Concours Commun INP 2025

Épreuve de mathématiques I, MP, quatre heures

(corrigé (d'après le corrigé de B.Winckler))

EXERCICE I

Q 1. On note que $]-1,1[$ est un intervalle, donc une partie connexe par arcs de $\mathbb{R}$. Comme une application continue préserve la connexité par arcs, et que f' est continue en tant que dérivée d'une fonction de classe C^1.

Conclusion : $\boxed{f'(]-1,1[) \text{ est une partie connexe par arcs de } \mathbb{R}^2}$.

Q 2. **a)** Démontrons la dérivabilité en 0 composante par composante. Soit t strictement positif au voisinage de 0. On a :

$$\frac{t^2\sin\left(\frac{1}{t}\right)-0}{t-0} = t\sin\left(\frac{1}{t}\right) = \underset{t\to 0}{O}(t) = \underset{t\to 0}{o}(1),$$

donc : $\lim\limits_{t\to 0^+} \frac{t^2\sin\left(\frac{1}{t}\right)-0}{t-0} = 0$. On trouve de même : $\lim\limits_{t\to 0^+} \frac{t^2\cos\left(\frac{1}{t}\right)-0}{t-0} = 0$. La limite à gauche étant trivialement nulle aussi, on a démontré :

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(f(t)-f(0)) = (0,0),$$

donc f est dérivable en 0 et : $\boxed{f'(0) = (0,0)}$.

La dérivabilité de f sur $]-1,1[\setminus\{0\}$ ne pose pas de problème grâce aux théorèmes généraux sur les fonctions dérivables. En effet, $t \mapsto \frac{1}{t}$ est dérivable sur $]0,1[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, et le cosinus et le sinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$: par composition, $t \mapsto \sin\left(\frac{1}{t}\right)$ et $t \mapsto \cos\left(\frac{1}{t}\right)$, or $t \mapsto t^2$ l'est aussi. Par produit, chaque composante de f est dérivable sur $]0,1[$ donc f l'est aussi. Le raisonnement est plus direct sur $]-1,0[$ puisque la restriction de f y est identiquement nulle.

On a en outre, pour tout $t \in]0,1[$:

$$\boxed{f'(t) = \left(2t\sin\left(\frac{1}{t}\right) - \cos\left(\frac{1}{t}\right),\ 2t\cos\left(\frac{1}{t}\right) + \sin\left(\frac{1}{t}\right)\right).}$$

Pour $t \in]-1,0[$, la dérivée est bien sûr nulle.

Conclusion : $\boxed{f \text{ est dérivable sur }]-1,1[}$.

b) Soit $t \in]0,1[$. On a , en développant :

$$\begin{aligned}
\|f'(t)\|_2^2 &= \left(2t\sin\left(\frac{1}{t}\right) - \cos\left(\frac{1}{t}\right)\right)^2 + \left(2t\cos\left(\frac{1}{t}\right) + \sin\left(\frac{1}{t}\right)\right)^2 \\
&= \cos\left(\frac{1}{t}\right)^2 + \sin\left(\frac{1}{t}\right)^2 + (2t)^2\left(\cos\left(\frac{1}{t}\right)^2 + \sin\left(\frac{1}{t}\right)^2\right) \\
&= 1 + (2t)^2 \\
&\geqslant 1,
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\|f'(t)\|_2 \geqslant 1}$.

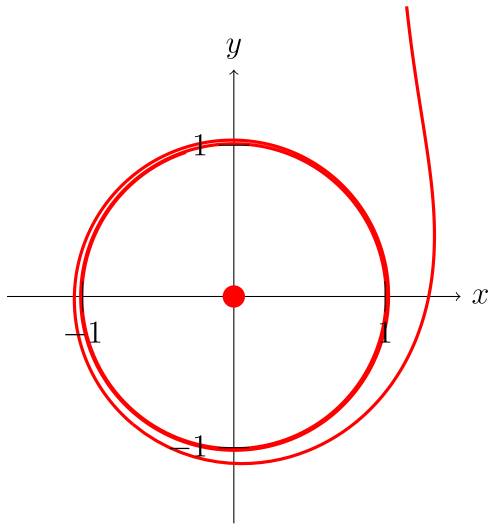
On a donc : $f'(]0,1[) \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus B_F(0,1)$ (pour la norme $\|\cdot\|$).

Déduisons-en que $f'(]-1,1[)$ n'est pas connexe par arcs en raisonnant par l'absurde : supposons l'existence d'un chemin continu $\gamma : [0,1] \to f'(]-1,1[)$ liant $f'(0) = (0,0)$ et

$f'\left(\frac{1}{2}\right)$. Par continuité de $\|\gamma\|_2 : [0,1] \to \mathbb{R}$ – en effet toute norme est continue car lipschitzienne par l'inégalité triangulaire renversée – et le théorème des valeurs intermédiaires (avec $\|\gamma(0)\|_2 = \|(0,0)\|_2 = 0$ et $\|\gamma(1)\|_2 = \left\|f'\left(\frac{1}{2}\right)\right\|_2 \geqslant 1$), il existe $t_0 \in [0,1]$ tel que : $\|\gamma(t_0)\|_2 = \frac{1}{2}$ (le réel $\frac{1}{2}$ n'a pas d'importance : ce peut être tout élément de $]0,1[$). Or $\|\gamma(t_0)\|_2$ appartient à $\|f'\|_2(]-1,1[)$, qui lui-même est inclus dans $\{0\} \cup [1,+\infty[$ d'après l'étude qui précède : il ne peut donc pas être égal à $\frac{1}{2}$: contradiction.

Par l'absurde, $f'(]-1,1[)$ n'est pas connexe par arcs.

Remarque. Le sujet autorisait à prendre un dessin en appui. Représentons donc $\{(0,0)\} = f'(]-1,0[)$ et $f'(]0,1[)$:



Il est manifeste que $\{(0,0)\} = f'(]-1,0])$ et $f'(]0,1[)$ forment deux composantes connexes distinctes : on ne peut pas passer continûment d'un vecteur « presque unitaire » au vecteur nul sans passer par toutes les normes intermédiaires. C'est ce que nous avons formalisé ci-dessus.

EXERCICE II : (cet exercice n'est pas celui de ccinp 2025)

Q 3. a) Voir le cours.

b) Posons $f_n(x) = \dfrac{dx}{x^n + e^x}$ et $I = [0,+\infty[$.

On a

i) $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & \text{si } x > 1 \\ \dfrac{1}{1+e} & \text{si } x = 1 \\ \dfrac{1}{e^x} = e^{-x} & \text{si } x \in [0,1[\end{cases}$

Posons donc $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 1 \\ \dfrac{1}{1+e} & \text{si } x = 1 \\ \dfrac{1}{e^x} = e^{-x} & \text{si } x \in [0,1[\end{cases}$

On a donc (f_n) qui converge simplement vers g sur I.

ii) f_n et g sont continues sur I par théorèmes généraux.

iii) HD :

$\forall x \in I$, $\forall n \in \mathbb{N} : |f_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{e^x} = e^{-x} = \varphi(x)$

φ est continue et intégrable sur I (intégrale de référence).
On a donc la **HD**.
Le théorème permet donc de dire
i) que f_n existe pour tout entier n (dit autrement : f_n est intégrable sur I) et
ii) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^n+e^x}=\int_0^1 e^{-x}dx=\Big[-e^{-x}\Big]_0^1=1-\frac{1}{e}$.
Conclusion : $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty}u_n=1-\frac{1}{e}}$.

Q 4. a) Voir le cours.
b) Pour tout $t>0$:
$$\frac{t}{e^t-1}=\frac{t}{e^t}\frac{1}{1-e^{-t}}=te^{-t}\sum_{n=0}^{+\infty}e^{-nt}=\sum_{n=0}^{+\infty}te^{-(n+1)t}=\sum_{n=1}^{+\infty}te^{-nt}\text{ (CDV } n=n+1).$$
Conclusion : $\boxed{\text{Pour tout } t>0 : \dfrac{t}{e^t-1}=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}te^{-nt}}$.
c) Posons $u_n(t)=te^{-nt}$ et $I=]0,+\infty[$.
On a
i) d'après le b) $(\sum u_n)$ qui converge simplement sur I vers la fonction $F:t\longmapsto\dfrac{t}{e^t-1}$.
ii) u_n et F sont continues sur I par théorèmes généraux.
iii) HD :
Montrons d'abord que $\forall n\geqslant 1$, u_n est intégrable sur I :
• u_n est continue sur I (c'est le **ii)**).
• En 0 : la fonction u_n se prolonge par continuité en 0 par $u_n(0)=0$, donc par T.C. , u_n est intégrable sur $]0,\frac{1}{2}]$.
• En $+\infty$:
Comme $t^2\cdot u_n(t)=t^3e^{-nt}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$ par croissances comparées ($n\geqslant 1$), donc $u_n(t)=\underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.
Comme la fonction $t\longmapsto\dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, par T.C. , u_n est intégrable sur $[1,+\infty[$.
Conséquence : u_n est intégrable sur $]0,+\infty[$.
Montrons que $\left(\sum\displaystyle\int_0^{+\infty}|te^{-nt}|\,\mathrm{d}t\right)_n$ converge.
$$\int_0^{+\infty}|te^{-nt}|\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}te^{-nt}\,\mathrm{d}t=\left[t\frac{e^{-nt}}{-n}\right]_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}1\cdot\frac{e^{-nt}}{-n}\,\mathrm{d}t \text{ avec l'I.P.P. } \left\{\begin{array}{l}u=t\\ v'=e^{-nt}\end{array}\right. .$$
On a $\left[t\dfrac{e^{-nt}}{-n}\right]_0^{+\infty}=0-0=0$ par C.C.
On en déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty}|te^{-nt}|\,\mathrm{d}t=-\left[\frac{e^{-nt}}{n^2}\right]_0^{+\infty}=0+\frac{1}{n^2}=\frac{1}{n^2}$.
Comme la série $(\sum\dfrac{1}{n^2})$ est convergente, on peut appliquer le théorème de Lebesgue :
Conclusion :
$$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{tdt}{e^t-1}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\quad(\text{et donc }\frac{\pi^2}{6}).}$$

PROBLÈME
Autour du théorème de comparaison avec une intégrale

Partie I – Théorème de comparaison avec une intégrale

Q 5. Comme f est positive, on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_{n+1} - S_n = f(n+1) \geqslant 0$, et : $J_{n+1} - J_n = \displaystyle\int_n^{n+1} f \geqslant 0$ (on utilise là la relation de Chasles et la croissance de l'intégrale). On en déduit que :

$$\boxed{\text{les suites } (S_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (J_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ sont croissantes}}.$$

Ensuite, par décroissance de f sur $[k-1, k]$, on a pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:

$$f(k) = \int_{k-1}^{k} f(k)\mathrm{d}t \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_{k-1}^{k} f(k-1)\mathrm{d}t = f(k-1),$$

d'où le résultat : $f(k) \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} f(t)\mathrm{d}t \leqslant f(k-1)$. L'hypothèse de continuité intervient pour assurer la convergence de toutes ces intégrales sur des segments.

Q 6. Soit $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. On somme de $k = 1$ à $k = n$ l'encadrement de la question précédente et on utilise la relation de Chasles. On obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \leqslant \int_0^n f(t)\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k-1) = \sum_{k=0}^{n-1} f(k),$$

d'où le résultat : $\boxed{S_n - f(0) \leqslant J_n \leqslant S_{n-1}}$.

Q 7. Notons que f est bien continue, positive et décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

(1) Supposons f intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Par positivité, on a pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:

$$S_n \overset{(\mathbf{Q\,6})}{\leqslant} J_n + f(0) \leqslant \int_0^{+\infty} f + f(0) < +\infty.$$

Ainsi la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (**Q 5**) et majorée : elle converge, c'est-à-dire la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f(n)$ converge.

Réciproquement, si la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f(n)$ converge, alors par positivité de f (qui autorise les calculs dans $[0, +\infty]$) on a :

$$\int_{\mathbb{R}_+} |f| = \int_{\mathbb{R}_+} f = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n f = \lim_{n\to+\infty} J_n.$$

Par la question précédente et convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f(n)$, on a les inégalités suivantes en passant à la limite : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} J_n \leqslant \lim_{n\to+\infty} S_{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} f(k) < +\infty$, donc : $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} |f| < +\infty$, ce qui démontre l'intégrabilité de f sur $\mathbb{R}_+$. Ceci achève de démontrer que

$$\boxed{f \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}_+ \text{ si et seulement si la série } \sum_{n\geqslant 0} f(n) \text{ converge}}.$$

(2) Démontrons que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(\int_{n-1}^{n} f(t)\mathrm{d}t - f(n)\right)$ converge.

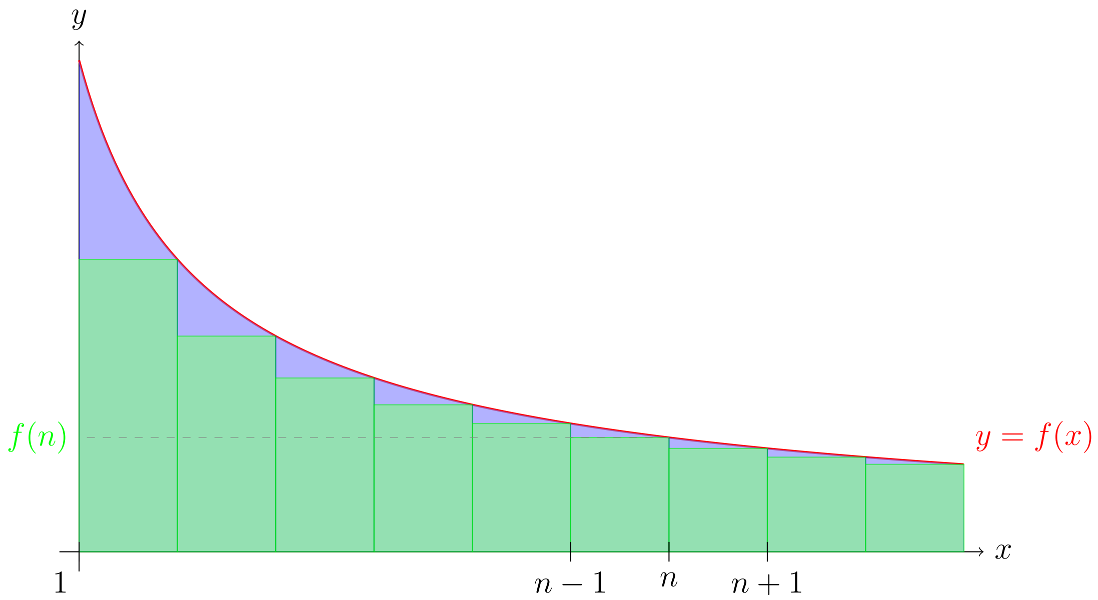
Par la question **Q 5**, le terme général w_n de cette série est positif et pour tout $N \geqslant 1$:

$$\sum_{n=1}^{N} w_n = \sum_{n=1}^{N} \left(\int_{n-1}^{n} f(t)\mathrm{d}t - f(n) \right) \leqslant \sum_{n=1}^{N} (f(n-1) - f(n)) = f(0) - f(N) < f(0),$$

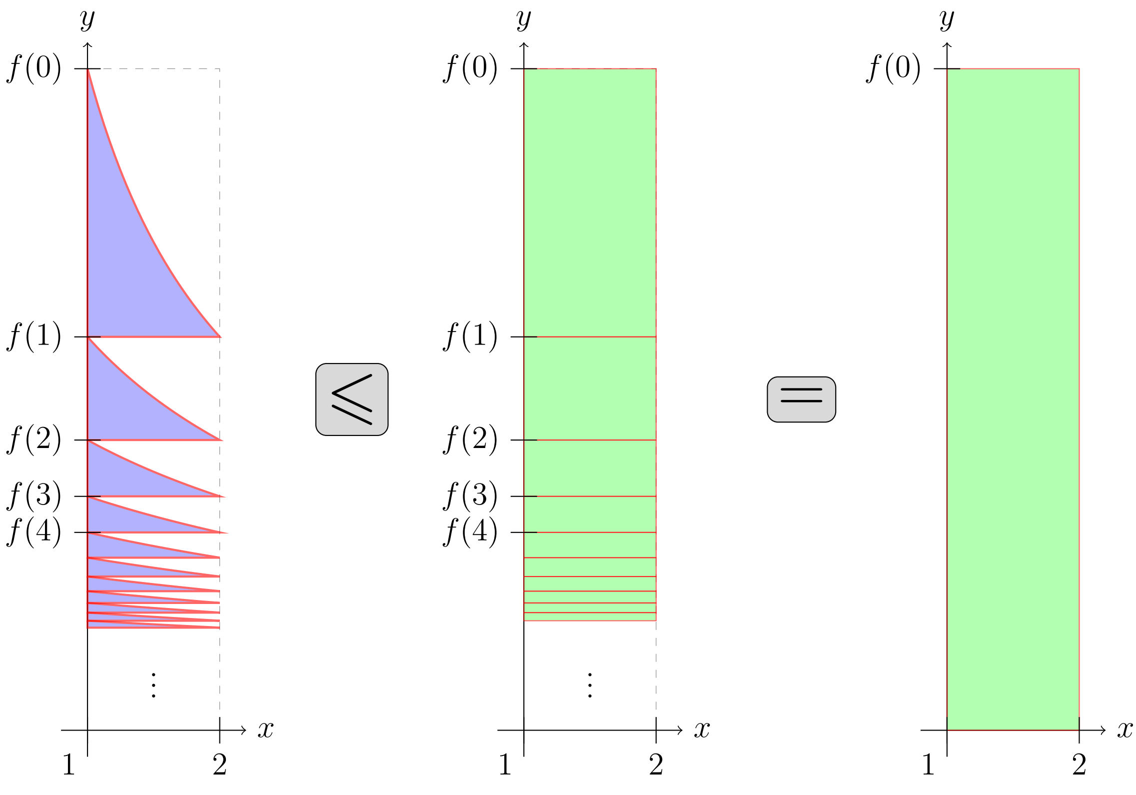
Les sommes partielles de $(\sum w_n)$ sont donc majorées.

Conclusion : $\boxed{\text{La série à termes positifs } \sum_{n\geqslant 1} \left(\int_{n-1}^{n} f(t)\mathrm{d}t - f(n) \right) \text{ converge}}$.

Remarque. La convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} \left(\int_{n-1}^{n} f(t)\mathrm{d}t - f(n) \right)$ est visuelle, et cette visualisation motive d'ailleurs les majorations ci-dessus. En effet, cette série représente la somme des aires bleues ci-dessous :



Si l'on « empile » ces aires, on voit immédiatement un majorant convenable :



Ainsi la somme des aires bleues définit une suite croissante majorée : elle converge. Le rectangle vert servant de majorant est la somme télescopique de la résolution.

Q 8. **a)** Comme $\alpha > 0$, la fonction f est décroissante en tant que produit des fonctions décroissantes et positives $x \longmapsto \frac{1}{x}$ et $x \longmapsto \frac{1}{(\ln(x))^\alpha}$. Elle est aussi continue et positive sur $[2, +\infty[$. On a en outre, pour tout $x \geqslant 2$:

$$\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)} = [\ln(|\ln(t)|)]_2^x = \ln(\ln(x)) - \ln(\ln(2)),$$

tandis que, si $\alpha \neq 1$:

$$\forall x \geqslant 2, \quad \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln(t))^\alpha} = \left[-\frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{(\ln(t))^{\alpha-1}}\right]_2^x = \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{(\ln(2))^{\alpha-1}} - \frac{1}{(\ln(x))^{\alpha-1}}\right).$$

On en déduit :

$$\lim_{x\to+\infty}\int_2^x f = \begin{cases} \frac{1}{(\alpha-1)(\ln(2))^{\alpha-1}} < +\infty & \text{si} \quad \alpha > 1, \\ +\infty & \text{si} \quad \alpha \leqslant 1. \end{cases}$$

Comme f est positive, cela démontre qu'elle est intégrable sur $[2, +\infty[$ si et seulement si : $\alpha > 1$.

Par la question précédente, dont toutes les hypothèses sont vérifiées (pour se ramener à $\mathbb{R}_+$, il suffit de prolonger f en posant $f(x) = f(2)$, pour $x \in [0, 2]$: la fonction ainsi prolongée est toujours continue, positive et décroissante sur $\mathbb{R}_+$ ou bien de considérer la fonction translatée $x \mapsto f(x+2)$, ce qui ne change rien à la nature des intégrales et séries en jeu),

Conclusion : $\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n(\ln(n))^\alpha} \text{ converge si et seulement si : } \alpha > 1}$.

b) Si $\alpha = 2$, alors la question **Q 6** (où l'on considère encore la fonction prolongée sur $\mathbb{R}_+$) donne :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}, \quad \int_2^{n+1}\frac{1}{x(\ln(x))^2}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(\ln(k))^2} \leqslant \int_2^n \frac{1}{x(\ln(x))^2}\mathrm{d}x + \frac{1}{2(\ln(2))^2},$$

et donc, quand $n \to +\infty$, par le calcul de la question précédente :

$$\boxed{\frac{1}{\ln(2)} \leqslant \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k(\ln(k))^2} \leqslant \frac{1}{\ln(2)} + \frac{1}{2(\ln(2))^2}.}$$

Q 9. **a)** Pour tout $n \geqslant 2$ on a :

$$T_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \int_1^n \frac{1}{x}\mathrm{d}x = 1 - \sum_{k=2}^n\left(\int_{k-1}^k \frac{1}{x} - \frac{1}{k}\right).$$

En appliquant la question **Q 7** à la fonction continue, positive et décroissante $x \longmapsto \frac{1}{x}$ (ou plutôt à sa translatée $x \mapsto \frac{1}{x+1}$ qui vérifie les mêmes hypothèses sur $\mathbb{R}_+$), la série $\sum_{k\geqslant 2}\left(\int_{k-1}^k \frac{1}{x} - \frac{1}{k}\right)$ converge, ce qui démontre $\boxed{\text{la convergence de la suite } (T_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}}$.

b) Par la question précédente : $T_n = \gamma + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$, donc par définition de T_n :

$$\boxed{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \underset{n\to+\infty}{o}(1).}$$

Comme le logarithme tend vers l'infini, on en déduit :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln(n)+\underset{n\to+\infty}{o}(\ln(n))\underset{n\to+\infty}{\sim}\ln(n).}$$

Q 10. **a)** Soit $x\in]0,+\infty[$, $g_n(x)\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{x}{n^2}\geqslant 0$.

Comme la série $(\sum\dfrac{1}{n^2})$ converge, par T.C. la série $(\sum g_n(x))$ converge.

<u>Conclusion</u> : $\boxed{\text{la série } (\sum g_n) \text{ converge simplement sur }]0,+\infty[}$

b) Notons d'abord que f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$ par TG, puisque le dénominateur est continu et ne s'annule pas sur cet intervalle.

La fonction $t\longmapsto t^2$ étant positive et croissante sur $\mathbb{R}_+$, les opérations élémentaires sur les inégalités impliquent que f est décroissante et positive sur $\mathbb{R}_+$. On peut donc lui appliquer la question **Q 5**, d'où le résultat en sommant l'inégalité $f(k)\leqslant\displaystyle\int_{k-1}^{k}f(t)\mathrm{d}t$ de $k=0$ à $k=n$, puis en sommant l'inégalité $\displaystyle\int_{k-1}^{k}f(t)\mathrm{d}t\leqslant f(k-1)$ de $k=1$ à $k=n+1$:

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad \int_1^{n+1}f(t)\mathrm{d}t\leqslant\sum_{k=1}^{n}f(k)\leqslant\int_0^n f(t)\mathrm{d}t.}$$

c) Soit $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$. On a :

$$\int_0^n f(t)\mathrm{d}t=\int_0^n\frac{1}{x}\frac{1}{\left(\frac{t}{x}\right)^2+1}\mathrm{d}t=\left[\arctan\left(\frac{t}{x}\right)\right]_0^n=\arctan\left(\frac{n}{x}\right)$$

et de même :

$$\int_1^{n+1}f(t)\mathrm{d}t=\arctan\left(\frac{n+1}{x}\right)-\arctan\left(\frac{1}{x}\right).$$

Comme x est strictement positif, on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{x}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{x}=+\infty$, donc par composition de limites :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^n f(t)\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2},\quad\text{et :}\quad\lim_{n\to+\infty}\int_1^{n+1}f(t)\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}-\arctan\left(\frac{1}{x}\right).$$

On passe à la limite dans l'encadrement de la question précédente. Notons que la limite quand $n\to+\infty$ de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}f(k)$ existe bien (dans $[0,+\infty]$ *a priori*) puisque nous sommons des termes positifs. Comme $f(k)=g_k(x)$ pour tout $k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, on en déduit :

$$\boxed{\frac{\pi}{2}-\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\leqslant\sum_{n=1}^{+\infty}g_n(x)\leqslant\frac{\pi}{2},}$$

d'où le résultat, pour tout $x>0$. Ceci démontre en passant la convergence simple de la série de fonctions positives $\displaystyle\sum_{n\geqslant1}g_n$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

d) Par la question précédente et le théorème d'encadrement : $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}g_n(x)=\frac{\pi}{2}}$.

Partie II – Contre-exemples

Q 11. **a)** Soit $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. Notons que le sinus est positif sur $[0,\pi]$ et négatif sur $[\pi,2\pi]$. Par périodicité de péridoe 1, $x \longmapsto \sin(2\pi x)$ est positive sur $\left[n, n+\frac{1}{2}\right]$ et négative sur $\left[n+\frac{1}{2}, n+1\right]$. On a alors, par la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\int_n^{n+1} f &= \int_n^{n+\frac{1}{2}} f + \int_{n+\frac{1}{2}}^{n+1} f\\ &= \int_n^{n+\frac{1}{2}} \sin(2\pi x)\mathrm{d}x - \int_{n+\frac{1}{2}}^{n+1} \sin(2\pi x)\mathrm{d}x\\ &= \left[-\frac{\cos(2\pi x)}{2\pi}\right]_n^{n+\frac{1}{2}} - \left[-\frac{\cos(2\pi x)}{2\pi}\right]_{n+\frac{1}{2}}^{n+1}\\ &= -\frac{\cos(2\pi n+\pi)}{2\pi} + \frac{\cos(2\pi n)}{2\pi} - \left(-\frac{\cos(2\pi(n+1))}{2\pi} + \frac{\cos(2\pi n+\pi)}{2\pi}\right)\\ &= -\frac{-1}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} - \left(-\frac{1}{2\pi} + \frac{-1}{2\pi}\right)\\ &= \frac{2}{\pi}.\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\int_n^{n+1} f(t)dt = \frac{2}{\pi}}$

b) Soit $x \in [1,+\infty[$. Par positivité de l'intégrande, on a :

$$\int_1^x |\sin(2\pi t)|\mathrm{d}t \geqslant \int_1^{\lfloor x\rfloor} |\sin(2\pi t)|\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\lfloor x\rfloor-1} \int_n^{n+1} |\sin(2\pi t)|\mathrm{d}t \overset{\textbf{(a)}}{=} \sum_{n=1}^{\lfloor x\rfloor-1} \frac{2}{\pi} = \frac{2}{\pi}\left(\lfloor x\rfloor - 1\right),$$

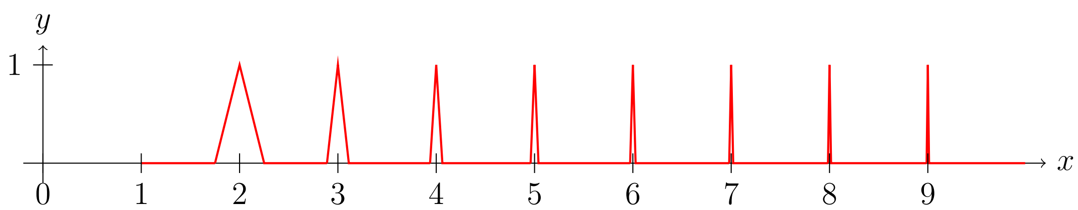
ce qui donne la minoration attendue. Comme le minorant tend vers l'infini, on en déduit :

$$\lim_{x\to+\infty} \int_1^x f(t)\mathrm{d}t = +\infty,$$

donc $\boxed{f \text{ n'est pas intégrable sur } [1,+\infty[}$.
Or le sinus est nul en tous les multiples entiers de π, donc
$\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 1} f(n) = \sum_{n\geqslant 1} 0 \text{ est trivialement convergente}}$.

Elle n'est pas de même nature que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f$. C'est bien sûr lanon monotonie de f qui ne permet pas d'appliquer la question **Q 7**.

Q 12. Il suffit de prendre $a_n = \dfrac{1}{n^2}$. La longueur de $[n-a_n, n+a_n]$ est alors égale à $\frac{2}{n^2}$, or l'aire du triangle de base $[n-a_n, n+a_n]$ et de hauteur 1 est égale à la longueur de la base fois la hauteur divisée par 2 : son aire est bien égale à $\dfrac{1}{n^2}$.
Voici le graphe de la fonction décrite par l'énoncé. Du moins, nous ne respectons la description que pour $n \geqslant 2$, car les intervalles $[1-a_1, 1+a_1]$ et $[2-a_2, 2+a_2]$ ne sont pas disjoints (on a $1+a_1 = 2$) : nous posons la fonction comme étant nulle sur $[1, 2-a_2]$. Ceci étant dit :



Cette fonction est continue et positive. On a dans $[0, +\infty]$:

$$\int_1^{+\infty} f = \sum_{n=2}^{+\infty} \int_{n-a_n}^{n+a_n} f = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty,$$

puisqu'on reconnaît une série de Riemann d'exposant strictement supérieur à 1. Pourtant, toujours dans $[0, +\infty]$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f(n) = \sum_{n=2}^{+\infty} 1 = +\infty,$$

donc la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f(n)$ et l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f$ n'ont pas la même nature. C'est bien sûr la monotonie de f qui est encore mise en défaut.

D'après Centrale PSI 2016

1.A.1) Il y a n^2 coefficients dans une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

comme les coefficients ne peuvent prendre que 2 valeurs,

d'où $\boxed{\mathcal{X}_n \text{ fini et } |\mathcal{X}_n| = 2^{n^2}}$

1.A.2) Récurrence sur n :

$n=2 \quad \det(M) = ad - bc \leq ad + bc \leq 2 = 2!$

si c'est vraie pour $n \geq 2$, soit $M = (a_{i,j}) \in \mathcal{Y}_{n+1}$

$\det M = \sum_{i=1}^{n+1} a_{i,1} (-1)^{i+1} \Delta_{i,1}$ dév. 1ère colonne

d'où $|\det M| \leq \sum_{i=1}^{n+1} 1 \times \underbrace{n!}_{\text{hyp. de réc.}} = (n+1) \cdot n! = (n+1)!$

d'où : $\boxed{\forall M \in \mathcal{Y}_n \quad \det M \leq n!}$

Non égalité : Pour $n=2 \quad ad - bc \leq 1 < 2!$

si c'est vraie pour $n \geq 2$, soit $M \in \mathcal{Y}_{n+1}$

$\det M \leq \sum_{i=1}^{n+1} \Delta_{i,1} < \sum_{i=1}^{n+1} n! = (n+1)!$

d' $\boxed{\text{L'inégalité est toujours stricte}}$

1.A.3) : Voir le cours et le ct-ex : $B_F(0,1)$ dans ②

$\mathbb{R}[X]$ avec $N_\infty(P) = \max_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$, $P = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n X^n$ (PTN)

1.A.4) * Soit $(M,N) \in Y_n^2$ et $t \in [0,1]$

$M = (a_{ij})$ et $N = (b_{ij})$ $\quad (1-t)M + tN = ((1-t)a_{ij} + tb_{ij})$

et $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $(1-t)a_{ij} + tb_{ij} \in [0,1]$

cqs $\underline{Y_n \text{ est convexe}}$

* Montrons que Y_n est fermé et borné :

→ $\underline{Y_n \subset B_F(0,1)}$ pour $\|\ \|_\infty$ $\left(\|M\|_\infty = \max_{i,j} |a_{ij}|\right)$

→ Soit $p_{\alpha,\beta} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad (\alpha,\beta) \in [\![1,n]\!]^2$

$M = (a_{ij}) \longmapsto a_{\alpha,\beta}$

$p_{\alpha,\beta}$ est linéaire donc continue et

$Y_n = \bigcap_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} p_{i,j}^{-1}([0,1])$ intersection d'image

réciproque de fermé $([0,1])$ par $p_{i,j}$ $C^0/\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

donc $\underline{\text{fermé}}$ $\quad$ d'où $\boxed{Y_n \text{ convexe et compact}}$

1. A.5) Montrons que $\mathring{Y}_n = \{M=(a_{i,j}) \backslash \forall i,j : 0 < a_{i,j} < 1\}$ ③

Posons $U = \{M=(a_{i,j}) \backslash \forall i,j : 0 < a_{i,j} < 1\}$

Avec les notations du I A.4, $U = \bigcap_{i,j} p_{i,j}^{-1}(]0,1[)$:

ouvert comme intersection finie d'ouverts.

donc $\mathring{U} = U \subset \underline{\mathring{Y}_n}$

Réciproquement, soit $M \in \mathring{Y}_n$, $\exists r>0 \backslash B_F(M,r) \subset Y_n$ pour la norme $\|\|_\infty$ (définie au 4)).

Or $B_F(M,r) = \{N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \backslash \forall i,j \ |n_{i,j} - a_{i,j}| \leq r\}$

donc $\forall i,j \ [a_{i,j} - r, a_{i,j} + r] \subset [0,1]$ (car $N \in \overline{Y}_n, \dots$)

d'où $0 < a_{i,j} < 1$ et $M \in U$

d'où $\boxed{\mathring{Y}_n = \{M=(a_{i,j}) \backslash \forall i,j : 0 < a_{i,j} < 1\} \text{ et } Fr(Y_n) = \overline{Y}_n - \mathring{Y}_n = Y_n - U = \{M=(a_{i,j}) \backslash \forall i,j \ 0 \leq a_{ij} \leq 1, \ \exists i_0,j_0 \backslash a_{i_0,j_0} = 0 \text{ ou } 1\}}$

1.A.5) Soit $X = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \backslash X \neq (0)$ et $MX = \lambda X$

si $M = (a_{ij})$ et $|z_k| = \max(|z_1|, \dots, |z_n|) > 0$

car $X \neq (0)$

La k-ième ligne du système $MX = \lambda X$ donne :

$$a_{k,1} z_1 + \dots + a_{k,n} z_n = \lambda z_k$$

d'où $|a_{k,1} z_1 + \dots + a_{k,n} z_n| \leq (1 + \dots + 1)|z_k|$

donc $|\lambda z_k| \leq n|z_k|$ et comme $|z_k| > 0$:

d' $\boxed{|\lambda| \leq n}$

si $M = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$, $M \in Y_n$ et $M \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

d $\boxed{n \text{ est val. propre de } M \in Y_n}$

1.3.1) Soit $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in X'_2$

si $a = 0$ alors $\det M = -bc \Rightarrow b = c = 1$ et d qq

donc $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ou $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

si $a = 1$ alors $\det M = d - bc = 0$ ssi $d = bc$ ssi $\begin{cases} d = 1 \text{ et } b = c = 1 \\ d = 0 \text{ et } (b = 0 \text{ ou } c = 0) \end{cases}$

donc $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ou $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ou $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

ou $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Posons $\boxed{M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ M_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } M_6 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$

$\underline{M_1, M_2, M_5 \text{ et } M_6}$ sont $\underline{\text{diagonalisables}}$ car $\underline{\text{symétriques et réelles}}$

$\chi_{M_3}(x) = (x-1)^2$, donc si M_3 était diagonalisable, $\pi_{M_3} = x-1$

d'où $M_3 = I_2$: absurde donc $\underline{M_3 \text{ et } M_4 = {}^tM_3 \text{ non diagonalisables}}$

1.3.2) $M_2 - M_1 = \underline{E_{2,2}}$, $M_6 - M_1 = \underline{E_{1,1}}$

Posons $F = \text{vect}(X'_2) = \text{vect}(M_1, \dots, M_6)$

$\underline{E_{1,1} \in F}$, $\underline{E_{2,2} \in F}$

$M_3 - E_{1,1} - E_{2,2} = \underline{E_{1,2}} \in F$ et $M_4 - E_{1,1} - E_{2,2} = \underline{E_{2,1}} \in F$

Comme $(E_{i,j})_{i,j}$ engendre $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, d'où : $\boxed{\text{vect}(X'_2) = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$

Pour $n \geq 3$, on raisonne avec les blocs, si $F = \text{vect}(X'_n)$

$$\forall i \in [\![1, n-1]\!] \quad E_{i,i} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & \boxed{\begin{matrix} 1 & \\ & 0 \end{matrix}} & \\ 0 & & & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}} & \\ 0 & & & 1 \ \ddots \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}} & \\ 0 & & & 1 \ \ddots \end{pmatrix} \in F$$

$$E_{n,n} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & 0 & \\ 0 & & & \begin{array}{|cc} 0 & \\ & 1 \end{array} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & 1 & \\ 0 & & & \begin{array}{|cc} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{array} \end{pmatrix}}_{(M_2)} - \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & 1 & \\ 0 & & & \begin{array}{|cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \end{pmatrix}}_{(M_1)} \in F$$

si $i \neq j$
$$E_{i,j} = \begin{array}{c} \\ i \rightarrow \end{array} \begin{pmatrix} 0 & & & & 0 \\ & 0 & \cdots & 0 & \\ & \vdots & \ddots & 0 & \\ 0 & 1 & \cdots & & \\ & & & & 0 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \\ i \rightarrow \end{array} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ & \vdots & \ddots & & \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \in F$$
$$\uparrow j \qquad\qquad \uparrow j$$

d'où $\boxed{\mathrm{vect}(X'_n) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \ \forall n \geqslant 2}$

2.A.1) $\underline{(M|N) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha=1}^{n} a_{i,\alpha}\, b_{i,\alpha} = \sum_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2} a_{i,j}\, b_{i,j}}$ $\quad M = (a_{i,j})$

$N = (b_{i,j})$

et $\underline{(M|M) = \sum_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2} a_{i,j}^2}$

On a donc $(M|N) = (N|M)$ $\quad$ linéarité de Trace et transposée

$(\lambda M + M'|N) = \lambda(M|N) + (M'|N)$

$(M|M) \geqslant 0$

$(M|M) = 0 \Rightarrow \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \ a_{i,j} = 0 \Rightarrow M = (0)$

d'où $\boxed{(\cdot|\cdot) \text{ est un P.S. sur } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$

2.A.2) Posons $f : Y_n \longrightarrow \mathbb{R}$

$$N \longmapsto \|A-N\| \quad (= d(A,N))$$

f est continue sur Y_n par TG et Y_n est compact

donc par <u>théorème des bornes atteintes</u>, $\exists M \in Y_n \mid$

$$\min f(Y_n) = f(M)$$

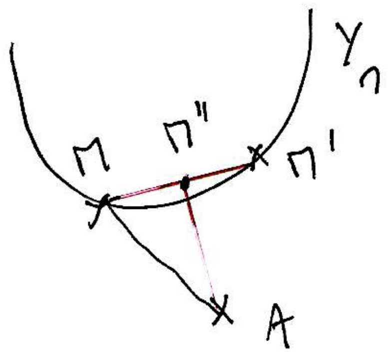
d'où $\boxed{\exists M \in Y_n \mid \forall N \in Y_n \quad \|A-M\| \leq \|A-N\|}$

2.A.3) $\forall N \in Y_n$, $\|A-M\| \leq \|A-N\|$ et $\|A-M'\| \leq \|A-N\|$

pour $N = M'$ et pour $N = M$

on obtient $\boxed{\|A-M\| = \|A-M'\|}$

2.A.4)



Posons $M'' = \dfrac{M+M'}{2} \in Y_n$ car Y_n convexe

montrons que $\|\overrightarrow{AM'}\|^2 = \|\overrightarrow{AM''}\|^2 + \|\overrightarrow{M''M'}\|^2$

Pour cela montrons que $\overrightarrow{AM''} \perp \overrightarrow{M''M'}$

Si on pose $\vec{u} = \overrightarrow{AM} = M - A$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AM'} = M' - A$

$\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$ c'est le 2.A.3) d'où $(\vec{u} + \vec{v} \mid \vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = 0$

Ensuite $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AM'} \underset{\text{chasles}}{=} 2\overrightarrow{AM''} + \underbrace{\overrightarrow{M''M} + \overrightarrow{M''M'}}_{= 0 \text{ (barycentre)}}$

$$\vec{u} - \vec{v} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AM'} = \overrightarrow{M'M} = 2\overrightarrow{M'M''}$$

cqs $\overrightarrow{AM''} \perp \overrightarrow{M''M'}$

On en déduit $\|\overrightarrow{AM'}\|^2 = \|\overrightarrow{AM''} + \overrightarrow{M''M'}\|^2$

$$= \|\overrightarrow{AM''}\|^2 + \|\overrightarrow{M''M'}\|^2 + 2\underbrace{(\overrightarrow{AM''} \mid \overrightarrow{M''M'})}_{=0}$$

d'où si $M \neq M'$, $M'' \neq M'$ et $\|\overrightarrow{AM''}\|^2 = \|\overrightarrow{AM'}\|^2 - \|\overrightarrow{M'M''}\|^2 < \|\overrightarrow{AM'}\|^2$

donc $\|\overrightarrow{AM''}\| = \|M'' - A\| < \|M - A\| = \inf \{$ (2A2)

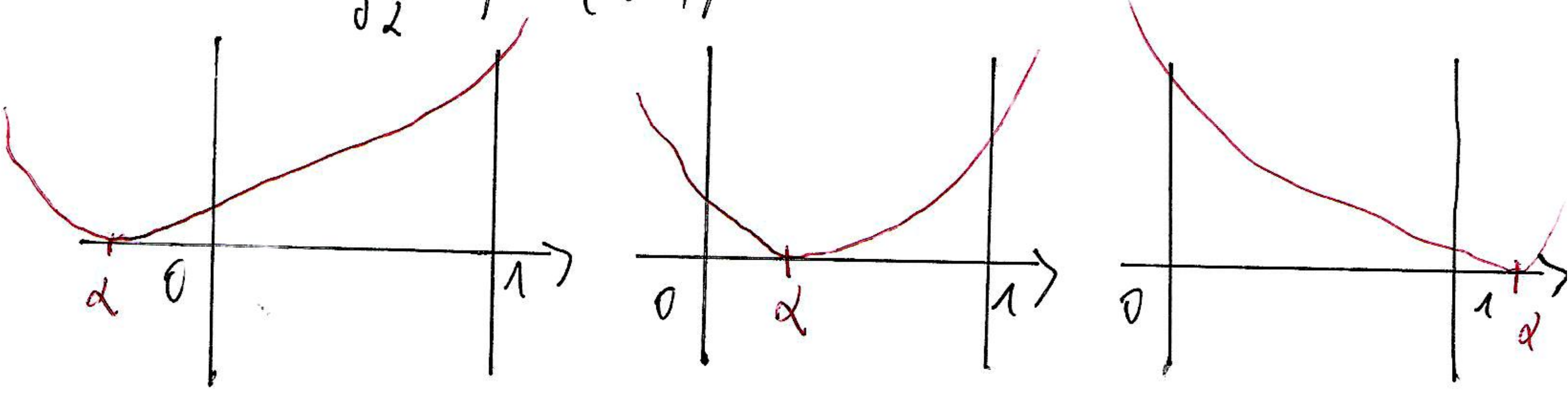
$M'' \in Y_n$ absurde

cl $\boxed{\text{il y a unicité de } M.}$

2.A.5) $\forall N = (x_{ij}) \in Y_n$ $\|A - N\|^2 = \sum_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2} (a_{ij} - x_{ij})^2$

il y a 3 cas pour a_{ij} :

Considérons $g_\alpha(x) = (\alpha - x)^2$



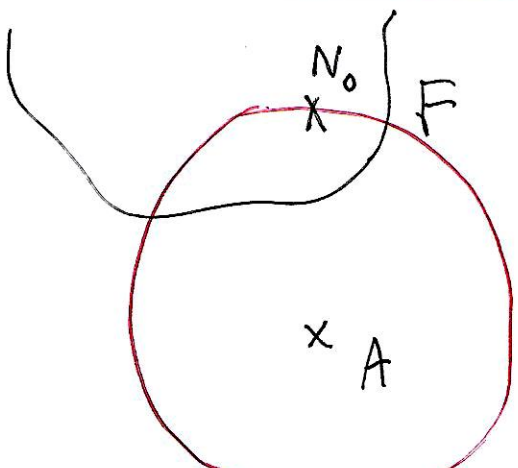
$\alpha < 0$ $\qquad$ $0 \leq \alpha \leq 1$ $\qquad$ $\alpha > 1$

cqs $\min\limits_{x\in[0,1]} g_\alpha(x) = \begin{cases} g_\alpha(0) & \text{atteint en } 0 \text{ si } \alpha < 0 \\ 0 & \text{———— } \alpha \text{ si } 0 \leq \alpha \leq 1 \\ g_\alpha(1) & \text{———— } 1 \text{ si } \alpha > 1 \end{cases}$

d'où $(a_{i,j} - x_{i,j})^2$ minimale si $\begin{cases} x_{i,j} = 0 & \text{si } a_{i,j} < 0 \\ x_{i,j} = a_{i,j} & \text{si } 0 \leq a_{i,j} \leq 1 \\ x_{i,j} = 1 & \text{si } a_{i,j} > 1 \end{cases}$

d° $\boxed{\Pi = (x_{i,j}) \text{ avec } x_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } a_{i,j} < 0 \\ a_{i,j} & \text{si } 0 \leq a_{i,j} \leq 1 \\ 1 & \text{si } a_{i,j} > 1 \end{cases}}$

2.A.6)



Soit $N_0 \in F$ $(F \neq \emptyset)$

Considérons

$K = F \cap B_F(A, \|A - N_0\|)$

K est fermé borné et non vide ($N_0 \in K$) donc K compact non vide d'où par T.B.A.

$$\exists M \in K \subset F \setminus \forall N \in K \quad \|A - M\| \leq \|A - N\|$$

d'où $\forall N \in F$, si $N \in K$: $\|A - M\| \leq \|A - N\|$ et si $N \notin K$ alors $\|A-N\| > \|A - N_0\| \geqslant \|A - M\|$ car $N_0 \in K$

d'où $\boxed{\exists M \in F \setminus \forall N \in F \quad \|A - M\| \leq \|A - N\|}$

2.B.1) X_n est fini non vide donc x_n existe

Y_n est compact non vide donc (thm T.B.A.) :

y_n existe car det est C^0/Y_n (fct polynomiale ou p-linéaire...)

2.B.2) Soit $M_0 \in Y_k$ tel que $\det M_0 = y_k$

soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & M_0 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ on a $M \in Y_{k+1}$ et

$\det M = \det M_0 \leq y_{k+1}$

donc $y_k \leq y_{k+1}$ d'où $\boxed{(y_k)_{k \geqslant 2} \text{ croissante}}$

2.B.3) $M = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix}$

Réduisons M pour calculer $\det M$:

$\operatorname{rg}(M + I_n) = \operatorname{rg}(J) = 1$ donc $\dim E_{-1} = n-1$

$\operatorname{Tr} M = \underbrace{-1 + \cdots + -1}_{n-1 \text{ fois}} + \lambda = 0$ d'où $\lambda = n-1$

cqs $\operatorname{Sp}(M) = \{-1, n-1\}$, $m(-1) = n-1$ et $m(n-1) = 1$

cl° $\boxed{\det M = (-1)^{n-1}(n-1)}$

Autre méthode:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 1 & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \underset{C_1 + C_2 + \cdots + C_n}{=} \begin{vmatrix} n-1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 1 & \ddots & 1 \\ n-1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 1 & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (n-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & & \\ \vdots & -1 & & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \\ 1 & 0 & & -1 \end{vmatrix} \underset{C_2 - C_1 \quad C_n - C_1}{=} (-1)^{n-1}(n-1)$$

cqs : $y_{2n+1} \geq \underset{M \in Y_{2n+1}}{\det M} = 2n \longrightarrow +\infty$

par T.L.M. et suite extraite : cl° $\boxed{\lim_{k \to +\infty} y_k = +\infty}$

2.B.4) Par développement selon la i-ième ligne, on a

$$\det N = \sum_{\alpha=1}^{n} (-1)^{i+\alpha} n_{i,\alpha} \Delta_{i,\alpha} \qquad N=(n_{i,j})$$

$$= (-1)^{i+j} n_{i,j} \Delta_{i,j} + \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha\neq j}}^{n} (-1)^{i+\alpha} n_{i,\alpha} \Delta_{i,\alpha}$$

Soit $N' = (n'_{k,l})$ où $n'_{k,l} = \begin{cases} n_{k,l} & \text{si } (k,l)\neq(i,j) \\ x & \text{si } (k,l)=(i,j) \end{cases}$

($N' = N$ sauf en i,j)

$$\det N' = (-1)^{i+j} x \Delta_{i,j} + \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha\neq j}} n_{i,\alpha} \Delta_{i,\alpha}$$

donc $\det N' - \det N = (-1)^{i+j} \Delta_{i,j} (x - n_{i,j})$

Si $\Delta_{i,j} = 0$, on prend $x=0$ et $\det N' - \det N = 0 \geq 0$

Si $(-1)^{i+j}\Delta_{i,j} > 0$, on prend $x=1$ et $\det N' - \det N \geq 0$ $(1 - n_{ij} \geq 0)$

si $(-1)^{i+j}\Delta_{i,j} < 0$, on prend $x=0$ et $\det N' - \det N \geq 0$

Comme $N' \in Y_n$, d'où $\boxed{\det N' \geq \det N}$

On peut ainsi remplacer <u>tous</u> les coefficients de N, n_{ij} tel que $0 < n_{ij} < 1$ par 0 ou 1 et obtenir ainsi une matrice $\tilde{N} \in X_n$ et $\det N \leq \det N'$

Si N est tel que $\det N = y_n$ on a donc $y_n \leq \det N' \leq x_n$

d'où $\underline{y_n \leq x_n}$

Or $X_n \subset Y_n$ donc $x_n \leq y_n$ d'où $\boxed{x_n = y_n}$

2.B.5) Comme det est continue sur Y_n et Y_n convexe donc connexe/arc, $\det(Y_n)$ est connexe/arc de $\mathbb{R}$ donc un intervalle et comme Y_n est compact (TBA) :

$\det(Y_n) = [m_n, x_n]$ $(x_n = y_n)$

Si $x_n = \det N$ et $m_n = \det N'$, en échangeant les 2 1ères colonnes de N cela donne une matrice $\tilde{N}$ telle que $\tilde{N} \in Y_n$ et $\det \tilde{N} = -x_n \geq m_n$ de même $-m_n \leq x_n$

d'où $\boxed{\det(Y_n) = [-x_n, x_n]}$

3.A.1)

i ⇒ ii) On utilise l'expression du PS à l'aide de la norme : $(x|y) = \frac{1}{2}(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)$

(formule de polarisation)

Donc $\underline{(u(x)|u(y))} = \frac{1}{2}(\|u(x)+u(y)\|^2 - \|u(x)\|^2 - \|u(y)\|^2)$

$= \frac{1}{2}(\|u(x+y)\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)$

(u linéaire)

$= \frac{1}{2}(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)$

$= \underline{(x|y)}$

ii ⇒ iii) $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad (u(e_i)|u(e_j)) = (e_i|e_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

donc $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est une famille O.T.N., comme une famille ⊥ de vecteurs non nuls est libre,

$\underline{(u(e_1), \dots, u(e_n)) \text{ base OTN de } E}$

iii ⇒ i) Soit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$

$u(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i u(e_i)$

$$\|u(x)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \underbrace{\|u(e_i)\|^2}_{=1} + 2\sum_{i<j} x_i x_j \underbrace{(u(e_i)|u(e_j))}_{=0}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

$$= \|x\|^2 \quad \text{donc } \underline{\|u(x)\| = \|x\|}$$

d'o $\boxed{i \Leftrightarrow ii \Leftrightarrow iii}$

3.A.2) $M \in O_n(\mathbb{R}) \Rightarrow M^T M = I_n$

$\Rightarrow \det(M^T) \times \det M = 1$

$\Rightarrow (\det M)^2 = 1$

$\Rightarrow \det M = \pm 1$

d'o $\boxed{M \in O_n(\mathbb{R}) \Rightarrow \det M = \pm 1}$

Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & & & 0 \\ & 1/2 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$, $\det M = \underline{1}$ et $M^T M = \begin{pmatrix} 4 & & & \\ & 1/4 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \neq I_n$

d'o $\boxed{\text{il n'y a pas la réciproque}}$

3.A.3) * si $M \in P_n$ $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & 1 \\ 1 & & & 0 \\ 0 & & & \vdots \\ \vdots & 1 & & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{array}{l} i = \sigma(n) \\ i = \sigma(1) \\ i = \sigma(2) \end{array}$

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ canoniquement associé à M

$(u(e_1), \dots, u(e_n)) = (e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)})$: base OTN de $\mathbb{R}^n$

cqs $M \in X_n \cap O_n(\mathbb{R})$

* Si $M \in X_n \cap O_n(\mathbb{R})$ $M = M_b(u) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

> On a $\|u_\sigma(e_j)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}^2 = \|e_j\|^2 = 1$ car $M \in O_n(\mathbb{R})$

On $a_{i,j} \in \{0,1\}$, il faut donc qu'exactement

un des $a_{1,j}, \dots, a_{n,j}$ soit égal à 1 et les autres à 0. Notons

cet indice $i = \sigma(j)$ donc $(u(e_1), \dots, u(e_n)) = (e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)})$ est

une base OTN de $\mathbb{R}^n$ d'où $j \neq k \Rightarrow \sigma(j) \neq \sigma(k)$ et $\underline{\sigma \in \mathcal{S}_n}$

$\underline{M = P_\sigma \in P_n}$ d' $\boxed{P_n = X_n \cap O_n(\mathbb{R})}$ et $\boxed{|P_n| = n!}$

oubli : voir page 17

3. B. 1) $\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{S}_n$ non injective sinon $\mathbb{Z}$
$k \longmapsto \sigma^k$

serait en bijection avec $\varphi(\mathbb{Z}) \subset \mathcal{S}_n$: ensemble fini

d' $\boxed{\varphi \text{ non injective}}$

Donc $\exists\, i < j \setminus \sigma^i = \sigma^j$ d'où en posant $N = j - i$,

comme $\mathcal{S}_n$ est un groupe, d' $\boxed{\sigma^N = id_{\{1 \dots n\}}}$

oubli $P_\sigma P_{\sigma'} = P_{\sigma\circ\sigma'}$

Utilisons u_σ : $\forall j \in [\![1,n]\!]$

$$u_\sigma \circ u_{\sigma'}(e_j) = u_\sigma(e_{\sigma'(j)}) = e_{\sigma(\sigma'(j))}$$
$$= e_{\sigma\circ\sigma'(j)} = u_{\sigma\circ\sigma'}(e_j)$$

Donc $u_\sigma \circ u_{\sigma'}$ et $u_{\sigma\circ\sigma'}$ coïncide sur la base $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$, d'où $u_\sigma \circ u_{\sigma'} = u_{\sigma\circ\sigma'}$ d'où $\boxed{P_\sigma P_{\sigma'} = P_{\sigma\circ\sigma'}}$

3.B.2) Soit $M \in \mathcal{P}_n$, $\exists \sigma \in \mathcal{S}_n \setminus M = P_\sigma$ et $\exists N \in \mathbb{N}^* \setminus$ $\sigma^N = id_{[\![1,n]\!]}$ d'où avec 3.B.1) $M^N = (P_\sigma)^N = P_{\sigma^N} = P_{id_{[\![1,n]\!]}}$
$= I_n$

cqs M s'annule sur $X^N - 1 = \prod_{k=0}^{N-1}(X - e^{2ik\pi/n})$: scindé à racines simples de $\mathbb{C}$

par la 3ème caractérisation : d'où $\boxed{M \text{ diagonalisable } \forall M \in \mathcal{P}_n}$

3.B.3) $\mathcal{P}_2 \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

Pour $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $E_1 = \text{vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $E_{-1} = \text{vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

d'où $\boxed{\begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} \lambda \\ -\lambda \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}^* \text{ sont les } \vec{v}p \text{ communs à } M \text{ et } I_2}$

$$\begin{array}{ccccccc} & M_1 & M_2 & M_3 & M_4 & M_5 & M_6 \\ \mathcal{P}_3 = \Bigg\{ & \begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix} \Bigg\} \\ \sigma : & id & (2\ 3) & (1\ 2) & (1\ 3) & (1\ 2\ 3) & (1\ 3\ 2) \end{array}$$

Soit $U = \begin{pmatrix} a\\b\\c\end{pmatrix}$ un vecteur propre pour ces 6 matrices :

$$\chi_{M_2}(x) = (x-1)(x^2-1) = (x-1)^2(x+1) = \chi_{M_3}(x) = \chi_{M_4}(x)$$

$$\chi_{M_5}(x) = x^3 - 1 = \chi_{M_6}(x)$$

$E_1(M_2) = P/_{y=z}$ et $E_{-1}(M_2) = \text{vect}\begin{pmatrix} 0\\1\\-1\end{pmatrix}$

$E_1(M_3) = P/_{x=y}$ et $E_{-1}(M_3) = \text{vect}\begin{pmatrix} 1\\-1\\0\end{pmatrix}$

$E_1(M_4) = P/_{x=z}$ et $E_{-1}(M_4) = \text{vect}\begin{pmatrix} 1\\0\\-1\end{pmatrix}$

* Si $U \in E_1(M_2)$ alors $U = \begin{pmatrix} a\\b\\b\end{pmatrix}$ et $U \in E_{-1}(M_3) \Rightarrow \begin{cases} a = \lambda \\ b = -\lambda \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow U = 0$ absurde

donc $U \in E_1(M_3)$ d'où $U = \begin{pmatrix} a\\a\\a\end{pmatrix}$ qui est bien un $\vec{vp}$ à tous les M_i, $1 \leq i \leq 6$

* Si $U \in E_{-1}(M_2)$ alors $U = \begin{pmatrix} 0\\b\\-b\end{pmatrix}$

or $U \in E_1(M_3) \Rightarrow b = 0 \Rightarrow U = 0$

$U \in E_{-1}(M_3) \Rightarrow -b = 0 \Rightarrow U = 0$

cl : $\boxed{\begin{pmatrix} \lambda\\\lambda\\\lambda\end{pmatrix},\ \lambda \in \mathbb{R}^* \text{ sont les } \vec{vp} \text{ communs à } \mathcal{P}_3}$

3 B 4 a) * $\{0\}$ et $\mathbb{R}^n$ sont tjs stables par les u_σ

* $\forall \sigma$ $u_\sigma\begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{pmatrix}$ par définition des matrices de $\mathcal{P}_n$

donc D stable $/ u_\sigma$

* $\forall \vec{x}\begin{pmatrix}a_1\\ a_n\end{pmatrix} \in H / x_1 + \dots + x_n = 0$

cdv bij : $i = \sigma(j)$

$\forall \sigma$ $u_\sigma(\vec{x}) = u_\sigma\left(\sum_{j=1}^{n} a_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} a_j e_{\sigma(j)} = \sum_{i=1}^{n} a_{\sigma^{-1}(i)} e_i$

et $a_{\sigma^{-1}(1)} + \dots + a_{\sigma^{-1}(n)} = a_1 + \dots + a_n = 0$

donc $u_\sigma(\vec{x}) \in H$ donc H stable$/u_\sigma$

d'où $\boxed{\text{les 4 sev sont stables par tout } u_\sigma,\ \sigma \in \mathcal{S}_n}$

rem. On pouvait aussi utiliser $H = D^\perp$ ....

b) Soit V un sev de $\mathbb{R}^n \setminus V \not\subset D$ donc $\exists \vec{x}\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots \\ a_n\end{pmatrix} \in V$

et $\vec{x} \notin D$ donc $\exists i < j \setminus a_i \neq a_j$

$\forall \sigma \in \mathcal{S}_n$ $\sigma^{-1} \in \mathcal{S}_n$ et $u_{\sigma^{-1}}(\vec{x})\begin{pmatrix}a_{\sigma(1)}\\ \vdots \\ a_{\sigma(n)}\end{pmatrix} \in V$

soit $\sigma = (i\ j)$ $\quad u_{\sigma^{-1}}(\vec{x}) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow i\text{-ème ligne} \\ \\ \leftarrow j\text{ —} \end{array}$

donc $u_{\sigma^{-1}}(\vec{x}) - \vec{x} = (a_j - a_i) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = (a_j - a_i)(e_i - e_j) \in V$

Comme $a_j - a_i \neq 0$, $\frac{1}{a_j - a_i}(a_j - a_i)(e_i - e_j) = e_i - e_j \in V$

d'où $\boxed{\exists i < j \setminus\ e_i - e_j \in V}$

Soit $k \neq j$ et $k \neq i$ et soit $\sigma = (j\ k)$

$$u_\sigma(e_i - e_j) - (e_i - e_j) = -e_k + e_j \in V$$

d'où $\boxed{\forall k \neq j \quad e_k - e_j \in V}$

c) $\forall k \neq j \quad e_k - e_j \in H / x_1 + \dots + x_n = 0$

or $\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} \lambda_k (e_k - e_j) = 0 \Rightarrow \forall k \neq j\ \lambda_k = 0$

donc $(e_k - e_j)_{k \neq j}$ base de H ($\dim H = n-1$)

donc $H \subset V \subset \mathbb{R}^n$ et avec les dimensions :

d'où $\boxed{\text{si } V \neq \{0\} \text{ et } V \neq D,\ V = H \text{ ou } V = \mathbb{R}^n}$

3.c) On a donc la suite (M^k) non injective :

$\exists\, i<j \mid M^i = M^j$ (idem 3.b.1) et comme M est inversible $M^j M^{-i} = I_n$, d'où si on pose $k=j-i$, on a $k \geq 1$ et $M^k = I_n$ donc $M^{k-1} M = I_n$

d'où $M^{-1} = M^{k-1}$ et par additions/multiplications des coefficients de M, d'où $\boxed{M^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{N})}$

Posons $M = (a_{i,j})$ et $M^{-1} = (b_{i,j})$ on a $(a_{i,j}, b_{i,j}) \in \mathbb{N}^2$

on $\forall i,j \quad \sum_{\alpha=1}^{n} a_{i,\alpha} b_{\alpha,j} = \delta_{i,j}$

$\forall i \in [\![1,n]\!] \quad \sum_{\alpha=1}^{n} a_{i,\alpha} b_{\alpha,i} = 1$ donc $\exists\, k \in [\![1,n]\!] \mid a_{i,\alpha} b_{\alpha,i} \neq 0$

comme tout est dans $\mathbb{N}$, $a_{i,k} b_{k,i} = 1$ et donc $a_{i,k} = b_{k,i} = 1$

Soit $j \neq i$ $\sum_{\alpha=1}^{n} a_{j,\alpha} b_{\alpha,i} = 0$ et (tjs $\mathbb{N}$) :

$\forall \alpha \in [\![1,n]\!] \quad a_{j,\alpha} b_{\alpha,i} = 0$

donc $a_{j,k} \underbrace{b_{k,i}}_{=1} = 0$ d'où $a_{j,k} = 0$

donc sur la colonne k, il n'y a qu'un terme non nul : $a_{i,k}$

Notons $\sigma : [\![1, n]\!] \longrightarrow [\![1, n]\!]$
$i \longmapsto k \setminus a_{i,k} = 1$

si $i \neq j$, $\sigma(i) \neq \sigma(j)$ sinon il y aurait deux 1 sur la colonne $\sigma(i) = \sigma(j)$ donc σ injective d'où bijective

Comme σ est bijective, Π ne contient qu'un seul 1 par ligne et par colonne

cl $\boxed{\Pi \in \mathcal{P}_n}$

La réciproque est vraie compte tenu du 3.B.1)

4.A.1.) $P(X_1 = \dots = X_n)$ $\qquad X_i(\Omega) = \{0, 1\}$

$= P(X_1 = \dots = X_n = 1) + P(X_1 = \dots = X_n = 0)$ réunion disjointe

$= P((X_1 = 1) \cap \dots \cap (X_n = 1)) + P((X_1 = 0) \cap \dots \cap (X_n = 0))$

$= p^n + q^n$ par indépendance de $X_1, \dots, X_n$.

cl° $\boxed{P(X_1 = \dots = X_n) = p^n + q^n}$

4.A.2) $S \sim \mathcal{B}(n,p)$ voir le cours

4.A.3) $X_{i,j}(\Omega) = \{0,1\}$

$(X_{i,j} = 1) = (X_i = 1) \cap (X_j = 1)$

si $i \neq j$, par indépendance, $P(X_{i,j}) = p^2$ et $X_{i,j} \sim \mathcal{B}(p^2)$

si $i = j$, $X_{i,j} = X_i^2 = X_i$ ($0^2 = 0$ et $1^2 = 1$)

d $\boxed{\text{si } i \neq j : X_{i,j} \sim \mathcal{B}(p^2) \text{ et si } i=j : X_{i,i} \sim \mathcal{B}(p)}$

4 A 4 a) $\underline{M(w)} = (X_i(w) X_j(w)) = (X_{i,j}(w)) \in \underline{\mathcal{X}_n}$

b) $\underline{Tr(M(w))} = \sum_{i=1}^{n} X_{i,i}(w) \in \underline{[\![0, n]\!]}$

$X_{i,j}(w) = X_{j,i}(w)$ donc $M(w)$ symétrique réelle

d'où $\underline{M(w) \text{ diagonalisable}}$

$M(w) = (\lambda_1 U(w) | \dots | \lambda_n U(w))$ avec $\lambda_j = X_j(w)$

d'où $\underline{rg(M(w)) \leq rg(U(w)) \leq 1}$

c) $M(w)^2 = U(w) \underbrace{U(w)^T U(w)}_{\in \mathbb{R}} U(w)^T = \lambda M(w)$ et $\lambda = \sum_{i=1}^{n} X_i^2(w)$

Comme $X_i^2 = X_i$, $M(w)^2 = S(w) M(w)$

si $S(w)=1$, $\Pi^2(w)=\Pi(w)$ donc $\Pi(w)$ matrice de projecteur (24)

rem. comme $\Pi(w)=\Pi(w)^T$, $\Pi(w)$ matrice de projecteur orthogonale

si $S(w)=0$, $\forall i \in [\![1,n]\!]$ $0 \leq X_i(w) \leq S(w)=0$

d'où $\Pi(w)=(0)$: matrice de projecteur

si $S(w) \geq 2$, $U(w) \neq (0)$ et donc $\Pi(w) \neq (0)$ d'où

$\Pi^2(w) = S(n)\Pi(w) \neq 1.\Pi(w)$: non projecteur

cl $\boxed{\Pi(w) \text{ matrice de projecteur ssi } S(w) \in \{0,1\}}$

4.A.5) * $Tr(\Pi(w)) = \sum_{i=1}^{n} X_i(w) = S(w)$

(4 A 3 et 4 A 4a)

cl_1 : $\boxed{Tr(\Pi) \sim \mathcal{B}(n,p)\ ,\ E(Tr(\Pi))=np \text{ et } V(Tr(\Pi))=npq}$

* $rg(\Pi(w)) \in \{0,1\}$

$P(rg(\Pi(w))=0) = P(U(w)=0) = P((X_1=0)\cap\cdots\cap(X_n=0)) = q^n$

cl_2 : $\boxed{rg(\Pi) \sim \mathcal{B}(1-q^n)\ ,\ E(rg(\Pi))=1-q^n\ ,\ V(rg(\Pi))=q^n(1-q^n)}$

4.A.6) on a vu que $\Pi^2 = S\Pi$ donc $\Pi^3 = S\Pi\Pi = S^2\Pi$ et

par récurrence $\boxed{\forall k \geq 1 : \Pi^k = S^{k-1} M \quad \text{et } \Pi^0 = I_n}$

25

si $M \neq (0)$, (M^k) cvg $\Leftrightarrow (S^{k-1})_{k \geq 1}$ cvg

Comme $S(w) \in [\![0, n]\!]$, $(S(w)^k)$ cvg $\Leftrightarrow S(w) \in \{0, 1\}$

$\Leftrightarrow S(w) = 1$ sinon $M(w) = (0)$

donc $[(M^k)$ cvg et $(M \neq (0))] \Leftrightarrow [S = 1]$

si $M = (0)$, (M^k) cvg vers (0)

Notons c la probabilité de $\mathscr{C}$: "(M^k) cvg", on a :

$$c = P(\mathscr{C} \cap (M \neq (0))) + P(\mathscr{C} \cap M = (0)) \text{ par F.P.T}$$

$$= P(S = 1) + P(M = (0))$$

$$= \binom{n}{1} p q^{n-1} + q^n$$

d $\boxed{P((M^k) \text{ cvg}) = npq^{n-1} + q^n}$

Vu le 4 A 4c) <u>la limite est une matrice de projection.</u>

4.A.7) Comme $\mathrm{rg}\, M(w) \leq 1$ $\dim E_0(M(w)) \geq n-1$ et

$$\chi_{M(w)}(x) = x^{n-1}(x - \alpha) \text{ et } \alpha = \mathrm{Tr}\, M(w)$$

Notons $\mathscr{D}$: "M admet 2 val. propres distinctes"

$$P(\mathscr{D}) = P(\mathrm{Tr}(M) \neq 0) = 1 - P(\mathrm{Tr}(M) = 0) = 1 - q^n$$

d'où $\boxed{P(\mathscr{D}) = 1 - q^n}$

4. B. 1) Voir page 28

4. B. 2) N_1 représente le nb de succès d'1 épreuve de type binomiale de n^2 tirages d'où $\boxed{N_1 \sim \mathcal{B}(n^2, p)}$

Soit $i \in [\![0, n^2]\!]$ $N_2/_{(N_1=i)}$ représente le nb de succès d'1 épreuve binomiale de $n^2 - i$ tirages

d'où $\boxed{N_2/_{(N_1=i)} \sim \mathcal{B}(n^2-i, p)}$

$P(N_2 = k/_{N_1=i}) = \binom{n^2-i}{k} p^k q^{n^2-i-k} \overset{?}{=} P(N_2 = k)$? $\forall k, i$

si $i = 0$ et $k = 0$: $P(N_2 = k/_{N_1=i}) = q^{n^2}$

si $i = n^2$ et $k = 0$: $P(N_2 = k/_{N=i}) = 1$

$\neq$

d'où $\boxed{N_1 \text{ et } N_2 \text{ non indépendantes}}$

4 B 3) $T_{i,j}$ représente le 1er succès $((M_k)_{i,j} = 1)$

d'où $\boxed{T_{i,j} \sim \mathcal{G}(p)}$

4 B 4) $\underline{P(T_{i,j} \geq k)} = \mathbb{P}$("que des échecs au k-1 1er passage") $= \underline{q^{k-1}}$

4.B.5.) S_n est le nb de 1 après n passages. $S_n(\Omega) = [\![0, n^2]\!]$ 27

$$(S_n = k) = \bigcup_{\substack{K \subset [\![1,n]\!]^2 \\ |K| = k}} \bigcap_{(i,j)\in K} (T_{i,j} \leq n) \cap \bigcap_{(i,j)\in \overline{K}} (T_{i,j} \geqslant n+1)$$

il y a k cases qui ont un 1 après n passages

les autres cases sont tjs à 0

Par incompatibilité, indépendance, 4B4 et $P(T_{i,j} \leq n) = 1 - P(T_{i,j} \geqslant n+1)$

$$P(S_n = k) = \binom{n^2}{k} (1-q^n)^k \times (q^n)^{n^2-k}$$

choix de K

d'où $\boxed{S_n \sim \mathcal{B}(n^2, 1-q^n)}$

4.B.6.a) voir page 28

b) $E(N) = \sum_{k=1}^{\infty} k P(N=k)$

Or $(N \geqslant n) = (S_{n-1} < n^2)$ (après n-1 tirages il reste des cases égales à 0)

Or (la redémonstration avec les séries doubles) :

$$E(N) = \sum_{n=1}^{\infty} P(N \geqslant n) = \sum_{n=1}^{\infty} 1 - P(S_{n-1} = n^2) = \sum_{n=0}^{\infty} 1 - (1-q^n)^{n^2 = m}$$

(en développant avec Newton & linéarité : $E(N) = \sum_{k=1}^{n^2} (-1)^{k+1} \binom{n^2}{k} \frac{1}{1-q^k}$

```python
#D'après CentralePsi2016
from random import *
import numpy as np
import numpy.linalg as alg

def Somme(M):
    n=len(M)
    s=0
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            s=s+M[i,j]
    return(s)

def Bernoulli(p):
    tirage=random()
    return(1 if tirage<p else 0)

def Modifie(M,p):
    n=len(M)
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            if M[i,j]==0:
                M[i,j]=Bernoulli(p)
    return(M)

def Simulation(n,p):
    M=np.zeros((n,n))
    k=0
    while Somme(M)<n*n:
        #print(M)
        k=k+1
        M=Modifie(M,p)
    return(k)

def esperance(n,p,nb):
    s=0
    for k in range(nb):
        s=s+Simulation(n,p)
    return(s/nb)

#In [9]: esperance(5,1/2,100001)
#Out[9]: 6.0069999300007
```