

I.A c'est du cours

I.B.1) $\{0\}$ et E sont stables par tout end. f et comme E non nul, $\{0\} \neq E$ sont stables par f

* Il suffit de donner un exemple avec $E = \mathbb{R}^2$ et f qui n'a aucune valeur propre (I.A), soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\chi_f(n) = n^2 + 1$ donc $\text{sp}_{\mathbb{R}} A = \text{sp}(f) = \emptyset$ d'où f admet exactement 2 sev stables

I.B.2) $\{0\}$, E et $\text{Ker } f$ sont stables / f , comme f non nul, $\text{Ker } f \neq E$ et comme f non injectif, $\text{Ker } f \neq \{0\}$ d'où f admet au moins 3 sev stables

$\text{Im } f$ est également stable par f , différent de E et $\{0\}$ et différent de $\text{Ker } f$ par th. du rang et imparité de $\dim E$. d'où f admet au moins 4 sev stables

Pour l'exemple, il suffit que $\text{Ker } f = \text{Im } f$ soit la seule droite stable.

Il suffit que $f^2 = 0$ et $f \neq 0$. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ (2)

canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Si on note

$b = (e_1, e_2)$ base canonique de $\mathbb{R}^2$, $\text{Im } f = \text{vect}(f)$, $\chi_f(n) = n^2$
 $= \text{vect}(e_1)$

donc $\text{sp}(f) = \{0\}$, donc $\text{vect}(e_1)$ unique droite stable / f .

Comme $\pi_f \mid \chi_f$ et $f \neq 0$, $\pi_f = n^2$
 $\uparrow$ C.H.

d° f admet exactement 3 sev stables : $\{0\}$, $\mathbb{R}^2$ et $\text{vect}(e_1)$

I.C.1) soit $F = \text{vect}(u_1, \dots, u_k)$ tel que $f(u_i) = \lambda_i u_i$.

On a $f(F) = \text{vect}(f(u_1), \dots, f(u_k)) \subset \text{vect}(u_1, \dots, u_k) = F$

d° f stable sur F et $\forall \lambda \in \text{sp}(f) \quad f|_{E_\lambda} = \lambda \text{id}_{E_\lambda}$ (homothétie)

I.C.2) Soit (u, v) une famille libre de E_λ (avec $\dim E_\lambda \geq 2$)

Posons $D_\alpha = \text{vect}(u + \alpha v)$ pour $\alpha \in \mathbb{K}$.

* $D_\alpha \subset E_\lambda$ et $u + \alpha v \neq 0$ (liberté) donc $\dim D_\alpha = 1$

donc $\forall \alpha \in \mathbb{K} \ (\text{Rou } \mathbb{C}) \quad D_\alpha$ droite stable / f

* $D_\alpha = D_\beta \Rightarrow u + \alpha v \in D_\beta \Rightarrow \exists \mu \in \mathbb{K} \setminus u + \alpha v = \mu(u + \beta v)$

d'où, par liberté, $1 = \mu$ et $\alpha = \mu \beta = \beta$

(3)

cq: $\mathcal{D}_\alpha = \mathcal{D}_\beta \Rightarrow \alpha = \beta$ d'où $\{\mathcal{D}_\alpha, \alpha \in K\}$ est infini.

I.C.3) On $\mathcal{F} = \{f \in \mathcal{L}(E) \mid \text{tous sev } L \subset E \text{ stable } / f\}$ est un sev.

* $0 \in \mathcal{F}$

* $\forall (f, g) \in \mathcal{F}^2, \forall \lambda \in K$

$\forall F$ sev de E $(\lambda f + g)(F) \subset f(F) + g(F) \subset F + F = F$

donc $\lambda f + g \in \mathcal{F}$ d'où $\mathcal{F}$ K -ev.

Montrons que $\dim \mathcal{F} = 1$ ("classique") en montrant que si $f \in \mathcal{F}$ alors $\exists \lambda \in K \mid f = \lambda \text{id}_E$

$\forall n \in E$ vect(n) stable / f donc $\exists \lambda_n \in K \mid f(n) = \lambda_n n$

→ Soit (n, y) libre dans E , $f(n) = \lambda_n n$, $f(y) = \lambda_y y$ et

$f(n+y) = \lambda_{n+y}(n+y)$ mais aussi $f(n+y) = \lambda_n n + \lambda_y y$
(linéarité)

par liberté, $\lambda_{n+y} = \lambda_n$ et $\lambda_{n+y} = \lambda_y$ d'où $\lambda_n = \lambda_y$

→ si $y = \alpha n, n \neq 0$, on montre de $\hat{m}$: $\lambda_{\alpha n} = \lambda_n$

cq: soit $n_0 \in E, n_0 \neq 0$, posons $\lambda = \lambda_{n_0}$

on a $\forall n \in E, n \neq 0 \Rightarrow f(n) = \lambda n$, comme ④
 $f(0) = 0 = \lambda \cdot 0$, on a $f = \lambda \text{Id}_E$, la reciproque est
évidente

d' $F = \text{vect}(\text{Id}_E)$ et $\dim F = 1$

I.D.1) Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de F et soit
 $(u_1, \dots, u_n)$ une base de $\vec{v}_p$ de f . Par T.B.I.,
 il existe $(e_1, \dots, e_p, u_{i_1}, \dots, u_{i_h})$ base de E

Posons $G = \text{vect}(u_{i_1}, \dots, u_{i_h})$, on a :

* $F \oplus G = E$ (concat)

* $f(G) = \text{vect}(\lambda_{i_1} u_{i_1}, \dots, \lambda_{i_h} u_{i_h}) \subset G$

d' F possède un suppl. stable / f

I.D.2) Comme $\dim E \geq 1$, par d'Al. Gauss, $\text{sp}(f) \neq \emptyset$.

Posons $F = \bigoplus_{\lambda \in \text{sp}(f)} E_\lambda$, F est stable / f ($\pm \subset 1$), si

$F \neq E$, F possède un supplémentaire G stable / f
 et $\dim G \geq 1$. donc $\hat{f}$ l'induit de f sur G admet

une valeur propre α et donc $\exists n \in G, n \neq 0$ ⑤
 et $\hat{f}(n) = \alpha n$, d'où $n \in G \cap E_\alpha \subset G \cap F$

car $G \cap F \neq \{0\}$: absurde car F est G -SD

d'o $F = \bigoplus_{\lambda \in \text{sp}(f)} E_\lambda = E$: f diagonalisable

Si $K = \mathbb{R}$, l'endomorphisme du I.B.1) montre que
 c'est faux si $K = \mathbb{R}$, les seuls sev stables sont
 $\{0\}$ et $E = \mathbb{R}^2$ qui ont $\bar{c}$ sev stable supp. E et $\{0\}$
 comme $\text{sp}(f) = \emptyset$, f non diagonalisable.

d'o c'est faux si $K = \mathbb{R}$

II.A.1) $\forall n \in F, \exists (n_1, \dots, n_p) \in \prod_{i=1}^p (F \cap E_i)$

$n = n_1 + \dots + n_p$
 $f(n) = \lambda_1 n_1 + \dots + \lambda_p n_p \in \bigoplus_{i=1}^p F \cap E_i = F$ car F est f -stable

d'o F stable/ f

II.A.2) On a $F \subset E = \bigoplus_{i=1}^p E_i$ car f diagonalisable.

II.A.3) B_n est par définition génératrice de V_n . ⑥

Par le théorème fondamental de liberté des $\vec{v}_p$, B_n libre

d' B_n base de V_n

II.A.4) $\forall j \in [1, n] \quad f^{j-1}(n) = \lambda_1^{j-1} n_1 + \dots + \lambda_n^{j-1} n_n \in V_n$

Grâce à la base B_n :

$$\text{rg}(n, f(n), \dots, f^{n-1}(n)) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} = n \text{ car}$$

c'est une matrice de $V(D, \Omega)$, avec les λ_i 2 à 2 $\neq$.

d'où $(n, \dots, f^{n-1}(n))$ base de V_n

II.A.5) On en déduit que $\forall i \in [1, n]$, n_i est C.L.

de $(n, \dots, f^{n-1}(n))$. Comme F stable / f , $\forall i: f^i(n) \in F$

et donc (sev), $n_i \in F$ d'où $n \in \bigoplus_{i=1}^n F_n E_i \subset \bigoplus_{i=1}^p F_n E_i$

cqs $F = (F - \{0\}) \cup \{0\} \subset \bigoplus_{i=1}^p F_n E_i$

comme $\bigoplus_{i=1}^p (F_n E_i) \subset \bigoplus_{i=1}^p F = F$ d' $F = \bigoplus_{i=1}^p F_n E_i$

II.B.1) $\dim E_i = 1$

(7)

II.B.2) vv de $\mathbb{I}A$, il y a exactement n droites stables/f

II.B.3) soit F stable/f et $\dim F = k$, avec de $\mathbb{I}A$,

$$F = \bigoplus_{i=1}^n F \cap E_i \quad \text{or} \quad F \cap E_i = \begin{cases} E_i & \text{si } E_i \subset F \\ \{0\} & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{car } \dim E_i = 1)$$

$$\text{cgs } F = \bigoplus_{i \in I} E_i \quad \text{ou } I = \{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid F \cap E_i = E_i\}$$

$$\text{comme } \dim F = \sum_{i \in I} \dim E_i = |I|, \text{ on a } |I| = k$$

Réciproquement soit $I \subset \llbracket 1, n \rrbracket$ t.g. $|I| = k$, on a

$$\text{alors } \bigoplus_{i \in I} E_i = F \text{ stable/f et } \dim F = k$$

d°: Il y a $\binom{n}{k}$ sev stables/f

$$\text{II.B.4) Il y a donc } 1 + n + \sum_{k=2}^{n-1} \binom{n}{k} + 1 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

$\dim: 0 = 1 - k \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket = n$

d°: Il y a 2^n sev stables/f, ce sont $\bigoplus_{i \in X} E_i$ avec $X \in \mathcal{P}(\llbracket 1, n \rrbracket)$
($\{0\}$ si $X = \emptyset$)

$$\text{III, A.1)} \quad \mathcal{D}(\mathbb{K}_n[X]) = \mathbb{K}_{n-1}[X] \subset \mathbb{K}_n[X]$$

(8)

$\mathcal{D} \mathbb{K}_n[X]$ stable par $\mathcal{D}$.

$$M_{(1, X, \dots, X^n)}(\hat{\mathcal{D}}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & n \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

III A 2) a) soit $(P_1, \dots, P_h)$ une base de F , alors

$$n = \max(d^0 P_1, \dots, d^0 P_h) \text{ convient} \\ = d^0(P_{i_0})$$

$$\mathcal{D}^0 \boxed{F \subset \mathbb{K}_n[X]} \\ \text{et } R = P_{i_0}$$

b) Comme F est stable par $\mathcal{D}$, $(R, \mathcal{D}(R), \dots, \mathcal{D}^n(R))$ est une famille de F et libre car échelonnée en degré (à partir de) donc base de $\mathbb{K}_n[X]$ d'où

$$\mathbb{K}_n[X] \subset F \quad \mathcal{D}^0 \underline{F = \mathbb{K}_n[X]}$$

III A3) $\{0\}, \mathbb{K}_n[X] (n \in \mathbb{N})$ sont les sev stables/ $\mathcal{D}$ de dim. finie.

Soit F un sev stable/ $\mathcal{D}$ de dim. infinie.

$\forall n \in \mathbb{N} \exists R \in F \setminus \mathcal{D}^0 R \geq n$ sinon $F \subset \mathbb{K}_{n-1}[X]$

et $\bigcup_{k=d^0 R} F \cap \mathbb{K}_k[X] = \mathbb{K}_\infty[X]$ grâce au III A)

donc $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n[x] \subset K_L[x] \subset F$

cg $F = E$

(9)

d° $\{0\}, K_n[x]$ et $K[x]$ sont les sev stables / ①

III, B.1) $B_{f,u} = (f^{n-1}(u), \dots, f(u), u)$ de cardinal n

Pour être une base, il faut que $f^{n-1}(u) \neq 0$ et c'est suffisant en écrivant $\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i f^{n-i}(u) = 0$ puis en composant par f^{n-1} puis $f^{n-2}, \dots, f^0$

d° $B_{f,u}$ est une base de E ssi $f^{n-1}(u) \neq 0$

III B2) on a: $M_{B_{f,u}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

considérons $B'_u = (\alpha_{n-1} f^{n-1}(u), \dots, \alpha_1 f(u), \alpha_0 u)$ avec $\alpha_i \neq 0$

si $B_{f,u}$ est une base de E , B'_u aussi et

$$M_{B'_u}(f) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} & & 0 \\ 0 & & \frac{\alpha_{n-2}}{\alpha_{n-1}} & \\ \vdots & & \vdots & \ddots \\ 0 & 0 & & \frac{\alpha_0}{\alpha_1} \end{pmatrix}$$

Il suffit d'avoir $\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} = 1, \frac{\alpha_{n-2}}{\alpha_{n-1}} = 2, \dots, \frac{\alpha_0}{\alpha_1} = n$ (10)

prenons $\alpha_n = 1$, on a $\alpha_{n-1} = 1, \alpha_{n-2} = 2, \alpha_{n-3} = 6 = 3!, \dots, \alpha_0 = n!$

$\alpha^0 B'_{f,u} = (f^{n-1}(u), 1!, f^{n-2}(u), \dots, (n-2)! f(u), (n-1)! u)$ convient

III.B.3) Le III.A.3) donne tous les ser stables par tout endo. de matrice A_{n-1} dans une base donnée:

$\{0\}, K[x] = \text{vect}(1, x, \dots, x^n)$ pour $\mathbb{D}$, ce qui

se traduit pour f :

$\{0\}, \text{vect}(f^{n-1}(u), \dots, (i-1)! f^{n-i}(u))$ avec $1 \leq i \leq n$

$\alpha^0: \{0\}, \text{vect}(f^{n-1}(u), \dots, f^{n-i}(u)), 1 \leq i \leq n$ sont les $n+1$ ser
stables par f .

$\{0\} = K u f$, $\text{vect}(f^{n-1}(u)) \subset K u f$ et comme $\text{rg } A_{n-1} = n-1$,

$\dim K u f = 1$ d'où $\text{vect}(f^{n-1}(u)) = K u f$

De même on a $\text{vect}(f^{n-1}(u), \dots, f^{n-i}(u)) \subset K u f^{i-1}$ $\downarrow$ i -ème end.
si on pose $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$, il est clair que $N^i = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$d'au \quad \dim N^j = n-j \quad (\dim N^j = \dim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$$

$\xleftarrow{n-j}$

(11)

cgf $\dim \ker f^i = i$ et donc $\text{vect}(f^{n-1}(u), \dots, f^{n-i}(u)) = \ker f^i$

d' $\{0\} \subset \ker f \subset \ker f^2 \subset \dots \subset \ker f^n = E$ sont les sev stables / f

III.C) Considérons G un supplémentaire stable de $\ker f$ (qui est stable / f). Notons $\hat{f}$ l'induit de f sur G .

$$\text{on a } X_{\hat{f}} \mid X_f.$$

$$\cap_g X_f = X^n, \text{ soit } b \text{ une base de } E \text{ et } A = \cap_b(f).$$

$A^n = (0)$ car f nilpotente. On "voit" $A \in M_n(\mathbb{C})$, d'où

$$\pi_A \mid X^n \text{ donc } \exists i \mid \pi_A = X^i \text{ et comme } \pi_A \text{ est } X_A$$

$$\text{on a les } n \text{ rangs, } X_A = X^n \text{ donc } X_f = X_A = X^n$$

On en déduit que $X_{\hat{f}} = X^i$ avec $i = \dim G$.

Si $\dim G \geq 1$, 0 est val. propre de $\hat{f}$, donc $\exists n \neq 0 \mid$

$$\hat{f}(u) = f(u) = 0 \text{ cgs } u \in \ker f \cap G \neq \{0\} : \text{absurde}$$

On a donc $G = \{0\}$ et $f = 0$, la réciproque est évidente (tous les SEV de E sont stables / θ)

(12)

d'o l'application nulle est la seule solution

IV A) $f(x_j) = \Pi x_j = \begin{pmatrix} m_{1j} \\ \vdots \\ m_{nj} \end{pmatrix}$ et $\Pi_{B_n}(f) = M$

B) x_f est un polynôme de degré impair, donc

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x_f = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x_f = -\infty$, par valeurs intermédiaires,

x_f possède une racine donc f possède une val propre réelle

C1) $X = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(z_1) \\ \vdots \\ \operatorname{Re}(z_n) \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} \operatorname{Im}(z_1) \\ \vdots \\ \operatorname{Im}(z_n) \end{pmatrix}$ $(X, Y) \in E^2$

Il est clair que $\Pi \bar{Z} = \bar{\lambda} \bar{Z}$ et comme $\lambda \neq \bar{\lambda}$, par théorème de liberté, $(Z, \bar{Z})$ libre (de $M_{n,1}(\mathbb{C})$)

Plaçons nous dans $G = \operatorname{vect}(Z, \bar{Z})$,

$\operatorname{rg}(X, Y) = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}i \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = 2$

En a donc (X, Y) libre de $m_{n,1}(\mathbb{C})$.

(13)

d'où $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{C}^2$ $aX + bY = (0) \Rightarrow a = b = 0$

d'où (X, Y) libre de E

$$\begin{aligned} z &= X + iY \\ \bar{z} &= X - iY \end{aligned}$$

$$c.2) \quad f(X) = \frac{1}{2} (\lambda z + \bar{\lambda} \bar{z}) = \frac{1}{2} (\lambda z + \bar{\lambda} \bar{z})$$

$$= \frac{1}{2} (\lambda (X + iY) + \bar{\lambda} (X - iY))$$

$$= \operatorname{Re}(\lambda)X - \operatorname{Im}(\lambda)Y \in \operatorname{vect}(X, Y) = F$$

$$\text{de même } f(Y) = \operatorname{Im}(\lambda)X + \operatorname{Re}(\lambda)Y \in F \quad (\alpha = \operatorname{Re}(\lambda), \beta = \operatorname{Im}(\lambda))$$

$$\text{d'où } X, Y \text{ stable } / f \text{ et } \Pi_{(X, Y)}(f_F) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

D) L'affirmation est exacte, soit $f \in \mathcal{L}(E)$ admet une valeur propre réel λ et si $\forall u \neq 0, f(u) = \lambda u$, $D = \operatorname{vect}(u)$ stable $/ f$

sinon si on pose $\Pi = \Pi_b(f)$ à b base de E , avec les notations de $\mathbb{H} \subset \mathbb{C}$, si $X = \Pi_b(\bar{n})$ et $Y = \Pi_b(\bar{y})$,

$D = \operatorname{vect}(\bar{n}, \bar{y})$ plan stable $/ f$.

d'où tout end. en dim. finie possède une droite ou un plan stable

E) Il suffit que f vérifie $f(x^i) = x^{i+1}$ i.e

(14)

$$\underline{f(P) = XP \quad (d^0 f(P) > d^0 P)}$$

$$\text{Dm. } \forall D = \text{vect}(P), \quad f(D) \not\subset D \\ P \neq 0$$

$$\forall F = \text{vect}(P, Q) \quad 0 \leq d^0 P \leq d^0 Q$$

$$d^0 f(Q) = d^0 Q + 1 \Rightarrow f(Q) \notin F$$

d' oui!

V.A.1) Raisonnons par récurrence sur k .

$$-k=1, V_1 = E \text{ oui!}$$

si c'est vrai pour $k \geq 1$, soit $V_1, \dots, V_{k+1}$, $k \leq V$
tel que $\forall i \in [1, k+1]: V_i \neq E$, $\cap_{i=1}^{k+1} V_i \neq E$.

$$\text{Supposons le contraire; } \bigcup_{i=1}^k V_i \cup V_{k+1} = E.$$

Par hypothèse de récurrence, $\bigcup_{i=1}^k V_i \neq E$, donc

$\exists n \in V_{k+1}$ et $n \notin \bigcup_{i=1}^k V_i$. Soit $y \notin V_{k+1}$, donc $y \in \bigcup_{i=1}^k V_i$.

considérons les $z_\lambda = y + \lambda n$, $\lambda \in \mathbb{K}$

$\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad z_\lambda \notin V_{k+1}$ sinon $y \in V_{k+1}$: $\rightarrow \leftarrow$

cas $\forall \lambda \in K \exists i_\lambda \in [1, k] \setminus z_\lambda \in V_{i_\lambda}$

(15)

si $i_\lambda = i_\mu$ alors $(\lambda - \mu)x \in V_{i_\lambda} \subset \bigcup_{i=1}^k V_i$, comme $n \notin \bigcup_{i=1}^k V_i$

on a $\lambda - \mu = 0$ d'où $\varphi: K \rightarrow [1, k]$ est injective,
 $\lambda \mapsto i_\lambda$

Comme K est infini, il est absurde d'où $\bigcup_{i=1}^{k+1} V_i \neq E$
 (ParoC)

d'où $V_1 \cup \dots \cup V_k = E \Rightarrow \exists i \in [1, k] \setminus V_i = E$

V.A.2) Comme pour le polynôme minimal, introduisons:

$I_x = \{P \in K[x] \setminus P(f)(x) = 0\}$ est facilement un idéal de $K[x]$, donc (th de structure), $\exists P_0 \in K[x]$, non nul, tel que $I_x = P_0 | K[x]$, comme $\pi_f \in I_x$, $I_x \neq \{0\}$ et donc $P_0 \neq 0$ d'où unitaire. $\Pi_n = P_0$ convient

$\forall P \in K[x], P(f)(x) = 0 \Leftrightarrow P \in I = \Pi_n | K[x] \Leftrightarrow \Pi_n | P$

V.A.3) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ t.q. $\pi_f = I^d$ avec P irréductible, unitaire

et $d \in \mathbb{N}^*$. $\forall x \in E \pi_f \in I_n$ donc $\Pi_n | \pi_f$ d'où $\exists \delta_n \leq d$

$\Pi_n = P^{\delta_n}$. Considérons $t = \max\{\delta_n \mid x \in E - \{0\}\}$, on a

$\forall n \in E \ P^t(f)(n) = 0$ donc $\pi_f | P^t$ cgs $t = d$ et $\exists n \in E \setminus$

$M_n = P^d = \pi_f$

ds le cas général, $\pi_f = P_1^{\delta_1} \dots P_k^{\delta_k}$ et avec $T \in \mathbb{D}N$,

$$E = \bigoplus_{i=1}^k E_i \text{ où } E_i = K^n P_i^{\delta_i}(f). \text{ Notons } f_i \text{ l'induit de } f/E_i$$

$$\forall i \in [1, k], P_i^{\delta_i}(f_i) = 0_i \text{ donc } \pi_{f_i} | P_i^{\delta_i} \text{ et si } \pi_{f_i} = P_i^{t_i}$$

$$\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k P_j^{\delta_j} \times P_i^{t_i} = Q \text{ vérifie } Q(f) = 0 \text{ donc } \pi_f | Q \text{ et } t_i = \delta_i$$

$$\text{Avec le 1 r cas, } \exists n_i \in E_i \setminus \pi_{f_i} = P_i^{\delta_i} = \Pi_{n_i}$$

$$\text{Posons } n = n_1 + \dots + n_k$$

$$\forall P \in K[X] \setminus P(f)(n) = 0, \text{ on a } P(f)(n_1) + \dots + P(f)(n_k) = 0$$

Par stabilité des E_i et S.D., $\forall i, P(f)(n_i) = 0$ donc

$$\Pi_{n_i} | P \text{ donc } P_i^{\delta_i} | P \text{ et comme les } P_i^{\delta_i} \text{ 1 r entre eux,}$$

$$P_1^{\delta_1} \dots P_k^{\delta_k} = \pi_f | P \text{ donc pour } P = \Pi_n, \pi_f | \Pi_n$$

Comme on a vu que $\Pi_n | \pi_f$, on conclut:

d  $\exists n \in E \setminus \pi_f = \Pi_n$

V.B) $\forall n \in E$, posons $F_n = \text{vect}(f^h(n))_{h \in \mathbb{N}}$: F_n est stable par f . Soit $G_1, \dots, G_s$ les SEV stables / f (il y en a un nb fini).

$$\text{On a } \bigcup_{n \in E} F_n = E = \bigcup_{i \in I} G_i \text{ avec}$$

$$I = \{i \in [1, h] \mid \exists n \in E \text{ et } F_n = G_i\}$$

D'après le VA 1), $\exists i \in I \mid G_i = E$, donc

$$\exists n \in E \setminus E = F_n = \text{vect}(f^h(n))_{h \in \mathbb{N}}$$

On en déduit que $d^\circ \pi_n = \dim F_n = \dim E = n$.

Comme $\pi_n \mid \pi_f \mid \chi_f$ par C.H., $d^\circ \pi_f \leq n$

$$\underline{d^\circ \pi_n = \pi_f \text{ et } d^\circ \pi_f = n}$$

V.C.1) Soit x tel que $\pi_f = \pi_x$, donc $E = \text{vect}(x, \dots, f^{n-1}(x))$

$$\text{On } \text{vect}(x, \dots, f^{n-1}(x)) \subset \text{vect}(P(f)(x))_{P \in K}$$

$$\underline{d^\circ E = \text{vect}(P(f)(x))_{P \in K[X]}}$$

2) Soit F v, sev stable/ f .

$$\text{Considérons } I = \{P \in K[X] \mid P(f)(x) \in F\}$$

On a I idéal de $K[X]$ car F stable/ f et stable/ $q_1 f$ $\forall q$

Donc $I = P_0 K[X]$ et P_0 unitaire car $I \neq \{0\}$ (18)
 $\uparrow \pi_f \in I$

Posons $\alpha_F = P_0(f)(n)$, on a $F = \text{vect}(\{f^k(n_F)\}_{k \in \mathbb{N}})$

Or P_0 unitaire et divise π_f , donc il n'y a qu'un nombre fini de P_0 possible, donc un nb fini

de n_F et donc d'où : Il n'y a qu'un nb fini de $\text{vect } F$ stable / f

VI. A.2) $u \cdot v = \sum_{i=1}^n u_i v_i = {}^t U V$

VI B) $\forall n \in H, f(n) \in H$. Or $H = \mathcal{D}^\perp$ donc

$\forall n \in H, f(n) \perp u$ donc ${}^t (AX) U = 0$ soit ${}^t X {}^t A U = 0$

Posons $v \in E$ la matrice de $\mathcal{B}$: ${}^t A U$ on a donc

$\forall n \in H, n \perp v$ donc $v \in H^\perp = \mathcal{D} = \text{vect}(u)$

d'où $\exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus v = \lambda u$ ce qui donne ${}^t A U = \lambda U$

Réciproquement : si ${}^t A U = \lambda U$ $\leftarrow n \in H = \mathcal{D}^\perp$

$\forall n \in H \quad f(n) \cdot u = {}^t X {}^t A U = \lambda {}^t X U = \lambda (n, u) = 0$

donc $f(n) \in u^\perp = H$ cgs $f(H) \subset H$

(19)

d° H stable / $f \Leftrightarrow \forall \vec{v}_p$ de ${}^t A$

VI.c) Calculons $\chi_{{}^t A}(n) = \chi_A(n) = - \begin{vmatrix} 1-n & -4 & 0 \\ 1 & -2-n & -1 \\ 1 & 1 & -n \end{vmatrix}$

$= - \begin{vmatrix} 1-n & -4 & 0 \\ 0 & -2-n & -1 \\ 1-n & 1 & -n \end{vmatrix} \xrightarrow{C_1 + C_3} (n-1) \begin{vmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & -2-n & -1 \\ 1 & 1 & -n \end{vmatrix}$

$= (n-1) \begin{vmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & -2-n & -1 \\ 0 & 5 & -n \end{vmatrix} \xrightarrow{L_3 - L_1}$

$= (n-1) \underbrace{(n^2 + 2n + 5)}_{\Delta' < 0}$

donc $\text{sp}({}^t A) = \{1\}$

on résout ${}^t A X = X \Leftrightarrow \begin{cases} n+x+z = n \\ -4n-2y+z = y \\ -y = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+z=0 \\ -4n-3y+z=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = -z \\ z = z \end{cases}$

cgs $E_1({}^t A) = \text{vect}(U)$ avec $U = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

d° $H = U^\perp = \mathbb{P} / n-y+z=0$ unique plan stable / f

(20)

VI.D.1) Soit $(u_1, \dots, u_n)$ une base de $\vec{V}$ de f .

Posons $H_i = \text{vect}(u_j)_{j \in [1, n] - \{i\}}$, $\dim H_i = n-1$
 donc H_i hyperplan et stable/ f (I.C.1) (car $h(u)$)

$$\bigcap_{i=1}^n H_i = \{0\}, \text{ car si } \sum_{j=1}^n \alpha_j u_j \in H_i \Rightarrow \alpha_i = 0$$

al' il existe un hyp. stable/ f d'intersection $\{0\}$

VI.D.2) Oui! on montre $E \perp \text{P.S.}$, si $H_1, \dots, H_n$

sont n hyperplans stables / $\bigcap_{i=1}^n H_i = \{0\}$. Posons
 $H_i^\perp = \text{vect}(u_i)$ et si U_i matrice colonne de u_i , on a
 avec la B, U_i $\vec{v}_p$ de ${}^t A$.

$$\text{on } \text{vect}(u_1, \dots, u_n)^\perp = \bigcap_{i=1}^n H_i^\perp \text{ (double c)} \\ = \{0\}$$

$$\text{donc } \text{vect}(u_1, \dots, u_n) = \{0\}^\perp = E.$$

Cgs $(U_1, \dots, U_n)$ base de $\vec{V}_p$ de ${}^t A$, donc ${}^t A$ diagonalisable.

$$\text{or } {}^t A = P D P^{-1} \Rightarrow A = Q D Q^{-1} \text{ d' } \underline{f \text{ diagonalisable.}}$$

($Q = {}^t P^{-1}$)