CENTRALE PC 2015 QUE J'AI MODIFIÉ EN SUJET CENTRALE MP

Dans ce problème, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$ et E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul.

Si f est un endomorphisme de E, pour tout sous-espace F de E stable par f on note f_F l'endomorphisme de F induit par f, c'est-à-dire défini sur F par $f_F(x) = f(x)$ pour tout x dans F.

Pour tout endomorphisme f d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E on définit la suite $(f^n)_{n\in\mathbb{N}}$ des puissances de f par

$$\begin{cases} f^0 = \mathrm{Id_E}, \\ f^{k+1} = f \circ f^k = f^k \circ f \quad \text{pour tout } k \text{ dans } \mathbb{N}. \end{cases}$$

On note $\mathbb{K}[X]$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ et, pour tout n de $\mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X]$ le sous-espace de $\mathbb{K}[X]$ des polynômes de degré au plus égal à n.

Pour $n \geqslant 1$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est l'espace des matrices carrées à n lignes et à éléments dans $\mathbb{K}$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est l'espace des matrices colonnes à n lignes et à éléments dans $\mathbb{K}$.

I Première partie

Dans cette partie, f est un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

I.A – Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une droite F engendrée par un vecteur u soit stable par f.

I.B –

I.B.1) Montrer qu'il existe au moins deux sous-espaces de E stables par f et donner un exemple d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ qui n'admet que deux sous-espaces stables.

I.B.2) Montrer que si E est de dimension finie $n \geqslant 2$ et si f est non nul et non injectif, alors il existe au moins trois sous-espaces de E stables par f et au moins quatre lorsque n est impair.

Donner un exemple d'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ qui n'admet que trois sous-espaces stables. Pour cet endomorphisme, on déterminera le polynôme minimal.

I.C –

I.C.1) Montrer que tout sous-espace engendré par une famille de vecteurs propres de f est stable par f. Préciser l'endomorphisme induit par f sur tout sous-espace propre de f.

I.C.2) Montrer que si f admet un sous-espace propre de dimension au moins égale à 2 alors il existe une infinité de droites de E stables par f.

I.C.3) Montrer que l'ensemble des endomorphismes f pour lesquels tous les sous-espaces de E sont stables par f est un $\mathbb{K}$-ev dont on déterminera la dimension.

I.D – Dans cette sous-partie, E est un espace de dimension finie.

I.D.1) Montrer que si f est diagonalisable alors tout sous-espace de E admet un supplémentaire dans E stable par f. On pourra partir d'une base de F.

I.D.2) Montrer que si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et si tout sous-espace de E stable par f admet un supplémentaire dans E stable par f, alors f est diagonalisable. Qu'en est-il si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$?

II Deuxième partie

Dans cette partie, n et p sont deux entiers naturels au moins égaux à 2, f est un endomorphisme diagonalisable d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n, qui admet p valeurs propres distinctes $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$ et, pour tout i dans $[\![1, p]\!]$, on note E_i le sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ_i.

II.A – Il s'agit ici de montrer qu'un sous-espace F de E est stable par f si et seulement si

$$F = \bigoplus_{i=1}^{p}(F \cap E_i).$$

II.A.1) Montrer que tout sous-espace F de E tel que $F = \bigoplus_{i=1}^{p}(F \cap E_i)$ est stable par f.

II.A.2) Soit F un sous-espace de E stable par f et x un vecteur non nul de F. Justifier l'existence et l'unicité de $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ dans $E_1 \times \cdots \times E_p$ tel que $x = \sum_{i=1}^{p} x_i$.

II.A.3) Si on pose $H_x = \{i \in [\![1, p]\!] \mid x_i \neq 0\}$, H_x est non vide et, quitte à renuméroter les valeurs propres (et les sous-espaces propres), on peut supposer que $H_x = [\![1, r]\!]$ avec $1 \leqslant r \leqslant p$.
Ainsi on a $x = \sum_{i=1}^{r} x_i$ avec $x_i \in E_i \setminus \{0\}$ pour tout i de $[\![1, r]\!]$.
On pose $V_x = \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_r)$.
Montrer que $\mathcal{B}_x = (x_1, \ldots, x_r)$ est une base de V_x.

II.A.4) Montrer que $(f^{j-1}(x))_{1\leqslant j\leqslant r}$ est une base de V_x.

II.A.5) Conclure.

II.B – Dans cette sous-partie, on se place dans le cas où $p = n$.

II.B.1) Préciser la dimension de E_i pour tout i dans $[\![1, p]\!]$.

II.B.2) Combien y a-t-il de droites de E stables par f ?

II.B.3) Si $n \geqslant 3$ et $k \in [\![2, n-1]\!]$, combien y a-t-il de sous-espaces de E de dimension k et stables par f ?

II.B.4) Combien y a-t-il de sous-espaces de E stables par f dans ce cas ? Les donner tous.

III Troisième partie

III.A – On considère l'endomorphisme D de dérivation sur $\mathbb{K}[X]$ défini par $D(P) = P'$ pour tout P dans $\mathbb{K}[X]$.

III.A.1) Vérifier que pour tout n de $\mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X]$ est stable par D et donner la matrice A_n de l'endomorphisme induit par D sur $\mathbb{K}_n[X]$ dans la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$.

III.A.2) Soit F un sous-espace de $\mathbb{K}[X]$, de dimension finie non nulle, stable par D.

a) Justifier l'existence d'un entier naturel n et d'un polynôme R de degré n tels que $R \in F$ et $F \subset \mathbb{K}_n[X]$.

b) En déduire F.

III.A.3) Donner tous les sous-espaces de $\mathbb{K}[X]$ stables par D.

III.B – On considère un endomorphisme f d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension $n \geqslant 2$ tel que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$.

III.B.1) Déterminer l'ensemble des vecteurs u de E tels que la famille $\mathcal{B}_{f,u} = (f^{n-i}(u))_{1 \leqslant i \leqslant n}$ soit une base de E.

III.B.2) Déterminer une base de E telle que la matrice de f dans cette base soit A_{n-1}.

III.B.3) Donner tous les sous-espaces de E stables par f. Combien y en a-t-il ? Donner une relation simple entre ces sous-espaces stables et les noyaux $\ker(f^i)$ pour i dans $[\![0, n]\!]$.

III.C – Dèterminer les endomorphismes f d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension $n \geqslant 2$ tel que $f^n = 0$ et tels que tout sous-espace stable par f admette un supplémentaire stable.

IV Quatrième partie

Dans cette partie, n est un entier naturel non nul, M est dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et f est l'endomorphisme de $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ défini par $f(X) = MX$ pour tout X de E.

IV.A – Si on pose $X_i = \begin{pmatrix} \delta_{1,i} \\ \vdots \\ \delta_{n,i} \end{pmatrix}$ où $\delta_{k,\ell} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = \ell, \\ 0 & \text{si } k \neq \ell \end{cases}$ et $\mathcal{B}_n = (X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ la base canonique de E, quelle est la matrice de f dans $\mathcal{B}_n$?

IV.B – Montrer que si n est impair, alors f admet au moins une valeur propre réelle.

IV.C – Dans cette question, $\lambda = \alpha + i\beta$, avec (α, β) dans $\mathbb{R}^2$, est une valeur propre non réelle de M et Z de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, non nul est tel que $MZ = \lambda Z$.
Si $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, on pose $\overline{M} = (m'_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ avec $m'_{i,j} = \overline{m_{i,j}}$ (conjugué du nombre complexe $m_{i,j}$) pour tout (i,j) de $[\![1, n]\!]^2$ et si $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$, on pose $\overline{Z} = \begin{pmatrix} z'_1 \\ \vdots \\ z'_n \end{pmatrix}$ avec $z'_i = \overline{z_i}$ pour tout i de $[\![1, n]\!]$.
On pose $X = \dfrac{1}{2}(Z + \overline{Z})$ et $Y = \dfrac{1}{2i}(Z - \overline{Z})$.

IV.C.1) Vérifier que X et Y sont dans E et montrer que la famille (X, Y) est libre dans E.

IV.C.2) Montrer que le plan vectoriel F engendré par X et Y est stable par f et donner la matrice de f_F dans la base (X, Y).

IV.D – Que penser de l'affirmation : « tout endomorphisme d'un espace vectoriel réel de dimension finie admet au moins une droite ou un plan stable » ?

IV.E – Existe-t-il un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ n'admettant ni droite ni plan stable ?

V Cinquième partie

Dans cette partie E est un espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$.

On souhaite démontrer que l'ensemble des sous-espaces vectoriels stables par f, un endomorphisme de E, est fini si et seulement si le polynôme minimal de f est de degré n.

V.A –

V.A.1) Montrer que si V_1, ...,V_k sont k SEV de E tel que $V_1 \cup \cdots \cup V_k = E$ alors l'un de ces SEV est égale à E.

V.A.2) Soit $x \in E$. Montrer l'existence d'un polynôme unitaire M_x tel que

$$\forall P \in \mathbb{K}[X] : P(f)(x) = 0 \iff M_x \text{ divise } P.$$

V.A.3) Montrer qu'il existe un vecteur $x \in E$ tel que $\Pi_f = M_x$ (où Π_f est le polynôme minimal de f).

Indication : On commencera par le cas $\Pi_f = P^s$ où P est un polynôme irréductible de $\mathbb{K}[X]$ et $s \in \mathbb{N}^*$.

V.B – On suppose que l'ensemble des sous-espaces vectoriels stables par f, un endomorphisme de E, est fini. Montrer que le polynôme minimal de f est de degré n.

V.C – On suppose que le polynôme minimal de f est de degré n.

V.C.1) Montrer qu'il existe un vecteur x de E tel que $E = \text{vect}\Big(P(f)(x)\Big)_{P \in \mathbb{K}[X]}$.

V.C.2) Montrer que l'ensemble des sous-espaces vectoriels stables par f est fini.

V Sixième partie

Dans cette partie E est un espace vectoriel réel de dimension n muni d'une base $\mathcal{B} = (\varepsilon_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$. On considère un endomorphisme f de E et on note A sa matrice dans la base $\mathcal{B}$.

VI.A –

VI.A.1) On admet qu'il existe un unique produit scalaire sur E pour lequel $\mathcal{B}$ est orthonormée. Ce produit scalaire est noté de manière usuelle par $\langle u, v\rangle$ ou plus simplement $u \cdot v$ pour tout (u, v) de E^2.

VI.A.2) Si u et v sont représentés par les matrices colonnes respectives U et V dans la base $\mathcal{B}$, montrer que $u \cdot v$ et le produit matriciel ${}^tUV$ sont égaux (où ${}^tU$ est la transposée de U).

VI.B – Soit H un hyperplan de E et D son supplémentaire orthogonal (on a donc $H \oplus D = E$ et $D = H^{\perp}$) .

Si (u) est une base de D et si U est la matrice colonne de u dans $\mathcal{B}$, montrer que H est stable par f si et seulement si U est un vecteur propre de la transposée de A.

VI.C – Déterminer ainsi le(s) plan(s) stable(s) de f lorsque $n = 3$ et f canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. *On pourra munir $\mathbb{R}$ de son produit scalaire canonique.*

VI.D – Dans cette question, E est un espace vectoriel réel de dimension n et f est un endomorphisme de E.

VI.D.1) Montrer que si f est diagonalisable alors il existe n hyperplans de E, $(H_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, tous stables par f, tels que $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} H_i = \{0\}$.

VI.D.2) Un endomorphisme f de E pour lequel il existe n hyperplans de E stables par f et d'intersection réduite au vecteur nul est-il nécessairement diagonalisable ?