

**DS 5\* (4 heures)**  
***Électromagnétisme***

**La calculatrice est autorisée**

La plus grande importance sera apportée au soin de la copie ainsi qu'à la clarté des raisonnements. Toute réponse, même qualitative, se doit d'être justifiée. Les affirmations, même justes, mais non justifiées ne seront pas prises en compte. Les résultats doivent être **encadrés**.

En cas de non respect de ces consignes, un malus sera attribué à la copie comme indiqué dans les tableaux suivants qui stipulent les critères et les effets sur la note le cas échéant :

<b>Critère</b>	<b>Indicateur</b>
Lisibilité de l'écriture	L'écriture ne ralentit pas la lecture.
Respect de la langue	La copie ne comporte pas de fautes d'orthographe ni de grammaire.
Clarté de l'expression	La pensée du candidat est compréhensible à la première lecture.
Propreté de la copie	La copie comporte peu de ratures, réalisées avec soin et les parties qui ne doivent pas être prises en compte par le correcteur sont clairement et proprement barrées.
Identification des questions et pagination	Les différentes parties du sujet sont bien identifiées et les réponses sont numérotées avec le numéro de la question. La pagination est correctement effectuée.
Mise en évidence des résultats	Les résultats littéraux et numériques sont clairement mis en évidence.

<b>Nombre de critères non respectés</b>	<b>Palier de Malus</b>	<b>Effet sur la note</b>
0	0	aucun
1–2	1	–3.3%
3–4	2	–6.7%
5–6	3	–10%

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'essentiel des données et formules utiles se trouve dans un formulaire en fin d'énoncé.

## Exercice 1 : Accéléromètre inductif

Depuis la fin des années 1960, la société néerlandaise Datawell développe des bouées houlographes commercialisées sous le nom de Waverider. Flottant à la surface de la mer, une telle bouée se déplace au gré des vagues de sorte qu'en enregistrant son mouvement, on accède aux caractéristiques de la houle. Afin de déterminer la direction des vagues, ces Waveriders sont équipés d'accéléromètres *rigidement liés à la bouée*. Lorsque la bouée s'incline sous l'effet de la houle, ces accéléromètres s'inclinent donc aussi. Afin de projeter dans le plan horizontal et sur l'axe vertical les accélérations qu'ils mesurent, il faut déterminer leur orientation relativement à la base  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  définie par la plateforme et son fil de suspension vertical. La mesure de deux angles est pour cela nécessaire, mais nous nous limitons ici au seul angle  $\varphi$  (FIGURE 1). La mesure de  $\varphi$  s'appuie sur un effet de couplage électromagnétique dans un système de bobines.

- Une paire de bobines plates  $\mathcal{C}_1 = \{\mathcal{C}'_1, \mathcal{C}''_1\}$  est collée à la paroi extérieure de la sphère  $\mathcal{S}$ . Leur axe de révolution commun est dirigé par le vecteur unitaire  $\vec{u}_3$ .
- Une bobine-sonde  $\mathcal{C}_2$  est fixée sur la plateforme de manière que son axe de symétrie soit confondu avec le fil de suspension vertical.

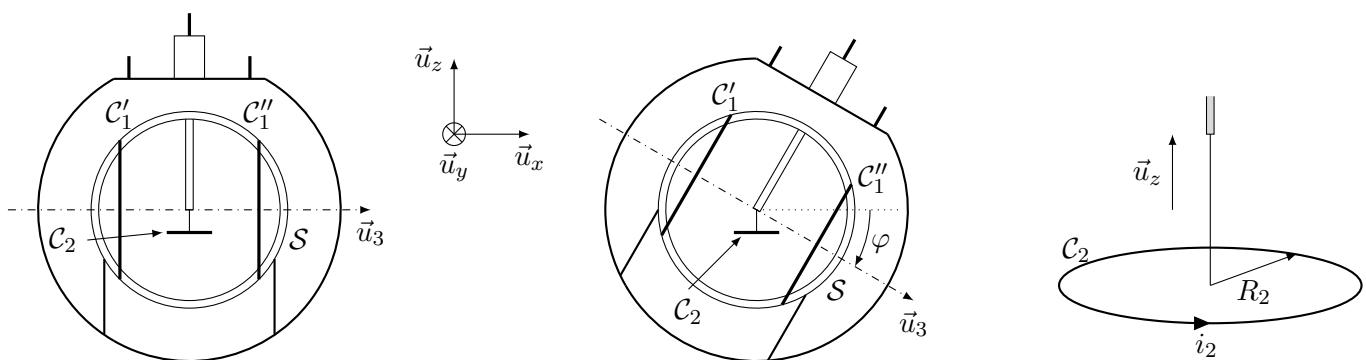


FIGURE 1 – La bouée, la sphère  $\mathcal{S}$ ,  $\mathcal{C}'_1$  et  $\mathcal{C}''_1$  s'inclinent alors que  $\mathcal{C}_2$  se maintient horizontale et le fil de suspension vertical. À droite : vue agrandie en trois dimensions de la bobine-sonde  $\mathcal{C}_2$ .

### I – Champ magnétique produit par des bobines de Helmholtz

Les deux bobines plates identiques  $\mathcal{C}'_1$  et  $\mathcal{C}''_1$  sont placées dans la configuration dite de *Helmholtz* : assimilables à deux cercles de centres  $O'_1$  et  $O''_1$ , elles possèdent le même axe de révolution, sont formées chacune de  $N_1$  spires parcourues par un courant d'intensité  $i_1$  et sont séparées d'une distance égale à leur rayon  $R_1$  (FIGURE 2).

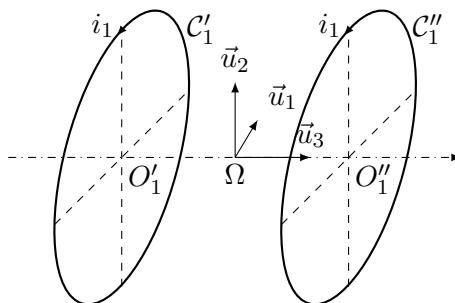


FIGURE 2 – Les vecteurs  $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$  forment une base orthonormée directe.

Ce dispositif est réputé produire un champ magnétique presque uniforme dans une région relativement étendue autour du milieu  $\Omega$  de  $[O'_1 O''_1]$ . Afin de préciser la justesse de cette affirmation, un calcul numérique du champ magnétique a été conduit avec les paramètres  $R_1 = 20$  cm,  $N_1 i_1 = 1$  A. Ses résultats sont fournis sur les FIGURES A et B du document réponse. Avant de les exploiter, on s'assure de sa compatibilité avec les lois de l'électromagnétisme.

En plus des coordonnées cartésiennes  $(x_1, x_2, x_3)$  d'origine  $\Omega$ , on utilise des coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  d'axe  $(\Omega, \vec{u}_3)$ . On voit que  $x_3$  joue le rôle de la coordonnée usuellement notée  $z$ , mais on prendra garde à ne pas confondre  $\vec{u}_3$  et  $\vec{u}_z$  (voir FIGURE 1). Dans le plan de la FIGURE A, défini par  $\theta = 0$ ,  $r$  se confond avec  $|x_1|$  et le vecteur unitaire d'habitude noté  $\vec{u}_r$  vaut  $\pm \vec{u}_1$  selon le signe de  $x_1$ . On note  $B_3(r, x_3) = \vec{B}(r, x_3) \cdot \vec{u}_3$ ,  $B_{\text{axe}}(x_3) = \vec{B}(0, x_3) \cdot \vec{u}_3$ ,  $B_r = \vec{B} \cdot \vec{u}_r$  et  $B_1 = \vec{B} \cdot \vec{u}_1$ .

La plupart des questions de cette sous-partie demandent un travail sur les figures du document réponse. On fera clairement apparaître les constructions graphiques qui concourent au raisonnement. Leur lisibilité et la clarté de leur utilisation feront partie des critères de notation de l'épreuve.

**Q.1** Comme il est difficile de représenter le champ magnétique en trois dimensions, la FIGURE A se limite au plan  $(\Omega, \vec{u}_1, \vec{u}_3)$ . Pourquoi cela ne constitue-t-il pas une perte d'information ? En quels points de ce plan la direction du champ était-elle prévisible, et par quels arguments ? Sur le document réponse, représenter par une flèche le champ magnétique en quelques-uns de ces points.

**Q.2** Quelle équation de Maxwell exprime la conservation du flux de  $\vec{B}$  ? En quoi cette propriété s'illustre-t-elle sur la carte fournie ? En utilisant les FIGURES A et B, vous apporterez une réponse quantitative avec au moins deux valeurs numériques du champ à l'appui.

On s'intéresse à la ligne de champ  $\mathcal{C}$  passant par les points  $D$  et  $E$ . De l'un à l'autre, elle traverse sur une longueur d'environ 12 cm une zone de champ très intense. Ailleurs au contraire, le champ paraît beaucoup plus faible.

**Q.3** Les valeurs du champ observées le long de  $\mathcal{C}$  sont-elles compatibles avec l'intensité circulant dans les bobines ? On pourra comparer le champ produit à celui généré par un fil infini.

Deux constatations se dégagent des FIGURES A et B :

- dans la région située entre les bobines, le champ reste presque colinéaire à  $\vec{u}_3$  si on ne s'éloigne pas trop de l'axe ;
- $B_{\text{axe}}$  est presque uniforme dans la région délimitée par les bobines.

On se propose d'établir un lien entre ces deux observations.

**Q.4** Considérons à titre d'exemple le point A ( $x_{1A} = 5 \text{ cm}$ ,  $x_{3A} = 20 \text{ cm}$ ), près duquel la ligne de champ est légèrement inclinée. Que valent  $B_3(A)$  et  $B_r(A)$  ? Ces valeurs sont-elles cohérentes avec l'inclinaison de la ligne de champ en A ? Une application numérique est attendue.

**Q.5** En utilisant, au voisinage d'un point de l'axe ( coordonnées  $(r, x_3)$  avec  $r \ll R_1$ ), l'équation de Maxwell de la Q.2 sous forme intégrale, démontrer que :

$$B_r(r, x_3) \approx -\frac{r}{2} \frac{dB_{\text{axe}}}{dx_3}$$

**Q.6** Cette relation est-elle satisfaite en A ?

**Q.7** À partir des graphiques fournis, déterminer le facteur  $\mu$  tel que  $B_{\text{axe}}(0) = \mu N_1 i_1$ .

Conventionnellement, on considère que le champ est quasi-uniforme dans le cylindre de rayon  $r_{\text{max}}$  défini par les inégalités suivantes :

$$-\frac{R_1}{4} \leq x_3 \leq \frac{R_1}{4} \quad \text{et} \quad 0 \leq r \leq r_{\text{max}} \quad \text{avec} \quad \left| B_3(r_{\text{max}}, \frac{R_1}{4}) - B_{\text{axe}}(0) \right| = \frac{1}{10} B_{\text{axe}}(0)$$

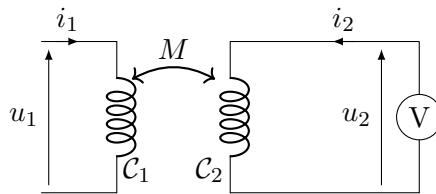
**Q.8** Déterminer  $r_{\text{max}}$  et représenter ce cylindre sur la FIGURE A.

## II – Exploitation du couplage électromagnétique

La bobine-sonde  $\mathcal{C}_2$  présente un rayon  $R_2$  et une inductance propre  $L_2$ . Elle est formée de  $N_2$  spires de cuivre, chacune parcourue par un courant d'intensité  $i_2$ , enroulées dans le sens de rotation positif par rapport à  $\vec{u}_z$ . On suppose qu'elle reste entièrement dans la région où le champ créé par  $\mathcal{C}_1$  est quasi-uniforme. On note  $L_1$  l'inductance propre de  $\mathcal{C}_1$  et on néglige les résistances de  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$ .

- Q.9** Rappeler la définition du coefficient de mutuelle induction  $M$  entre  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$ . L'exprimer en fonction de  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $R_2$ ,  $\mu$  et  $\varphi$ .

On applique une tension alternative  $u_1 = U_{1m} \cos(\omega t)$  aux bornes de  $\mathcal{C}_1$ . La bobine  $\mathcal{C}_2$  est connectée à un voltmètre de très grande impédance d'entrée.



- Q.10** Écrire les équations électriques régissant le fonctionnement de ces deux circuits, sans tenir compte, à ce stade, de la *très grande impédance* du voltmètre.

- Q.11** À quelle simplification peut-on procéder en tenant compte de la *très grande impédance* du voltmètre ? En déduire une relation entre  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $L_1$  et  $M$ .

- Q.12** Application numérique :  $U_{1m} = 5,00 \text{ V}$ ,  $U_{2m} = 170 \text{ mV}$ ,  $L_1 = 3,6 \text{ mH}$ ,  $R_2 = 5,0 \text{ cm}$ ,  $N_1 = 50$ ,  $N_2 = 200$ . Calculer le coefficient de mutuelle induction  $M$  (en valeur absolue) et l'angle d'inclinaison  $\varphi$  (supposé positif) en degré.

## Données

### Constantes utiles

$$\text{Charge élémentaire} \quad e = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$$

$$\text{Perméabilité magnétique du vide} \quad \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$$

### Analyse vectorielle en coordonnées cylindriques

$$\begin{aligned} \text{div} \vec{A}(r, \theta, z) &= \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\ \Delta \psi(r, \theta, z) &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \\ \vec{\text{rot}} \vec{A}(r, \theta, z) &= \left( \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \vec{u}_r + \left( \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{u}_z \end{aligned}$$

## Exercice 2 : Le mystère des pérítios

En astronomie, les sursauts radio rapides (fast radio burst) sont de brèves émissions radio intenses, dont l'origine est encore mal comprise. Ils sont étudiés à l'aide de radiotélescopes, comme celui de Parkes en Australie. En 2010, 16 sursauts atypiques ont été découverts, dont on a essayé de comprendre l'origine. Ils ont été appelés pérítios (*perytons*), du nom de l'animal imaginaire maléfique, mi-oiseau et mi-cerf, au plumage bleu ou vert.

L'observatoire de Parkes, en Australie, dispose d'un radiotélescope de 64 m de diamètre, utilisé entre autres pour l'étude des pulsars. En 2007, il a permis de découvrir des sursauts radio rapides, observés dès 2001, dont on a établi l'origine extragalactique. Ils seraient émis par des étoiles à neutrons particulières.

En analysant d'anciens enregistrements, on a trouvé qu'en 1998 le télescope de Parkes a détecté des signaux similaires aux sursauts rapides, les *pérítios*. Leur origine fut une énigme, résolue seulement en 2015.

Les pérítios sont des signaux radio d'une durée de quelques centaines de millisecondes, présentant une variation de fréquence similaire à la dispersion des impulsions émises par les pulsars s'étant propagées à travers un plasma froid dilué. La FIGURE 3 représente la structure temporelle et fréquentielle d'un pérítio qui est donc un signal quasiment sinusoïdal dont la fréquence varie lentement avec le temps.

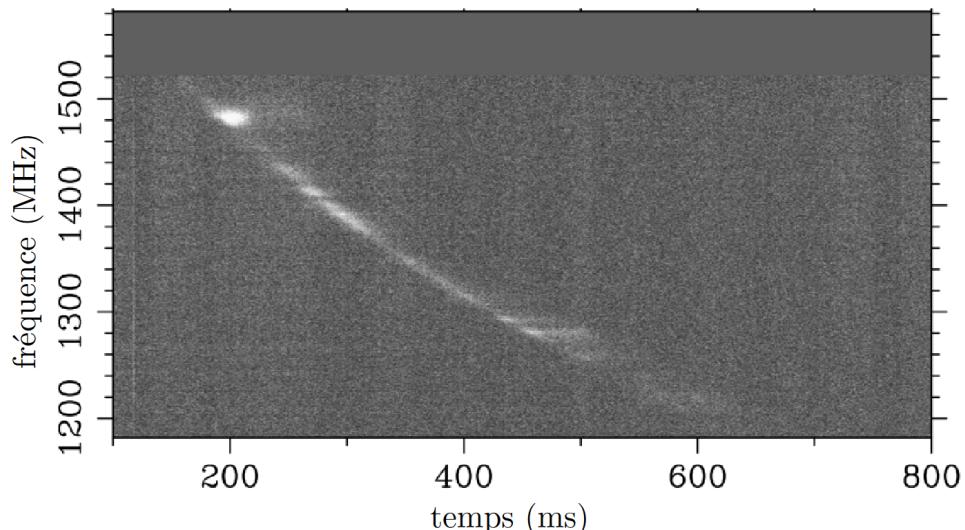


FIGURE 3 – Structure temporelle et fréquentielle d'un pérítio.

### I – L'énigme des *pérítios*

Afin de caractériser la variation temporelle de fréquence caractéristique lors de la réception d'une impulsion radio, détaillons la modélisation d'un plasma froid dilué. Il est constitué :

- de cations de masse  $M$ , de charge  $+e$  à la densité volumique  $n_c$  ;
- d'électrons de masse  $m$ , de charge  $-e$  à la densité volumique  $n_e$ .

On fait les hypothèses suivantes :

- on néglige les interactions entre les particules (plasma peu dense), elles ne sont alors soumises qu'au champ électromagnétique de l'onde présente dans le plasma ;
- comme  $M \gg m$ , les ions, du fait de leur inertie, sont considérés comme immobiles : c'est le modèle du plasma froid où l'on néglige l'énergie d'agitation thermique des ions, considérés comme « froids » ;
- les électrons sont non-relativistes ;
- en l'absence d'onde, le plasma est localement neutre : les cations et les électrons ont la même densité volumique  $n$  ;
- le plasma est soumis à une onde électromagnétique plane pseudo-progressif harmonique transverse  $\vec{E}(M, t) = \vec{E}_0 \exp[i(\omega t - \vec{k}x)]$  avec  $\vec{E}_0 \cdot \vec{u}_x = 0$  pour une onde transverse se propageant selon  $\vec{k} = \vec{k}u_x$ .

- Q.1** Montrer que le plasma reste localement neutre même en présence de l'onde. Que peut-on alors dire de la densité volumique  $n_e$  d'électrons dans le plasma ?
- Q.2** En considérant que les électrons ne sont soumis qu'à la seule force électrique (justifier que l'on néglige l'effet du champ magnétique), montrer que la densité volumique de courant dans le plasma est reliée au champ électrique par une relation de la forme

$$\vec{j} = \underline{\theta}_B \vec{E}$$

et exprimer la conductivité complexe  $\underline{\theta}_B$  en fonction des données.

- Q.3** À partir des équations de Maxwell, établir la relation de dispersion sous la forme

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$$

où l'on exprimera la pulsation plasma  $\omega_p$  en fonction de  $n$ ,  $m$ ,  $e$  et  $\varepsilon_0$ .

- Q.4** À quelle condition sur  $\omega$  l'onde peut-elle se propager dans le plasma ?

- Q.5** Établir alors l'expression de la vitesse de groupe  $v_g$  en fonction de  $\omega$ ,  $\omega_p$  et  $c$ .

On considère une onde électromagnétique émise par un astre à une distance  $L$  de la Terre. Le temps de parcours de la composante de l'onde à la pulsation  $\omega$  est :

$$t(\omega) = \int_0^L \frac{d\ell}{v_g(\omega)}$$

- Q.6** Pourquoi ne peut-on pas écrire a priori  $t(\omega) = \frac{L}{v_g}$  ?

- Q.7** Établir l'expression de  $t_\infty = \lim_{\omega \rightarrow \infty} t(\omega)$ . Quelle est son interprétation physique ?

- Q.8** Quel est le signe de  $\tau(\omega) = t(\omega) - t_\infty$  et quel sens concret donner à cette grandeur ?

On définit la mesure de dispersion DM (pour dispersion measure) par

$$DM = \int_0^L n_e d\ell$$

Pour un plasma interstellaire, on a typiquement  $n_e \approx 10^{-4} \text{ cm}^{-3}$ .

- Q.9** Montrer que pour des ondes d'une fréquence  $f$  de l'ordre du gigahertz, on peut écrire

$$\tau(f) = A \frac{DM}{f^2}$$

où l'on exprimera  $A$  en fonction de  $e$ ,  $\varepsilon_0$ ,  $m$  et  $c$ .

- Q.10** Calculer la valeur de  $A$ .

- Q.11** Cette relation est-elle qualitativement en accord avec l'enregistrement de la FIGURE 3 ?

Dans la définition donnée précédemment de  $DM$ , on exprime usuellement la densité électronique  $n_e$  en  $\text{cm}^{-3}$  et la distance  $L$  en parsec, unité de distance astronomique ; la mesure de dispersion est alors donnée en  $\text{pc} \cdot \text{cm}^{-3}$ .

- Q.12** À partir de la FIGURE 3, estimer la mesure de dispersion  $DM$ , en exprimant le résultat d'abord en unités du système international puis en  $\text{pc} \cdot \text{cm}^{-3}$ .

**Q.13** Les mesures de dispersion mesurées pour des objets extragalactiques sont usuellement de quelques centaines de  $\text{pc} \cdot \text{cm}^{-3}$ . Peut-on exclure une origine extragalactique aux péritos ?

Différents indices ont fait pencher la balance vers une origine terrestre des péritos : détections dans des directions en dessous de la ligne d'horizon, ou sur un large champ de visée. Et surtout, ces phénomènes se produisent pendant les heures de bureau, en semaine. En 2014, l'observatoire de Parkes s'est doté d'un enregistreur plus performant, pouvant couvrir une bande de fréquence allant de 402 MHz à 3 GHz, l'équipement utilisé jusqu'alors ne permettant d'explorer qu'une bande de 400 MHz de large, centrée sur 1382 MHz.

Des chercheurs ont alors découvert que plusieurs péritos sont associés à une émission d'onde électromagnétique dans le domaine de fréquence de 2,3 à 2,5 GHz, inaccessible avec l'ancien matériel. Il est apparu que les péritos sont toujours accompagnés d'une émission à 2,4 GHz, mais que l'on observe de nombreuses émissions à 2,4 GHz non accompagnées de périto. L'analyse des enregistrements sur deux mois montre que les péritos sont répartis pendant la journée, entre 9h et 17h. Ces observations ont permis aux chercheurs de trouver le coupable : un four à micro-ondes utilisé par le personnel de l'observatoire. La partie suivante étudie le four à micro-ondes afin de déterminer si l'ouverture de la porte du four avant la fin de son fonctionnement permet d'expliquer les péritos observés.

### 1. A Le four à micro-ondes

Un four à micro-ondes est constitué d'un klystron, qui émet une onde électromagnétique généralement à la fréquence  $f = 2,45 \text{ GHz}$ , acheminée par un guide d'onde vers la cavité du four. Cette cavité est un parallélépipède entouré de parois métalliques, délimitant l'espace  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq b$ ,  $0 \leq z \leq d$ . On considère dans un premier temps que les parois sont parfaitement conductrices, l'espace intérieur au four étant assimilé au vide. Pour rappel, le champ électromagnétique est nul dans un conducteur parfait. On cherche le champ électrique dans la cavité sous la forme :

$$\begin{cases} E_x(x, y, z, t) &= E_1 \cos(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z) \cos(\omega t) \\ E_y(x, y, z, t) &= E_2 \sin(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z) \cos(\omega t) \\ E_z(x, y, z, t) &= E_3 \sin(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z) \cos(\omega t) \end{cases}$$

**Q.14** Montrer que seules des valeurs discrètes de  $k_x$ ,  $k_y$ ,  $k_z$  sont possibles, repérées respectivement par des entiers  $m$ ,  $n$ ,  $\ell$ .

Le triplet  $(m, n, \ell)$  caractérise un mode propre de la cavité.

**Q.15** En déduire l'expression des fréquences  $f_{mn\ell}$  des modes propres possibles dans la cavité.

Pour étudier le champ électromagnétique dans un four, des chercheurs ont construit un modèle ayant pour dimensions intérieures  $a = 36,0 \text{ cm}$ ,  $b = 24,0 \text{ cm}$  et  $d = 26,5 \text{ cm}$ , alimenté par un klystron de fréquence  $f = 2,45 \text{ GHz}$ . Ils ont placé dans le four une feuille de papier imbibée d'hexahydrate de chlorure de cobalt ( $\text{CoCl}_2 \cdot 6 \text{ H}_2\text{O}$ ), de couleur rose, tandis que la forme anhydre est de couleur bleu ciel. Lorsque la température du papier augmente, l'hexahydrate de chlorure de cobalt passe sous forme anhydre et prend la couleur bleue. La FIGURE 4 présente les résultats obtenus en fonction de la position de la feuille de papier dans le four.

**Q.16** Justifier précisément l'aspect de la FIGURE 4(b) en s'intéressant aux conditions aux limites sur les parois  $y = 0$  et  $z = 0$ . Déterminer alors la valeur du triplet  $(m, n, \ell)$ . La fréquence du mode propre observée est-elle en accord avec la valeur donnée pour le klystron ?

L'ouverture de la porte d'un four à micro-ondes déclenche l'arrêt du klystron générant l'onde. Cependant, des ondes électromagnétiques ont été détectées lorsque l'on ouvre la porte d'un four en cours de fonctionnement. Nous allons déterminer au bout de quelle durée l'onde présente dans le four s'atténue.

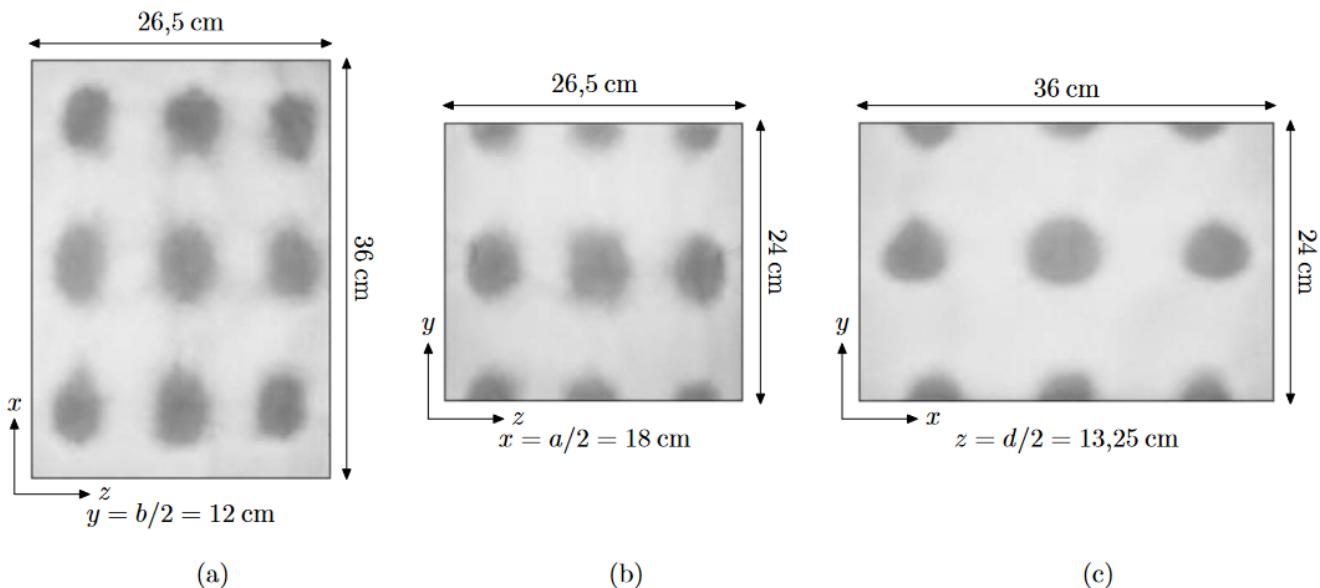


FIGURE 4 – Aspect du papier imbibé de chlorure de cobalt, en fonction de sa position dans le four. Les tâches sombres correspondent à la couleur bleue

On considère une cavité simplifiée à une dimension entre deux plaques conductrices de surface  $S$ , situées en  $x = 0$  et  $x = a$ . Le champ électrique régnant dans cette cavité, en négligeant les effets de bord, est de la forme

$$\vec{E}(x, t) = E_0 \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin(\omega t) \vec{u}_y$$

où  $n$  est un entier positif. On considère toujours que les parois sont parfaitement conductrices.

**Q.17** Établir l'expression du champ magnétique  $\vec{B}(M, t)$  dans la cavité. On notera  $B_0$  son amplitude maximale, que l'on exprimera en fonction de  $E_0$ .

**Q.18** Établir l'expression de l'énergie électromagnétique totale  $W$  contenue dans la cavité, en fonction de  $B_0$ , des caractéristiques de la cavité et de  $\mu_0$ . Que constate-t-on ?

Pour rendre compte de la décroissance du champ électromagnétique en l'absence de source d'onde, il faut tenir compte de la conductivité électrique finie  $\sigma$  des parois métalliques. Les parois d'un four à micro-ondes sont en acier inoxydable, de conductivité électrique  $\sigma = 1,5 \times 10^6 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$ . Nous allons étudier l'interaction d'une onde électromagnétique avec un conducteur métallique. On considère pour cela un milieu métallique, conducteur ohmique de conductivité  $\sigma$ , occupant le demi-espace  $x > 0$ .

**Q.19** Comment se simplifie l'équation de Maxwell-Ampère si  $\epsilon_0 f \ll \sigma$ ? Cette condition est-elle vérifiée dans le cadre du four à micro-ondes ?

**Q.20** Établir alors l'équation vérifiée par  $\vec{B}(M, t)$  dans le conducteur. Qu'est-ce qui permet de dire qu'elle traduit un phénomène irréversible ? Citer un phénomène décrit par une équation analogue dans un autre domaine de la physique que l'électromagnétisme.

On cherche une solution de cette équation dans le domaine  $x > 0$  sous la forme

$$\underline{\vec{B}}(x, t) = \underline{f}(x) e^{i\omega t} \vec{u}_z$$

**Q.21** Établir et résoudre l'équation différentielle vérifiée par la fonction complexe  $\underline{f}(x)$ , sachant que l'on impose en  $x = 0$  le champ  $\vec{B} = B_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z$ . On posera une longueur caractéristique  $\delta$  que l'on exprimera en fonction de  $\mu_0$ ,  $\sigma$  et  $\omega$ .

**Q.22** Commenter l'expression du champ  $\vec{B}(x, t)$  dans le conducteur. Donner l'interprétation de  $\delta$ .

- Q.23** Rappeler l'expression de la puissance volumique cédée par un champ électromagnétique à un conducteur ohmique.
- Q.24** Établir l'expression de la puissance moyenne (temporelle) dissipée dans les deux parois de la cavité de section  $S$ , en fonction de  $B_0$ ,  $\omega$ ,  $\delta$ ,  $S$  et  $\mu_0$ .

On définit le facteur de qualité de la cavité par  $Q = 2\pi \frac{\text{énergie stockée dans la cavité}}{\text{énergie dissipée par période}}$ .

- Q.25** En admettant que l'on puisse prendre en première approximation l'expression de l'énergie stockée établie en considérant les conducteurs des parois comme parfaits, établir l'expression du facteur de qualité de la cavité en fonction de  $a$  et  $\delta$ .
- Q.26** Calculer la valeur de  $Q$  pour un four à micro-ondes, avec  $a = 36\text{ cm}$ .
- Q.27** Montrer que l'énergie totale  $W(t)$  décroît avec un temps caractéristique  $\tau$  que l'on exprimera en fonction de  $\omega$  et  $Q$ .
- Q.28** Calculer numériquement  $\tau$ . Peut-on expliquer les péritios par le champ émis lors de l'ouverture d'un four à micro-ondes ?

• • • FIN • • •



**Annexe du DS 5\***  
(À détacher et à rendre avec la copie)

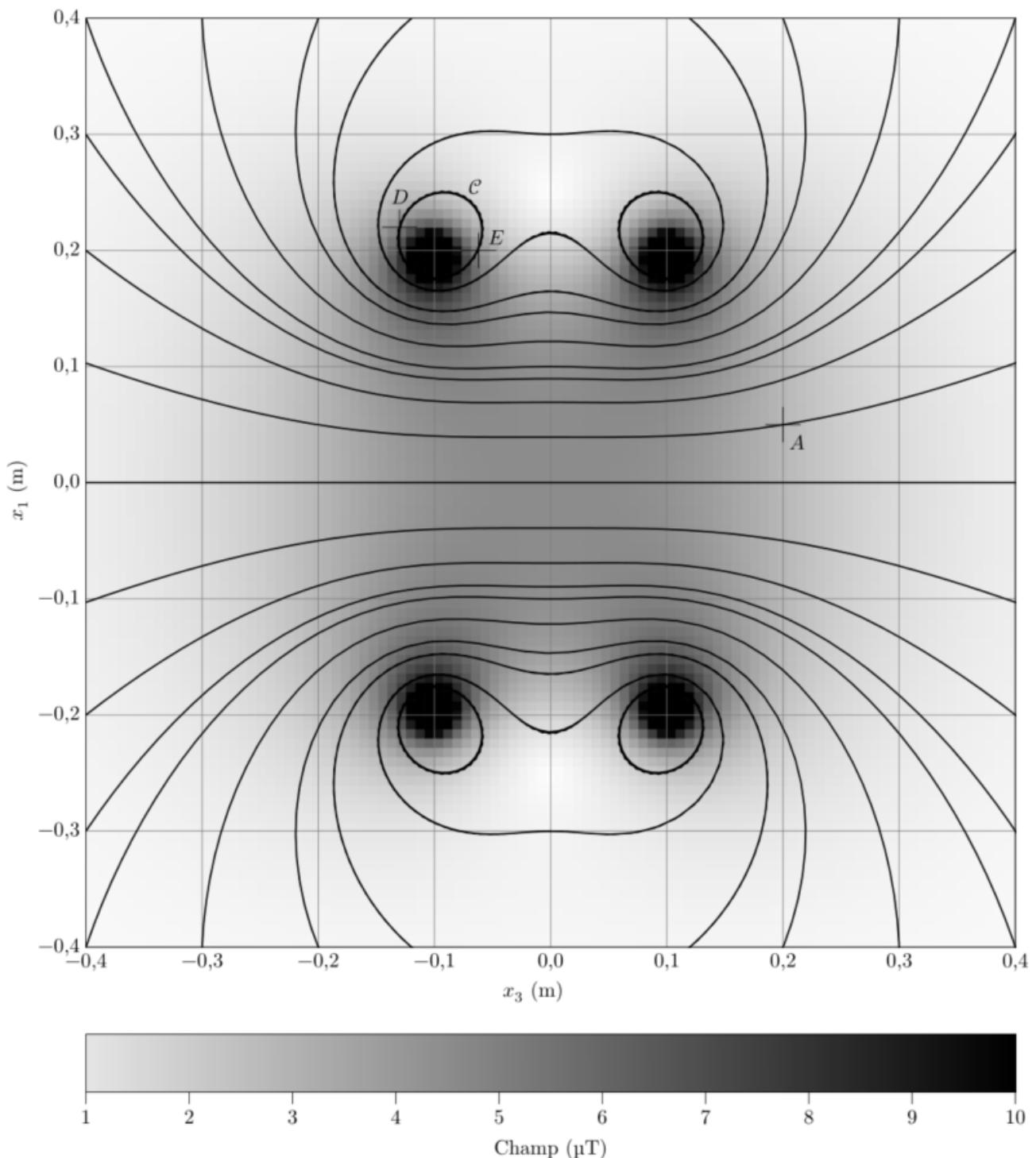


FIGURE A – Carte de champ créé par des bobines de Helmholtz, dans le plan  $(O_1, \vec{u}_3, \vec{u}_1)$ .

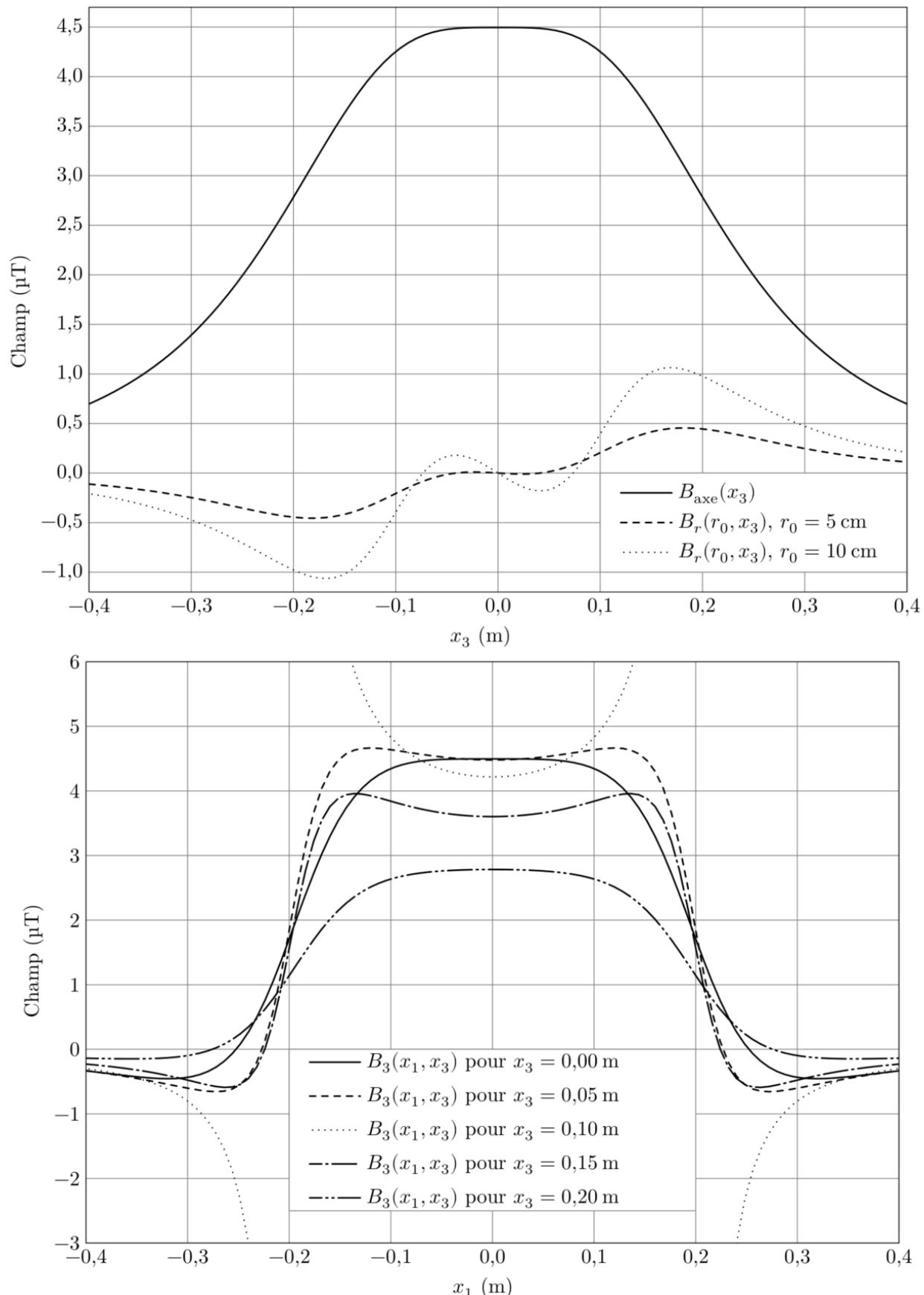


FIGURE B – Profils du champ magnétique de long de certains segments. Sur le premier graphique,  $r$  est fixé sur chaque courbe et l'abscisse est la cote  $x_3$ . Sur le second graphique,  $x_3$  est fixé sur chaque courbe et l'abscisse est la coordonnée  $x_1$ .