

BONNE ANNÉE $(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7) \times 8 \times 9 + 10$

FONCTIONS INTÉGRABLES : COURS & EXERCICES

1. **Définition** d'une intégrale convergente, absolument convergente dans tous les cas d'intervalles.
2. **Définition** d'une fonction réelle ou complexe intégrable sur un intervalle quelconque I .
3. **Théorème Fondamental**

• (démonstration avec $0 \leq f + |f| \leq 2|f| \dots$:

Soit f de I , un intervalle quelconque dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} . f est absolument convergente alors elle est convergente.

4. **7 Intégrales de référence** • :

$t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ **SSI** $\alpha > 1$.

$t \mapsto \frac{1}{|t|^\alpha}$ est intégrable sur $] -\infty, -1][$ **SSI** $\alpha > 1$.

$t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur $]0, 1]$ **SSI** $\alpha < 1$.

$t \mapsto \frac{1}{(b-t)^\alpha}$ est intégrable sur $[a, b[$ **SSI** $\alpha < 1$.

$t \mapsto \frac{1}{(t-a)^\alpha}$ est intégrable sur $]a, b]$ **SSI** $\alpha < 1$.

$t \mapsto e^{\lambda t}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ **SSI** $\lambda < 0$.

$t \mapsto -\ln t$ est intégrable sur $]0, 1]$.

5. **Théorème de Comparaison** • : Manipulation, pour montrer l'intégrabilité ou la non intégrabilité d'une fonction, des 5 signes : O , o , \geq , \leq , \sim .
6. **Théorème de Changement de variable** • :

Si φ est C^1 et **bijective** de I' dans I et si f va de I dans \mathbb{C} alors

$\int_{I'} (f \circ \varphi) \cdot |\varphi'|$ et $\int_I f$ sont de même nature et s'il y a convergence : $\int_{I'} (f \circ \varphi) \cdot |\varphi'| = \int_I f$.

Conséquence importante : f est intégrable sur I **SSI** $(f \circ \varphi) \cdot |\varphi'|$ est intégrable sur I' .

7. **Pour le calcul d'IPP** : on doit vérifier que 2 des 3 blocs convergent.
8. **Propriétés de l'intégrale** : Chasles-Linéarité-Croissance
9. **Dérivation**

Soit $I = [\alpha, +\infty[$ et soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ **continue** et **intégrable** sur I .

On définit la fonction F par $F : [\alpha, +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$

$$x \mapsto \int_x^{+\infty} f(t) dt$$

F est de classe C^1 sur I et $\forall x \in I$, $F'(x) = -f(x)$.

On a le même résultat en remplaçant $+\infty$ par $b \in \mathbb{R}$ et donc I par $I = [\alpha, b[$.

On a un résultat similaire en remplaçant $+\infty$ par $-\infty$ et donc I par $I =]-\infty, \beta]$.

10. **Intégration des relations de comparaisons**

a) **Théorème 1 (convergence)** •

Soit $f : [\alpha, b[\rightarrow \mathbb{C}$ continue par morceaux sur $[\alpha, b[$ (le plus souvent étant $b = +\infty$).
 Soit $\varphi : [\alpha, b[\rightarrow \mathbb{R}^+$ continue par morceaux et intégrable sur $[\alpha, b[$.

Domination :

$$\text{Si } f(x) \underset{x \rightarrow b}{=} O(\varphi(x)), \text{ alors } \int_x^b f(t) dt \underset{x \rightarrow b}{=} O\left(\int_x^b \varphi(t) dt\right)$$

Négligeabilité :

$$\text{Si } f(x) \underset{x \rightarrow b}{=} o(\varphi(x)), \text{ alors } \int_x^b f(t) dt \underset{x \rightarrow b}{=} o\left(\int_x^b \varphi(t) dt\right)$$

Équivalence :

$$\text{Si } f(x) \underset{x \rightarrow b}{\sim} \lambda \varphi(x), \text{ avec } \lambda \in \mathbb{C}^*, \text{ alors } \int_x^b f(t) dt \underset{x \rightarrow b}{\sim} \lambda \int_x^b \varphi(t) dt$$

Remarque : On a un résultat similaire si $I =]a, \beta]$

b) Théorème 2 (divergence) ■

Soit $f : [\alpha, b[\rightarrow \mathbb{C}$ continue par morceaux sur $[\alpha, b[$ (le plus souvent étant $b = +\infty$).
 Soit $\varphi : [\alpha, b[\rightarrow \mathbb{R}^+$ continue par morceaux et non intégrable sur $[\alpha, b[$.

Domination :

$$\text{Si } f(x) \underset{x \rightarrow b}{=} O(\varphi(x)), \text{ alors } \int_\alpha^x f(t) dt \underset{x \rightarrow b}{=} O\left(\int_\alpha^x \varphi(t) dt\right)$$

Négligeabilité :

$$\text{Si } f(x) \underset{x \rightarrow b}{=} o(\varphi(x)), \text{ alors } \int_\alpha^x f(t) dt \underset{x \rightarrow b}{=} o\left(\int_\alpha^x \varphi(t) dt\right)$$

Équivalence :

$$\text{Si } f(x) \underset{x \rightarrow b}{\sim} \lambda \varphi(x), \text{ avec } \lambda \in \mathbb{C}^*, \text{ alors } \int_\alpha^x f(t) dt \underset{x \rightarrow b}{\sim} \lambda \int_\alpha^x \varphi(t) dt$$

Remarque : On a un résultat similaire si $I =]a, \beta]$

11. Intégrales impropres Exemple fondamental ■ :

SI $0 < \alpha \leq 1$ alors $t \mapsto \frac{\sin t}{t^\alpha}$ admet une intégrale semi-convergente sur $[\pi, +\infty[$.

12. Théorèmes de convergence (■ juste les énoncés qui doivent être parfaitement sus) :

Théorème de convergence DOMINÉE pour les suites de fonctions.

Théorème de convergence DOMINÉE pour les séries de fonctions : Théorème d'intégration terme à terme de Lebesgue.

Prévisions : Fonctions intégrables : suite et fin - Suites et séries de fonctions