

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

On attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

La première partie est indépendante des trois autres.

Première partie

1. On considère une suite $(w_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de réels strictement positifs vérifiant $\sum_{n=0}^{\infty} w_n = 1$ et une suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de réels telle que $\sum_{n=0}^{\infty} w_n a_n^2 < +\infty$.

Vérifier que la fonction $x \mapsto D_a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n (a_n - x)^2$ est bien définie sur \mathbf{R} et atteint son minimum. On déterminera ce minimum ainsi que l'ensemble des points où il est atteint.

2. On considère une fonction continue réelle de carré intégrable f sur l'intervalle $]0, 1[$. Vérifier que la fonction $x \mapsto D_f(x) = \int_0^1 (f(t) - x)^2 dt$ est bien définie sur \mathbf{R} et atteint son minimum. On déterminera ce minimum ainsi que l'ensemble des points où il est atteint.

Deuxième partie

Dans cette partie, on se donne une fonction réelle f sur l'intervalle $I =]0, 1[$, continue par morceaux et intégrable.

3. Vérifier que la fonction $x \mapsto \Delta(x) = \int_0^1 |f(t) - x| dt$ est bien définie sur \mathbf{R} .

4.a) Montrer que la fonction Δ est continue et convexe.

b) Déterminer les limites de $\Delta(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.

5. Montrer que Δ admet un minimum, que l'on notera V , et que l'ensemble M des points où Δ atteint ce minimum est un intervalle.

6. *Exemples.* Déterminer Δ, V et M dans les deux cas suivants :

a)
$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \leq 1/2 \\ 0 & \text{si } t > 1/2 \end{cases} .$$

b) $f(t) = t$.

Troisième partie

On se donne à nouveau une fonction f ayant les propriétés indiquées dans la **deuxième partie** ; on suppose en outre que f est monotone par morceaux, c'est-à-dire qu'il existe des nombres

$$t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n = 1$$

tels que f soit monotone sur chaque intervalle $]t_i, t_{i+1}[$. Pour tout intervalle J de \mathbf{R} , éventuellement réduit à un point, on définit une fonction χ_J sur I par

$$\chi_J(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } f(t) \in J \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

7. Vérifier que la fonction χ_J est continue par morceaux et intégrable sur I . On note $\lambda(J)$ son intégrale.

8. Établir les propriétés suivantes de l'application λ :

a) Étant donnés des intervalles J_1, \dots, J_n deux à deux disjoints dont la réunion est encore un intervalle, on a

$$\lambda(J_1 \cup \dots \cup J_n) = \lambda(J_1) + \dots + \lambda(J_n) ;$$

b) Étant donnée une suite croissante d'intervalles $(J_n)_{n \in \mathbf{N}}$, on a

$$\lambda\left(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} J_n\right) = \sup_{n \in \mathbf{N}} \lambda(J_n) . \quad \text{On utilisera le théorème de convergence dominée}$$

c) Étant donnée une suite décroissante d'intervalles $(J_n)_{n \in \mathbf{N}}$, on a

$$\lambda\left(\bigcap_{n \in \mathbf{N}} J_n\right) = \inf_{n \in \mathbf{N}} \lambda(J_n) . \quad \text{On utilisera le théorème de convergence dominée}$$

9. Soit x un réel et ε un réel > 0 ; on pose

$$J_1 =]-\infty, x] , \quad J_2 =]x, x + \varepsilon[, \quad J_3 = [x + \varepsilon, +\infty[.$$

a) Démontrer l'égalité suivante :

$$\frac{1}{\varepsilon}(\Delta(x + \varepsilon) - \Delta(x)) - \lambda(J_1) + \lambda(J_3) = \lambda(J_2) + \frac{2}{\varepsilon} \int_0^1 \chi_{J_2}(t)(x - f(t))dt ,$$

où Δ est la fonction définie à la question 3.

b) Montrer que Δ admet en tout point x une dérivée à droite que l'on déterminera.

c) Même question pour la dérivée à gauche.

d) Comparer ces deux dérivées et dire pour quelles valeurs de x elles sont égales.

10. On pose

$$\phi(x) = \lambda(] - \infty, x]) \quad (1)$$

$$\phi(x + 0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi\left(x + \frac{1}{n}\right) \quad \phi(x - 0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi\left(x - \frac{1}{n}\right) \quad (2)$$

a) Exprimer $\phi(x + 0)$ et $\phi(x - 0)$ en fonction de $\phi(x)$ et de $\lambda(\{x\})$.

b) Montrer que l'ensemble N des réels x vérifiant $\phi(x - 0) \leq 1/2 \leq \phi(x)$, s'il n'est pas vide, est un intervalle fermé borné.

c) Comparer les ensembles M (défini à la question 5.) et N et préciser le comportement de ϕ sur l'intérieur de N lorsque N n'est pas réduit à un point.

Quatrième partie

11. On se donne une fonction f sur I , réelle, continue, intégrable et monotone par morceaux ; on note M_f et V_f ce qui était noté M et V .

a) Démontrer l'inclusion $M_f \subset f(I)$.

b) Montrer que M_f est réduit à un point, que l'on notera m_f .

c) Comparer V_f et $\int_0^1 |f(t)|dt$, puis m_f et $2 \int_0^1 |f(t)|dt$.

12. On considère une suite (g_n) de fonctions sur I , réelles, continues, intégrables et monotones par morceaux ; on suppose que cette suite converge en moyenne vers une fonction g continue par morceaux, intégrable et monotone par morceaux. On pose $m_n = m_{g_n}$. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite (m_n) est non vide et inclus dans l'ensemble M_g des points où la fonction $x \mapsto \int_0^1 |g(t) - x|dt$ atteint son minimum.

* *

*