cartésien orthonormé direct $(Oxyz)$ associé à la base cartésienne $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

Q.1 Écrire les équations de Maxwell dans le vide.

Q.2 Établir les équations aux dérivées partielles vérifiées par les champs électrique et magnétiques et régissant la propagation des ondes dans le vide. On fera apparaître les constantes ε_0 et μ_0.

L'onde considérée est plane progressive monochromatique, de pulsation ω. Le champ EM associé est de la forme :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right] \quad \text{et} \quad \vec{B} = \vec{B}_0 \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right]$$

avec $\vec{E}_0 = E_{0y}\vec{e}_y + E_{0z}\vec{e}_z$ et $\vec{B}_0 = B_{0y}\vec{e}_y + B_{0z}\vec{e}_z$ des vecteurs constants.

Q.3 Quelle est la direction de propagation de l'onde ? Justifier que cette onde soit plane (on pourra donner l'équation d'un plan d'onde), progressive et monochromatique.

Q.4 Que représente la grandeur c dans l'expression des champs ? Quel est le vecteur d'onde $\vec{k}$ de cette onde ? On précisera clairement la direction, le sens et la norme de $\vec{k}$.

Q.5 Vérifier que les champs donnés sont solutions des équations de propagation établies précédemment à condition que c soit liée à ε_0 et μ_0 par une relation que l'on précisera.

Q.6 Grâce aux équations de Maxwell, établir les expressions de B_{0y} et B_{0z} en fonction de E_{0y}, E_{0z} et de c.

Q.7 En déduire que : (a) le champ électrique et le champ magnétique sont orthogonaux entre eux ; (b) les normes de ces champs sont telles que : $\|\vec{E}\| = c\,\|\vec{B}\|$.

Q.8 Rappeler la définition du vecteur de Poynting $\vec{R}$ relatif à l'onde plane progressive monochromatique considérée puis l'exprimer en fonction de c, ε_0, E_0 (norme du vecteur $\vec{E}_0$), ω, t, x et d'un vecteur unitaire que l'on précisera. Que représente physiquement ce vecteur de Poynting et quelle est sa dimension physique ?

Q.9 Déterminer l'expression de la valeur moyenne du vecteur de Poynting $\left\langle \vec{R} \right\rangle$ en fonction de c, ε_0, E_0 et d'un vecteur unitaire que l'on précisera.

Q.10 Définir puis exprimer la densité volumique d'énergie électromagnétique $u_{em}(z,t)$ en fonction des constantes du problème. Déterminer sa valeur moyenne $\langle u_{em} \rangle$. Commenter par rapport au vecteur de Poyting moyen.

II – Réflexion d'une OPPH sur un conducteur parfait en incidence normale

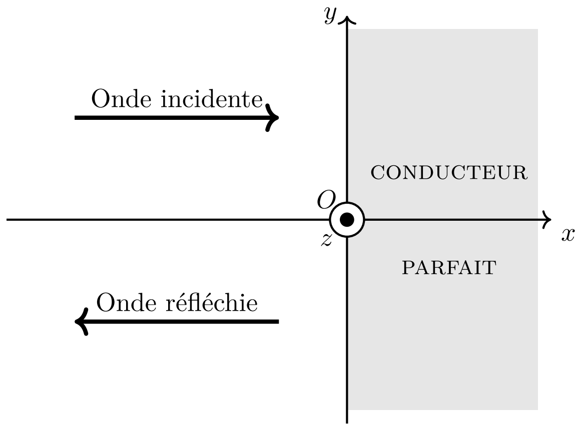
Une onde plane progressive monochromatique polarisée rectilignement, de pulsation ω, de vecteur d'onde $\vec{k}$ se propage dans le vide suivant l'axe (Ox) dans le sens des x croissants. Le champ électrique qui lui est associé s'écrit :

$$\vec{E}_i = E_0 \cos(\omega t - kx)\vec{e}_y$$

avec E_0 une constante et k la norme du vecteur d'onde.

Q.11 Quelle est la direction de polarisation de cette onde ?

En $x = 0$, l'onde arrive sur la surface plane d'un conducteur parfait (voir ci-contre) dans lequel on admet que le champ électromagnétique est nul. L'onde incidente donne alors naissance à une onde réflechie se propageant suivant les x décroissants. Son champ électrique est de la forme :



$$\vec{E}_r = \vec{E}_{0r} \cos(\omega t + kx)$$

On précise par ailleurs que pour $x = 0$, le champ électrique est normal au plan conducteur parfait et que le champ magnétique est tangent au plan conducteur parfait. On suppose que le champ $\vec{E}$ ne présente pas de discontinuité à la traversée de l'interface.

Q.12 En utilisant les conditions limites, déterminer l'expression du vecteur $\vec{E}_{0r}$ en fonction de E_0 et du vecteur unitaire $\vec{e}_y$.

Le champ magnétique incident est donné par l'expression $\vec{B}_i = \vec{B}_{0i} \cos(\omega t - kx)$. En arrivant sur le conducteur parfait, il donne naissance à un champ magnétique réfléchi tel que $\vec{B}_{0r} = \vec{B}_{0r} \cos(\omega t + kx)$.

Q.13 En utilisant les équations de Maxwell, déterminer les expressions des amplitudes $\vec{B}_{0i}$ et $\vec{B}_{0r}$ des champs magnétiques incident et réfléchi en fonction de E_0, de c et d'un vecteur unitaire que l'on précisera.

Q.14 Montrer alors que les expressions du champ électrique $\vec{E}$ et du champ magnétique $\vec{B}$ résultant de la superposition des ondes incidente et réfléchie dans le demi-espace $x < 0$ sont :

$$\vec{E} = 2E_0 \sin(\omega t) \sin(kx) \vec{e}_y \quad \text{et} \quad \vec{B} = \frac{2E_0}{c} \cos(\omega t) \cos(kx) \vec{e}_z$$

Comment nomme-t-on ce type d'onde ?

Q.15 Déterminer l'expression du vecteur de Poynting $\vec{R}$ de l'onde résultante ainsi que sa valeur moyenne temporelle $\left\langle \vec{R} \right\rangle$. Quels commentaires peut-on faire ?

• • • FIN • • •