

Première partie

1.) $w_n (a_n - x)^2 = w_n a_n^2 - 2w_n a_n x + w_n x^2$

- $(\sum w_n a_n^2)$ et $(\sum w_n x^2)$ sont convergents

- $|a_n w_n| \leq \begin{cases} w_n & \text{si } |a_n| \leq 1 \\ w_n a_n^2 & \text{si } |a_n| > 1 \end{cases} \leq \max(w_n, w_n a_n^2) \leq w_n + w_n a_n^2$ (revoir $\ell^2(\mathbb{N})$)

donc $0 \leq |a_n w_n| \leq w_n + w_n a_n^2 = a_n$ et $(\sum a_n)$ converge

par T.C. $(\sum a_n w_n)$ converge, d'où $(\sum w_n (a_n - x)^2)$ conv

d. $\mathcal{D}_a$ est définie sur $\mathbb{R}$

$$\mathcal{D}_a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n a_n^2 - 2x \sum_{n=0}^{\infty} w_n a_n + x^2 \quad (\text{toutes les séries conv})$$

$\mathcal{D}_a$ est une fonction polynomiale du 2^e degré, unitaire

d. $\mathcal{D}_a$ atteint son minimum en un unique point x_0 ,
 défini par $\mathcal{D}'_a(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 = \sum_{n=0}^{\infty} w_n a_n$ et $\mathcal{D}_a(x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n a_n^2 - \left(\sum_{n=0}^{\infty} w_n a_n \right)^2$

2.) idem! $(f(t) - x)^2 = f^2(t) - 2x f(t) + x^2$ et c/mcx

- $t \mapsto f^2(t)$ et $t \mapsto x^2$ sont intégrables sur $[0, 1]$

- $|f(t)| \leq \max(1, f^2(t)) \leq 1 + f^2(t)$ (rem: on a aussi $f(t) \times 1 \leq \frac{f^2(t) + 1}{2}$)

comme $t \mapsto 1 + f^2(t)$ int./]0,1[≥ 2 car, par T.C. :

(2)

Δ définie sur $\mathbb{R}$

$$\Delta(x) = \int_0^1 f^2(t) dt - 2x \int_0^1 f(t) dt + x^2$$

Δ atteint son minimum en l'unique point :

$$x_1 = \int_0^1 f(t) dt \quad \text{et} \quad \Delta(x_1) = \int_0^1 f^2 - \left(\int_0^1 f\right)^2$$

Deuxième partie

3. $|f(t) - x| \leq |f(t)| + |x| = g(t)$ et g int./]0,1[

par T.C.

Δ est définie sur $\mathbb{R}$

($t \mapsto |f(t) - x|$ c'est borné par T.C.)

4. Soit $a \in \mathbb{R}$, $|\Delta(x) - \Delta(a)| \leq \int_0^1 ||f(t) - x| - |f(t) - a|| dt$
 $\leq \int_0^1 |x - a| dt \leq |x - a|$, donc Δ est 1-lipschitzienne
 sur $\mathbb{R}$ donc continue sur $\mathbb{R}$,

d; Δ continue sur $\mathbb{R}$

on écrit $f(t) = u f(t) + (1-u) f(t)$

* $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall u \in [0, 1]$

$$\Delta(ux + (1-u)y) = \int_0^1 |f(t) \cdot (ux + (1-u)y)| dt = \int_0^1 |u(f(t) - x) + (1-u)(f(t) - y)| dt$$

$$= \int_0^1 |u(f(t)-x) + (1-u)(f(t)-y)| dt \quad (3)$$

$$\leq \int_0^1 (u |f(t)-x| + (1-u) |f(t)-y|) dt$$

$$\leq u \Delta(x) + (1-u) \Delta(y) \quad \underline{\Delta \text{ convexe sur } \mathbb{R}}$$

$$b) |x| - |f(t)| \leq ||x| - |f(t)|| \leq |x - f(t)|, \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \forall t \in]0,1[$$

$$\text{donc } \int_0^1 (|x| - |f(t)|) dt \leq \Delta(x) \quad (t \mapsto |x| - |f(t)| \text{ int. }]0,1[)$$

$$\Leftrightarrow \Delta(x) \geq |x| - \int_0^1 |f(t)| dt \xrightarrow{x \rightarrow \pm \infty} +\infty - \text{cte} = +\infty$$

$$\underline{\lim_{x \rightarrow +\infty} \Delta = \lim_{x \rightarrow -\infty} \Delta = +\infty}$$

$$5) \forall x \in \mathbb{R} \quad \Delta(x) \geq 0, \text{ donc } V = \inf_{\mathbb{R}} f \in \mathbb{R}^+ \text{ (existe)}$$

$$\exists \alpha_1 > 0 \quad \forall x \geq \alpha_1 \quad \Delta(x) \geq V+1 \quad (\lim_{x \rightarrow +\infty} \Delta = +\infty)$$

$$\exists \alpha_2 > 0 \text{ et } \forall x \leq -\alpha_2 \quad \Delta(x) \geq V+1 \quad (\lim_{x \rightarrow -\infty} \Delta = +\infty)$$

$$\text{posons } a = \max(\alpha_1, \alpha_2) > 0$$

$$\text{d'où } V = \inf_{\mathbb{R}} \Delta = \inf_{[-a,a]} \Delta \quad \text{or } \begin{cases} [-a,a] \text{ est compact} \\ \Delta \text{ continue (segment)} \end{cases}$$

$$\text{donc } \Delta \text{ admet son minimum sur } [-a,a]$$

$$\text{csg : } \boxed{V = \inf_{[-a,a]} \Delta = \min_{[-a,a]} \Delta}$$

$$(\text{si } V = \Delta(c) \text{ et } c \in [-a,a])$$

$$\forall x \in [-a,a] \quad \Delta(x) \geq V$$

$$\forall x \notin [-a,a] \quad \Delta(x) \geq V+1 > V$$

Soit $\Pi = \Delta^{-1}(\{V\}) = \{x \in \mathbb{R} \mid \Delta(x) = V\} \neq \emptyset$ ($V = \Pi_{\min}$) ④

Si $\Pi = \{c\} = [c, c]$: intervalle. ^{soit} sinon $\forall (c, d) \in \Pi^2$ avec $c < d$

et soit $b \in]c, d[\exists u \in [0, 1] \mid b = uc + (1-u)d$

$$\Delta(b) \stackrel{(\Delta \text{ convexe})}{\leq} u \Delta(c) + (1-u) \Delta(d) = uV + (1-u)V = V$$

or $b \in \mathbb{R}$ donc $\Delta(b) \geq V$ d'où $\Delta(b) = V$

soit : $b \in \Pi$. d'où $\forall (c, d) \in \Pi^2 \ c < d \Rightarrow [c, d] \subset \Pi$

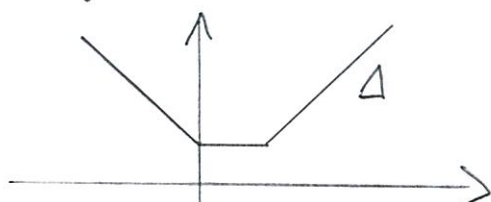
donc Π est convexe de $\mathbb{R}$ c'est donc un intervalle

d. Δ intervalle de $\mathbb{R}$

(* remarque : Π intervalle borné car $\Pi \subset [-9, 9]$ et Π est fermé (image réciproque par une continue ...) donc Π est un segment de $\mathbb{R}$ *)

6. a) $\Delta(x) = \int_0^{1/2} |1-x| dt + \int_{1/2}^1 |x| dt = \frac{1}{2} |x-1| + \frac{1}{2} |x|$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$ x $	$-x$	0	x	x
$ x-1 $	$1-x$	$1-x$	0	$x-1$
$\Delta(x)$	$\frac{1}{2}-x$	$\frac{1}{2}$	$x-\frac{1}{2}$	



$$\underline{\Delta} \quad \Delta(x) = \frac{1}{2} (|x| + |x-1|)$$

$$V = \frac{1}{2} \text{ et } \Pi = [0, 1]$$

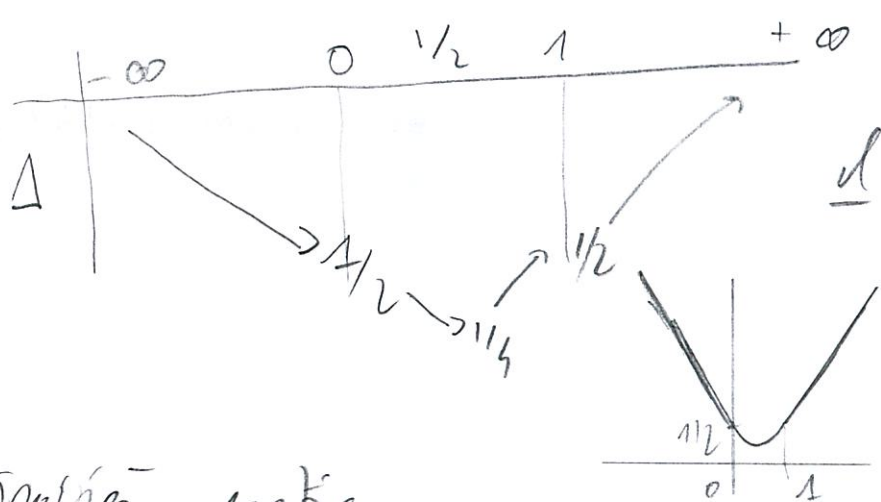
b) $\Delta(x) = \int_0^1 |t-x| dt$

• $x \leq 0$: $\Delta(x) = \int_0^1 (t-x) dt = \frac{1}{2} - x$

• $x \geq 1$: $\Delta(x) = \int_0^1 (x-t) dt = x - \frac{1}{2}$

• $0 < x < 1$: $\Delta(x) = \int_0^x (x-t) dt + \int_x^1 (t-x) dt$
 $= x^2 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}(1-x^2) - x(1-x)$
 $= \frac{1}{2} - x(1-x) = x^2 - x + \frac{1}{2}$

si $x \in]0, 1[$ $\Delta'(x) = 2x - 1$ d'où le tableau de Δ :



$$\Delta(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} - x & \text{si } x \leq 0 \\ x - \frac{1}{2} & \text{si } x \geq 1 \\ \frac{1}{2} - x(1-x) & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases}$$

$v = \frac{1}{4}$ et $\eta = \{ \frac{1}{2} \}$

Montrer que

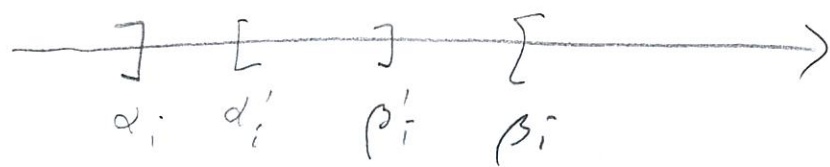
7.) Soit $i \in [0, n-1]$. Puisque g est monotone sur $]t_i, t_{i+1}[$ on a $g(]t_i, t_{i+1}[) =]\alpha_i, \beta_i[$

1^{er} cas : $J \cap]\alpha_i, \beta_i[= \emptyset$: $\forall t \in]t_i, t_{i+1}[\chi_J(t) = 0$

donc χ_J continue/mcx sur $]t_i, t_{i+1}[$

2^{em} cas : $J \cap]\alpha_i, \beta_i[=]\alpha'_i, \beta'_i[$

⑥



$\alpha'_i = f(c)$ et $\beta'_i = f(d)$ et supposons $c \leq d$ (idem si $c > d$)

$$\begin{cases} \forall t \in]t_i, c[& \chi_J(t) = 0 \\ \forall t \in]c, d[& \chi_J(t) = 1 \\ \forall t \in]d, t_{i+1}[& \chi_J(t) = 0 \end{cases} \quad \text{donc } \chi_J \text{ est n/mcx sur }]t_i, t_{i+1}[$$

Les autres cas se traitent de manière identique. Le point central est que $\exists \cap]\alpha_i, \beta_i[$ est toujours un intervalle et que f est monotone.

csq: χ_J est continue/morceaux sur chaque $]t_i, t_{i+1}[$

donc χ_J n'a qu'un nb fini de discontinuités $y_0, \dots, y_p$

$$\text{et } \forall j \in [0, p-1] \quad \chi_J|_{]y_j, y_{j+1}[} = 0 \text{ ou } \chi_J|_{]y_j, y_{j+1}[} = 1$$

$$\underline{d} \quad \boxed{\chi_J \text{ continue/morceaux sur }]0, 1[}$$

$$* \forall t \in]0, 1[\quad |\chi_J(t)| \leq 1 = \varphi(t) \text{ et } \varphi \text{ int. sur }]0, 1[$$

$$\text{par TC: } \boxed{\chi_J \text{ intégrable sur }]0, 1[}$$

$$\hat{6) a) \chi_J(t) = 1 \Leftrightarrow f(t) \in J \Leftrightarrow t \in f^{-1}(J)$$

⑦

donc $\lambda(J)$ est la "longueur" de $f^{-1}(J)$, c'est-à-dire la somme des longueurs des intervalles (nb finis) qui compose

$$f^{-1}(J): f^{-1}(J) = \bigcup_{i=1}^p (a_i, b_i) \text{ (2 à 2 disjoints)} \text{ alors } \lambda(J) = \sum_{i=1}^p (b_i - a_i)$$

$$\text{D'autre part } f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y) \quad \forall X, Y \subset \mathbb{R}$$

en effet si $t \in f^{-1}(X \cup Y)$ alors $f(t) \in X$ ou $f(t) \in Y$

soit $t \in f^{-1}(X)$ ou $t \in f^{-1}(Y)$, donc $t \in f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$

Réciproquement si $t \in f^{-1}(X)$ alors $f(t) \in X \subset X \cup Y$ donc $t \in f^{-1}(X \cup Y)$.

Enfin si $X \cap Y = \emptyset$ alors $f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y) = \emptyset$ sinon

$\exists t \in f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$ d'où $t \in X \cap Y = \emptyset$: Absurde

$$\text{Donc } \lambda(J_1 \cup \dots \cup J_n) = \text{longueur}(f^{-1}(J_1 \cup \dots \cup J_n))$$

$$= \text{longueur}(f^{-1}(J_1) \cup \dots \cup f^{-1}(J_n))$$

$$= \text{longueur}(f^{-1}(J_1)) + \dots + \text{longueur}(f^{-1}(J_n))$$

$$= \lambda(J_1) + \dots + \lambda(J_n)$$

(- 2 à 2 disjoints)

$$\underline{d} \quad \boxed{\lambda(J_1 \cup \dots \cup J_n) = \lambda(J_1) + \dots + \lambda(J_n)}$$

(8)

b) Grâce à a) et au fait que $\lambda(J) \geq 0, \forall J$

$$\text{on a } J_n \subset J_{n+1} \Rightarrow \lambda(J_n) \leq \lambda(J_{n+1})$$

$$\text{donc } \sup_{n \in \mathbb{N}} \lambda(J_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(J_n)$$

Pour $K = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_n$ et utiliser la cvg dominée :

Pour $f_n = \chi_{J_n} : \forall t \in K \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid t \in J_{n_0}$ et

$$\text{donc (au moins)} \quad \forall n \geq n_0 \quad f_n(t) = 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 = \chi_K(t)$$

$$\times \forall t \notin K : \forall n \in \mathbb{N} \quad t \notin J_n \quad \text{donc } f_n(t) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 = \chi_K(t)$$

csq (f_n) cvg dominée vers χ_K sur I

$$\times \forall n \in \mathbb{N} \quad |f_n(t)| \leq 1 = \varphi(t) \quad \& \quad \varphi \text{ int. sur } I$$

$\times f_n$ et χ_K sont c/mcx sur I

Par convergence dominée :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(J_n) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \lambda(J_n) = \int_I \chi_K = \lambda(K)}$$

c) Idem $g_n = \chi_{J_n}$ $K = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} J_n$ (peut-être vide, exemple : ?)

$$\text{si } t \in K \quad g_n(t) = 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 = \chi_K(t) \quad \text{si } t \notin K \exists n_0 \mid g_{n_0}(t) = 0$$

$$\text{et } \forall n, n_0(\lambda) \quad g_n(t) = 0 \rightarrow n \cdot 0 = g_{n_0}(t)$$

⑨

in domination ... ory dominie :

$$\underline{d} \quad \boxed{\lambda(\cap J_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(J_n) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \lambda(J_n)}$$

rien ici!

à dire
→

9. a) EV-lem $|f(t) - (n+\varepsilon)| - |f(t) - n|$ defin $g(t) / \varepsilon$: (10)

$$|f(t) - (n+\varepsilon)| - |f(t) - n| = \begin{cases} -\varepsilon & \text{si } f(t) \geq n+\varepsilon \\ \varepsilon + 2(n-f(t)) & \text{si } n < f(t) < n+\varepsilon \\ \varepsilon & \text{si } f(t) \leq n \end{cases}$$

$$ou = \begin{cases} -\varepsilon & \text{si } f(t) \in J_3 \\ \varepsilon + 2(n-f(t)) & \text{si } f(t) \in J_2 \\ \varepsilon & \text{si } f(t) \in J_1 \end{cases}$$

Considérons $g(t) = -\varepsilon \chi_{J_3}(t) + (\varepsilon + 2(n-f(t))) \chi_{J_2}(t) + \varepsilon \chi_{J_1}(t)$

Soit $t \in [0, 1]$

1^{er} cas: $f(t) \in J_3$ $g(t) = -\varepsilon + 0 + 0 = -\varepsilon$ $\swarrow$ car $J_3 \cap J_2 = J_3 \cap J_1 = \emptyset$

$$= |f(t) - (n+\varepsilon)| - |f(t) - n|$$

idem si $f(t) \in J_2$ et $f(t) \in J_3$

d'où $\forall t \in [0, 1] \quad g(t) = |f(t) - (n+\varepsilon)| - |f(t) - n|$ d'où

$$\int_0^1 g(t) dt = \Delta(n+\varepsilon) - \Delta(n)$$

$$\Leftrightarrow -\varepsilon \lambda(J_3) + \varepsilon \lambda(J_2) + 2 \int_0^1 \chi_{J_2}(t) (n-f(t)) dt + \varepsilon \lambda(J_1) = \Delta(n+\varepsilon) - \Delta(n)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{1}{\varepsilon} (\Delta(n+\varepsilon) - \Delta(n)) - \lambda(J_1) + \lambda(J_3) = \lambda(J_2) + 2 \int_0^1 \chi_{J_2}(t) (n-f(t)) dt}$$

b) Étudier l'égalité du a) avec $\varepsilon = \varepsilon_n > 0$ (11)

et (ε_n) tend vers 0 en décroissant :

* On applique le 8 c) avec $J'_n =]x, x + \varepsilon_n[$

(J'_n) décroissante d'où $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(J'_n) = \lambda(\cap J'_n) = \lambda(\emptyset) = 0$ Δ

* idem avec $J'_n =]x + \varepsilon_n, +\infty[$ et le 8 b)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(J'_n) = \lambda(\cup J'_n) = \lambda(]x, +\infty[)$$

$$* \left| \frac{2}{\varepsilon_n} \int_0^1 \chi_{J_2}(t) (n - f(t)) dt \right| \leq \frac{2}{\varepsilon_n} \int_0^1 \chi_{J_2}(t) \varepsilon_n dt$$

$$\text{car si } \chi_{J_2}(t) = 1 \text{ alors } f(t) \in]x, x + \varepsilon_n[\text{ avec } |n - f(t)| \leq \varepsilon_n$$

$$\text{donc } \left| \frac{2}{\varepsilon_n} \int_0^1 \chi_{J_2}(t) (n - f(t)) dt \right| \leq 2 \lambda(J_2) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\text{d'où : } \frac{1}{\varepsilon_n} (\Delta(x + \varepsilon_n) - \Delta(x)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda(J) - \lambda(]x, +\infty[)$$

lemme : Montrer que si $\varphi(\varepsilon_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ pour toute

suite (ε_n) décroissante strictement positive alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t) = 0$

si $\lim_{t \rightarrow 0} \varphi(t) \neq 0, \exists (\alpha_n)$ suite de $\mathbb{R}_+^* \setminus \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(\alpha_n) \neq 0$ (c'est le même argument)

d'où $\exists \alpha > 0 \setminus \forall N \in \mathbb{N} \exists n \geq N$ tq $|\varphi(\alpha_n)| \geq \alpha$

on peut donc extraire une suite $(\alpha'_n) = (\alpha_{p_n})$ de (α_n)

telles que $\forall n \in \mathbb{N} |\varphi(\alpha'_n)| \geq \alpha, \alpha_n < \alpha'_n > 0$ et

$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha'_n = 0$, on peut donc en extraire par récurrence

une suite (α''_n) décroissante (et tendant vers 0) :

$$\alpha''_0 = \alpha'_0 \text{ puis } \exists n_0 \in \mathbb{N} \setminus \forall n \geq n_0 \quad 0 < \alpha''_n \leq \alpha''_0$$

on prend $\alpha''_1 = \alpha''_{n_0+1}$ et ainsi de suite

$$\text{d'où } \begin{cases} |\varphi(\alpha''_n)| \geq \alpha \\ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(\alpha''_n) = 0 \text{ (c'est l'hypothèse)}$$

ceci est absurde d. (lemme) : $\lim_{t \rightarrow 0} \varphi(t) = 0$

on applique ceci à :

$$\varphi(t) = \frac{1}{t} (\Delta(n+t) - \Delta(n)) - \lambda(J_1) + \lambda(J_3) - \lambda(J_2) - \frac{2}{\varepsilon} \int_0^t \chi(t) / (n \cdot f(t)) \frac{dt}{dt}$$

$$\underline{d} \quad \forall n \in \mathbb{R} \quad \Delta'_d(n) = \lambda([- \infty, n]) - \lambda([n, + \infty[)$$

c) Posons $x + \varepsilon = y$ et le a) :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\varepsilon} (\Delta(y) - \Delta(y - \varepsilon)) - \lambda([- \infty, y - \varepsilon]) + \lambda([y, + \infty[) \\ &= \lambda([y - \varepsilon, y]) + \frac{2}{\varepsilon} \int_0^1 \chi_{J_2}(t) (y - \varepsilon - f(t)) dt \end{aligned}$$

Et on fait comme en b) :

$$* \lambda([- \infty, y - \varepsilon_n]) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda(\cup_{n \in \mathbb{N}} [- \infty, y - \varepsilon_n]) = \lambda([- \infty, y])$$

$$* \lambda([y - \varepsilon_n, y]) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda(\cap_{n \in \mathbb{N}} [y - \varepsilon_n, y]) = \lambda(\emptyset) = 0$$

$$* \left| \frac{2}{\varepsilon_n} \int_0^1 \chi_{J_2}(t) (y - \varepsilon_n - f(t)) dt \right| \leq \frac{2}{\varepsilon_n} \int_0^1 \chi_{J_2}(t) \varepsilon_n dt = 2 \lambda([y - \varepsilon_n, y]) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

et le même pseudo-critère régularisé :

$$\underline{\text{d}} \quad \boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad \Delta'_g(n) = \lambda([- \infty, x]) - \lambda([x, + \infty[)}$$

$$d) \quad \Delta'_d(n) - \Delta'_g(n) = \lambda([- \infty, n]) - \lambda([n, + \infty[) - \lambda([- \infty, n]) + \lambda([n, + \infty[)$$

$$\begin{aligned} \text{on} \quad \lambda([- \infty, n]) &= \lambda([- \infty, n[\cup [n, n]) \\ &= \lambda([- \infty, n[) + \lambda(\{n\}) \quad (\text{cf a)}) \end{aligned}$$

$$\text{de même} \quad \lambda([n, + \infty[) = \lambda(\{n\}) + \lambda([n, + \infty[)$$

$$\text{d'où} \quad \Delta'_d(n) - \Delta'_g(n) = 2\lambda(\{n\}) \geq 0$$

$$\underline{d1} \quad \forall n \in \mathbb{R} \quad \Delta'_g(n) \leq \Delta'_d(n)$$

(14)

(rem. c'est vrai pour toute fonction convexe !)

$$\underline{d} + \quad \Delta'_g(n) = \Delta'_d(n) \Leftrightarrow \lambda(\{n\}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \chi_{\{n\}} \text{ est nul sauf en un ns fini de point}$$

En effet $\chi_{\{n\}}(t) = 0$ ou 1 et continue/mcx donc elle

prend 0 ou 1 sur des intervalles de $[0, 1]$ et n'y $\forall t \in [\alpha, \beta]$

$$\chi_{\{n\}}(t) = 1 \text{ sur } \alpha < \beta \quad \text{alors} \quad \underbrace{\lambda(\{n\})}_{=0} \geq \int_{\alpha}^{\beta} 1 dt = \beta - \alpha > 0$$

← impossible ↑

$$\underline{d} \quad \Delta'_g(n) = \Delta'_d(n) \Leftrightarrow \{t \in [0, 1] \mid f(t) = n\} \text{ est fini}$$

10. a) on reprend les calculs effectués en 9 b) et c) avec

$$\varepsilon_n = \frac{1}{n} > 0 \quad \text{d'où}$$

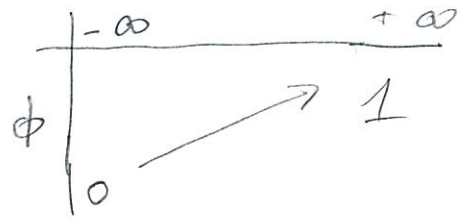
$$\phi(n+0) = \inf_{n \in \mathbb{N}^*} \phi(n + \frac{1}{n}) = \lambda\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*}]-\infty, n + \frac{1}{n}]\right) = \lambda(]-\infty, n]) = \phi(n)$$

$$\begin{aligned} \phi(n-0) &= \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \phi(n - \frac{1}{n}) = \lambda\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*}]-\infty, n - \frac{1}{n}]\right) = \lambda(]-\infty, n[) \\ &= \lambda(]-\infty, n]) - \lambda(\{n\}) \end{aligned}$$

$$\underline{d} \quad \phi(n+0) = \phi(n) \quad \text{et} \quad \phi(n-0) = \phi(n) - \lambda(\{n\})$$

b) on suppose $N \neq \emptyset$: (15)
 on a vu avec le 8. que $I \subset J \Rightarrow \lambda(I) \subset \lambda(J)$

donc ϕ est croissante sur $\mathbb{R}$ donc



Avec le 8. b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(n) = \phi(\mathbb{R}) = 1$

Grâce à T.L.B., $\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(n) = 1$ de même $\lim_{n \rightarrow -\infty} \phi(n) = \phi(\emptyset) = 0$

* D'autre part $\forall n \geq 1$ $\phi(n - \frac{1}{n}) \leq \phi(n)$ donc $\phi(n-0) \leq \phi(n)$

et si $y < n$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}^* \mid \forall n \geq n_0$ $y + \frac{1}{n} \leq n$ donc $y \leq n - \frac{1}{n}$

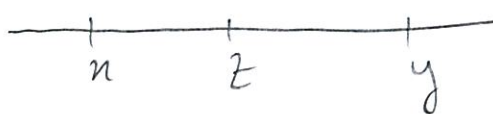
d'où avec $n \rightarrow \infty$: $\phi(y) \leq \phi(n-0)$

* $\exists A \in \mathbb{R} \mid \forall n \leq A$: $\phi(n) \leq \frac{1}{4}$ ($\lim_{n \rightarrow -\infty} \phi = 0$) d'où $N \subset [A, +\infty[$

* $\exists B \in \mathbb{R} \mid \forall n \geq B$: $\phi(n) \geq \frac{3}{4}$ donc $\phi(n-0) \geq \phi(n) \geq \frac{3}{4}$

d'où $N \subset]-\infty, B]$

CS4 $N \subset [A, B]$ et N bornée

*  soit $(n, y) \in \mathbb{N}^2$, $n < y$ et
 soit $z \in]n, y[$

Montrons que $z \in N$:

$$\phi(n-0) \leq \phi(n) \leq \phi(z-0) \leq \phi(z) \leq \phi(y-0) \leq \phi(y)$$

donc $\frac{1}{2} \leq \phi(n) \leq \phi(z) \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \phi(z)$ (15)
 $\phi(z-0) \leq \phi(y-0) \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \phi(z-0) \leq \frac{1}{2}$ d'où $z \in \mathbb{N}$

csq N est convexe donc N est un intervalle

ad. et ag.

* Montrons que ϕ et $\psi: n \mapsto \phi(n-0)$ sont continues sur $\mathbb{R}$.

Utilisons le critère régulier : si (ε_p) tend vers 0
 "pseudo" (vu au 3 b) page (11))

en déduisant alors $\lim_{p \rightarrow \infty} \phi(n + \varepsilon_p) = \lim_{p \rightarrow \infty} \phi(n - \varepsilon_p) = 0$
(idem pour ψ)

*
$$\begin{cases} \phi(n + \varepsilon_p) - \phi(n) = \lambda([n, n + \varepsilon_p]) \xrightarrow{p \rightarrow \infty} \lambda([n, n]) = 0 \quad (8.) \\ \phi(n) - \phi(n - \varepsilon_p) = \lambda([n - \varepsilon_p, n]) \xrightarrow{p \rightarrow \infty} \lambda([n, n]) = 0 \end{cases}$$

*
$$\begin{aligned} \psi(n + \varepsilon_p) - \psi(n) &= \lim_{r \rightarrow \infty} (\phi(n + \varepsilon_p - \frac{1}{r}) - \phi(n - \frac{1}{r})) \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \lambda([n - \frac{1}{r}, n - \frac{1}{r} + \varepsilon_p]) = \lambda([n, n + \varepsilon_p]) \\ &\xrightarrow{p \rightarrow \infty} \lambda([n, n]) = 0 \end{aligned}$$

de m $\psi(n - \varepsilon_p) - \psi(n) \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0$

Montrons que N est fermé avec $\alpha = \inf N$ et $\beta = \sup N$ (17)

$\exists (\alpha_p)$ suite décroissante de N vers α : $\alpha_p = \alpha + \varepsilon_p$ avec (ε_p) décroissante vers 0

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \phi(\alpha + \varepsilon_p - 0) \leq \frac{1}{2} \leq \phi(\alpha + \varepsilon_p)$$

$$p \rightarrow \infty : \phi(\alpha - 0) \leq \frac{1}{2} \leq \phi(\alpha) \text{ car } \phi \text{ et } \psi \text{ c'o s d. d'où } \alpha \in N$$

$$\text{idem pour } \beta_p = \beta - \varepsilon_p \dots \text{d'où } \beta \in N$$

d $N = [\alpha, \beta]$: intervalle fermé borné

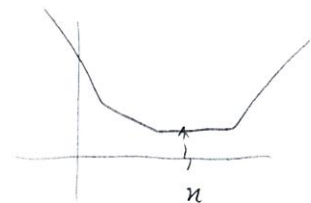
c) on a $\Delta'_d(n) = \lambda(]-\infty, n]) - \lambda(]n, +\infty[)$ c'est le g b)

et comme $\lambda(]-\infty, n]) + \lambda(]n, +\infty[) = \lambda(\mathbb{R}) = 1$

on a $\Delta'_d(n) = 2\phi(n) - 1$

de plus $\Delta'_g(n) = \Delta'_d(n) - 2\lambda(\{n\}) = 2\phi(n-0) - 1$

* Soit $x \in M$: $\Delta(n) = \inf_n \Delta$



Si $\Delta'_d(n) < 0$, $\exists \varepsilon > 0$ | $\frac{\Delta(n+\varepsilon) - \Delta(n)}{\varepsilon} \leq \frac{\Delta'_d(n)}{2} < 0$

d'où $\Delta(n+\varepsilon) < \Delta(n) = \inf_n \Delta$ Absurde

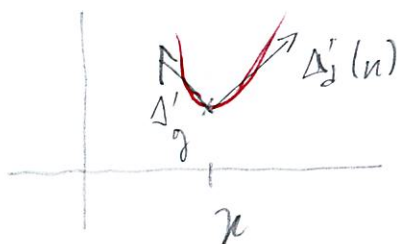
donc $\Delta'_d(n) \geq 0 \Leftrightarrow \phi(n) \geq \frac{1}{2}$

de m m $\Delta'_g(n) > 0$, $\exists \varepsilon \setminus \Delta(n-\varepsilon) < \Delta(n) = \min_n \Delta$ (18)

d'où $\Delta'_g(n) \leq 0 \Leftrightarrow \phi(n-0) \leq \frac{1}{2}$

donc $\phi(n-0) \leq \frac{1}{2} \leq \phi(n)$ soit $n \in \mathbb{N}$ d'où $\underline{m} \in \mathbb{N}$

Réciproquement : soit $n \in \mathbb{N}$ donc $\begin{cases} \Delta'_d(n) \geq 0 \\ \Delta'_g(n) \leq 0 \end{cases}$



Portons j-c n est un minimum global :

$\forall u > 0$ écrivons la convexité entre n et $n+u$:

$\forall z = t n + (1-t)(n+u) \in]n, n+u[$ (avec $t \in]0, 1[$)

$\Delta(z) \leq t \Delta(n) + (1-t) \Delta(n+u)$

$\Rightarrow \Delta(z) - \Delta(n) \leq (1-t) (\Delta(n+u) - \Delta(n))$

or $1-t = \frac{z-n}{u}$ d'où

$\frac{\Delta(z) - \Delta(n)}{z-n} \leq \frac{\Delta(n+u) - \Delta(n)}{u}$ ceci $\forall z \in]n, n+u[$

soit toute $z \geq n$ d'où $\Delta'_d(n) \leq \frac{\Delta(n+u) - \Delta(n)}{u}$

$\hat{=}$ $\Delta'_d(n) \geq 0$ et $u > 0$ on a : $\forall u > 0 : \Delta(n+u) - \Delta(n) \geq 0$

d'où $\forall u > 0 : \Delta(n+u) \geq \Delta(n)$

de m : $\frac{\Delta(n-u) - \Delta(n)}{-u} \leq \Delta'_g(n) \leq 0 \Rightarrow \Delta(n-u) \geq \Delta(n)$

csq $\Delta(n) = \min_{\mathbb{R}} \Delta$ soit : $n \in M$

(19)

d1 : $M = N$

Si $\overset{\circ}{N} \neq \emptyset$ soit $(n, y) \in (\overset{\circ}{N})^2$ $n < y$

$\forall z \in]n, y[\quad \Delta(z) \leq t \Delta(n) + (1-t) \Delta(y)$ (et $z = tn + (1-t)y$)
 $\leq tV + (1-t)V = V$

d'où $\Delta(z) = V$ et Δ constante sur $]n, y[$

Si on a $N = [\alpha, \beta]$ alors $\overset{\circ}{N} =]\alpha, \beta[$ et

$\forall n \in]\alpha, \beta[\quad \Delta(n) = V = \min_{\mathbb{R}} \Delta$

d'où $\forall n \in]\alpha, \beta[\quad \Delta'_2(n) = \Delta'_g(n) = \Delta'(n) = 0$

or $\Delta'_2(n) = 2\phi(n) - 1$

d $\forall n \in \overset{\circ}{N} : \phi(n) = \frac{1}{2}$

Quatrième partie

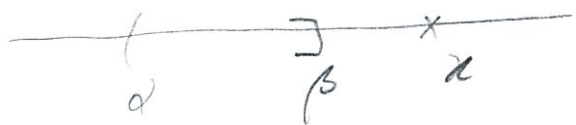
11) a) Soit $x \in \Pi_f$. Supposons $x \notin f(I)$, comme f est continue, $f(I)$ est un intervalle : $f(I) = (\alpha, \beta)$

$\forall t \in I \quad f(t) < x$ ou $\forall t \in I \quad f(t) > x$

* Supposons $\forall t \in I \quad f(t) < x$

on a donc $f(I) = (\alpha, \beta) \subset]-\infty, n[$ d'où $\beta \in \mathbb{R}$ (20)

1^{re} cas : $\beta \in f(I)$ donc $f(I) = (\alpha, \beta] \subset]-\infty, n[$



$$\forall y \geq \beta \quad \Delta(y) = \int_0^1 (y - f(t)) dt = y - \int_0^1 f(t) dt$$

donc $\Delta'_g(y) = 1 \quad \forall y > \beta$ d'où $\Delta'_g(n) = 1$ ce qui

est impossible car $n \in \pi_f (\Delta'_g(n) \leq 0)$

2^{de} cas $\beta \notin f(I)$ et $\beta < n$: impossible pour la même raison ($\Delta'_g(n) = 1$)

3^{de} cas $\beta \notin f(I)$ et $\beta = n$: $f(I) = (\alpha, n[\subset]-\infty, n[$
 β est la limite en 0 ou 1 ($I =]0, 1[$)

étudions 0 et 1 : considérons $J = [\frac{1}{10}, \frac{9}{10}]$

$f(J) = [\alpha', \beta']$ (image d'un segment) et $\beta' < \beta$

soit $y \in [\beta', \beta]$ (et $\beta = n$)

$$\Delta(y) = \int_0^{\frac{1}{10}} |y - f(t)| dt + \int_{\frac{1}{10}}^{\frac{9}{10}} (y - f(t)) dt + \int_{\frac{9}{10}}^1 |y - f(t)| dt$$

d'où:

on utilise $|a| - |b| \leq |a - b|$

(2)

$$\begin{aligned} \Delta(y) - \Delta(x) &= \int_0^{1/10} (|y - f(t)| - |x - f(t)|) dt + \frac{8}{10}(y-x) + \int_{9/10}^1 (|y - f(t)| - |x - f(t)|) dt \\ &\leq \frac{8}{10}(y-x) + \int_0^{1/10} |y - f(t) - x + f(t)| dt + \int_{9/10}^1 |y - f(t) - x + f(t)| dt \\ &\leq \frac{8}{10}(y-x) + \frac{2}{10}(x-y) \quad (x > y) \\ &\leq \frac{8}{10}(y-x) < 0 \quad \text{or} \quad \Delta(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta \quad \text{donc} \end{aligned}$$

impossible

car les 3 cas sont impossibles d'où (en faisant
à la fin $\forall t \in I, f(t) > x$) on obtient:

$$\underline{\Delta} \quad \boxed{\Pi_f \subset f(I)}$$

b) on a $\Pi_f = N_f = [\alpha_0, \beta_0]$ (avec le 10 c) en notant $N_f = N$)

Supposons $\alpha_0 < \beta_0$. Soit $a \in I \setminus f(I)$ et $b \in I \setminus f(I)$ avec $\alpha_0 < a < \beta < \beta_0$

Supposons pour fixer les idées que $a < b$ (rôles symétriques)

$$\forall \text{ le 10 c) } \phi(\alpha) = \phi(\beta) = \frac{1}{2} \quad [\alpha, \beta] \subset]\alpha_0, \beta_0[= N_f$$

$$\text{d'où} \quad \lambda([-\infty, \beta]) = \lambda([-\infty, \alpha]) = 1 \quad \lambda([\alpha, \beta]) = 0$$

$$\text{donc} \quad \lambda([\alpha, \beta]) = \int_0^1 \chi_{[\alpha, \beta]}(t) dt = 0$$

comme f est continue et que $\gamma = \frac{\alpha + \beta}{2} \in]\alpha, \beta]$ (22)

il existe $c \in [\alpha, \beta] \setminus f(c) = \gamma$ et par continuité

de f en c : $\exists \varepsilon > 0 \setminus \forall t \in [c - \varepsilon, c + \varepsilon] \quad f(t) \in]\alpha, \beta]$

$$\text{d'où} \quad \lambda([\alpha, \beta]) \geq \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} \chi_{] \alpha, \beta]}(t) dt = \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} 1 dt = 2\varepsilon > 0$$

Absurde

$$\underline{\text{d}} \quad \alpha_0 = \beta_0 \quad \text{et} \quad \pi_f = \{ \alpha_0 \}$$

$$c) * \quad v_f = \Delta(m_f) = \inf_{\Pi} \Delta \leq \Delta(\sigma) = \int_0^1 |f(t)| dt$$

$$\underline{\text{d}} \quad v_f \leq \int_0^1 |f(t)| dt$$

$$* \int_0^1 m_f - |f(t)| \leq \int_0^1 |m_f - |f(t)|| \leq \int_0^1 |m_f - f(t)| \quad (+ \text{ la "dt"})$$

$$\Rightarrow m_f - \int_0^1 |f(t)| dt \leq \Delta(m_f) = v_f \leq \int_0^1 |f(t)| dt$$

$$\Rightarrow \boxed{m_f \leq 2 \int_0^1 |f(t)| dt}$$

12. En fait on a montré que $|m_f| \leq 2 \int_0^1 |f(t)| dt$

$$\text{d'où} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |m_n| \leq 2 \int_0^1 |g_n(t)| dt = u_n$$

u_n est bornée (car $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \int_0^1 |g(t)| dt$) (23)

d'où $\exists n' \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N} \mid m_n \leq u_n \leq n'$ d'où

(m_n) suite bornée. Par Bolzano-Weierstrass :

$$\sigma\text{-al}((m_n)) = X \neq \emptyset$$

$$\text{Posons } \Delta_{g_n} : x \mapsto \int_0^1 |x - g_n(t)| dt$$

on a facilement $\forall n \in \mathbb{N} \mid |\Delta_{g_n}(x) - \Delta_g(x)| \leq \|g_n - g\|_1$

d'où $\|\Delta_{g_n} - \Delta_g\|_{\infty, [0,1]} \leq \|g_n - g\|_1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ d'où

(Δ_{g_n}) cvg uniformément vers Δ_g

soit $l \in X$, $\exists \varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ st g telle que $m_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} l$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \Delta_{g_{\varphi(n)}}(m_{\varphi(n)}) \leq \Delta_{g_{\varphi(n)}}(x)$$

puisque $n \rightarrow \infty$: $\Delta_g(l) \leq \Delta_g(x)$ d'où $\Delta_g(l) = \min_{x \in X} \Delta_g(x)$
 $\nwarrow$ à justifier

donc $l \in \Pi_g$

$$\underline{d} \quad \boxed{X = \sigma\text{-al}((m_n)) \subset \Pi_g}$$

(1)

```

> f:=proc(x)
>   if x<1/4 then x^2+3;
>   elif x<1/2 then -5*x+3;
>   elif x<3/4 then exp(x)
>   else -x^2+3;
>   fi;
> end;
>

```

```

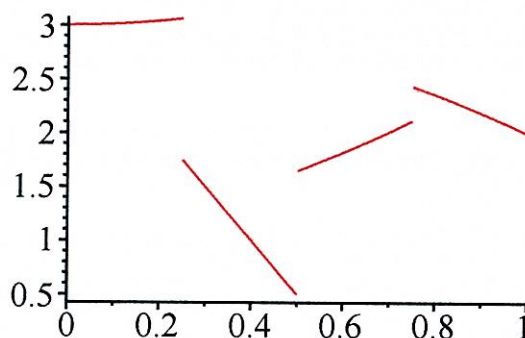
f:=proc(x)
  if x < 1/4 then
    x^2 + 3
  elif x < 1/2 then
    -5*x + 3
  elif x < 3/4 then
    exp(x)
  else
    -x^2 + 3
  end if
end proc

```

```

> plot(f,0..1,discont=true);

```



```

> chi:=proc(a,b,t)
>   if f(t)>=a and f(t)<=b then 1 else 0 fi;
> end;
> a:=1.5;b:=2.;
> essai:=t->chi(a,b,t);
> plot(essai,0..1,discont=true,y=-1..1.5,axes=boxed);

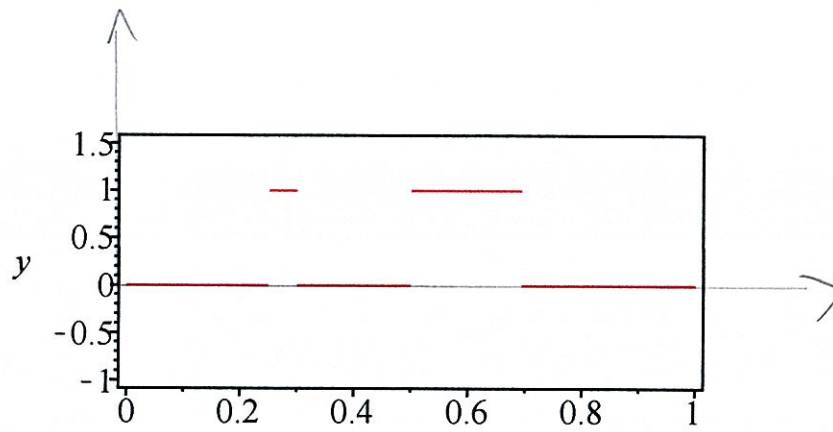
```

$\chi := \text{proc}(a, b, t) \text{ if } a \leq f(t) \text{ and } f(t) \leq b \text{ then } 1 \text{ else } 0 \text{ end if end proc}$

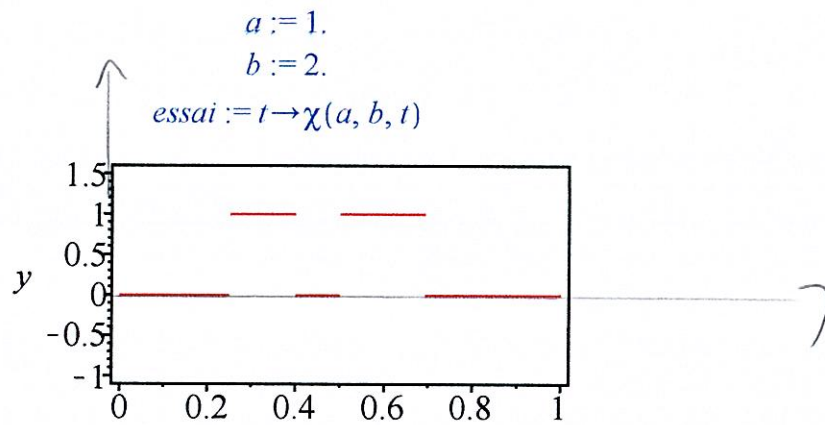
$a := 1.5$

$b := 2.$

$\text{essai} := t \rightarrow \chi(a, b, t)$



```
> a:=1.;b:=2.;
> essai:=t->chi(a,b,t);
> plot(essai,0..1,discont=true,y=-1..1.5,axes=boxed);
```



```
> a:=1.5;b:=4.;
> essai:=t->chi(a,b,t);
> plot(essai,0..1,discont=true,y=-1..1.5,axes=boxed);
```

