Dm n°9 : corrigé

Corrigé exercice 1

1. Posons $u_n(x) = \dfrac{1}{n}\sin(\dfrac{x}{n})$

   Si $x = 0$: la série converge (absolument) !

   Si $x \neq 0$: $\left|\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{x}{n}\right| \sim \dfrac{|x|}{n^2} \geqslant 0$ et la série $(\sum \dfrac{1}{n^2})$ converge, donc la série $(\sum u_n(x))$ converge (absolument) par TC.

   __Conclusion__: $\boxed{f \text{ est définie sur } \mathbb{R}}$

2. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$: $\Big|f(x) - f(y)\Big| = \left|\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\sin\frac{x}{n} - \sin\frac{y}{n}\right)\right| \leqslant \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left|\sin\frac{x}{n} - \sin\frac{y}{n}\right|$ car il y a convergence absolue.

   Or , avec le T.A.F. , $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\exists c \in]a,b[$: $\quad |\sin a - \sin b| = |a-b||\cos c| \leqslant |a-b|$.

   Donc $\Big|f(x) - f(y)\Big| \leqslant \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n}\frac{1}{n}|x-y| = |x-y| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}|x-y|$

   __Conclusion__: $\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \Big|f(x) - f(y)\Big| \leqslant \frac{\pi^2}{6}\Big|x-y\Big| \text{ et } f \text{ est } \frac{\pi^2}{6}\text{-lipschitzienne sur } \mathbb{R}}$

3. C'est une conséquence immédiate du 2) :

$$\boxed{f \text{ lipschitzienne} \Longrightarrow f \text{ continue sur } \mathbb{R}}$$

4. Avec les notations du 1°) ,

   i) Par T.G. , u_n est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

   ii) $(\sum u_n)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ (c'est le 1°))

   iii) $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}$: $\quad \Big|u_n^{(k)}(x)\Big| = \left|\dfrac{1}{n} \quad \dfrac{1}{n^k}\sin\left(\dfrac{x}{n} + k\dfrac{\pi}{2}\right)\right| \leqslant \dfrac{1}{n^{k+1}}$ or comme $\left(\sum \dfrac{1}{n^{k+1}}\right)$ converge($k+1 \geqslant 2$), il y a <u>convergence normale</u> de $\left(\sum u_n^{(k)}\right)$ sur $\mathbb{R}$.

   Par théorème de dérivation,

   __Conclusion__:

$$\boxed{f \text{ de classe } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R} : \quad f^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{k+1}}\sin\left(\frac{x}{n} + k\frac{\pi}{2}\right)}$$

5. Posons $g : x \longmapsto f(x)e^{-x}$, $v_n(x) = \dfrac{1}{n}\sin\dfrac{x}{n}e^{-x}$ et $J = [0, +\infty[$.

   i) $\left(\sum v_n\right)$ converge simplement sur J vers g.

ii) v_n et g sont continues (TG et le 3°)) sur J et v_n est intégrable sur J car

$v_n(x) \underset{+\infty}{=} O(e^{-x})$ et comme $x \longmapsto e^{-x}$ est intégrable sur J, par T.C. , v_n aussi.

iii) Comme $|\sin x| \leqslant x$ (vu au 2°)) , $0 \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty} |v_n(x)|dx \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{x}{n^2}e^{-x}dx = \frac{1}{n^2}$ (avec une IPP rapide : on dérive x et on intègre e^{-x} : tout converge) et donc par TC la série $\left(\displaystyle\int_0^{+\infty} |v_n(x)|dx\right)$ converge.

Le Théorème d'intégration terme à terme de Lebesgue s'applique et donne :

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} g(x)dx = \int_0^{+\infty} f(x)e^{-x}dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} v_n(x)dx \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{n}}}\mathrm{e}^{-\mathrm{x}}\mathrm{dx}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1}\mathrm{Im}\left(\left[\frac{1}{\frac{\mathrm{i}}{\mathrm{n}} - 1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{n}}}\mathrm{e}^{-\mathrm{x}}\right]_0^{+\infty}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1}\mathrm{Im}\left(0 - \frac{\mathrm{n}}{\mathrm{i} - \mathrm{n}}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1}\mathrm{Im}\left(\frac{-\mathrm{n}(-\mathrm{i} - \mathrm{n})}{\mathrm{n}^2 + 1}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}
\end{aligned}$$

<u>Conclusion</u>: $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)e^{-x}dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}}$

Posons $h : t- \longmapsto \dfrac{1}{t^2 + 1}$, on a h qui continue, positive et décroissante sur $\mathbb{R}^+$. On peut donc appliquer la comparaison série-intégrale (faire un dessin ou redémontrer l'inégalité) :

$0 \leqslant R_n = \displaystyle\sum_{p=n+1}^{\infty} \frac{1}{p^2 + 1} \leqslant \int_n^{+\infty} \frac{1}{t^2 + 1}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} - \arctan n = \arctan(\frac{1}{n})$.

Comme $\arctan(\dfrac{1}{n}) \sim \dfrac{1}{n}$, on essaye $n = 8, 9, 10, 11...$:

$10\arctan(\dfrac{1}{9}) = 1.106$ et $10\arctan(\dfrac{1}{10}) = .996$.

En conséquence $R_{10} < 10^{-1}$ et donc $I \cong S_{10} = \displaystyle\sum_{p=1}^{10} \frac{1}{p^2 + 1} = \frac{1662222227}{1693047850} \cong 0.98...$

Pour avoir la précision 10^{-4}, il faudrait prendre n de l'ordre de 10.000. On va voir qu'avec l'accélération de convergence $n = 15$ suffira !

Pour calculer I à 10^{-4} près, effectuons une <u>accélération de cvg</u> :

On sait que $J = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ connu à 10^{-7} près !

Considérons $K = J - I = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2+1} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n^2+1)}$

Par comp. Σ-$\int$ "sur K" on a :

$$R_n(K) \leq \int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^2(t^2+1)} = \int_n^{+\infty} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^2+1} \right) dt = \frac{1}{n} - \frac{\pi}{2} + \text{Arctan}\, n$$

$$\leq \frac{1}{n} - \text{Arctan} \frac{1}{n} = \frac{1}{n} - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \right) \sim \frac{1}{3n^3}$$

Si on pose $\varphi(t) = \frac{1}{t} - \text{Arctan}\, t$, $\varphi'(t) = \frac{-1}{t^2} + \frac{1}{t^2+1} < 0$

d'où φ est décroissante sur $[1, +\infty[$

n	1	$+\infty$
$\frac{1}{n} - \text{Arctan} \frac{1}{n}$	$\searrow$	0

Par dichotomie on trouve

$$R_{n_0}(k) \leq \frac{1}{n_0} - \text{Arctan} \frac{1}{n_0} < 10^{-4}$$

avec $n_0 = 15$ (belle accélération!)

<u>csq</u> : $K \simeq S_{n_0}(k) \simeq 0{,}56817\ldots$ à 10^{-4} près

<u>cl.</u> $\boxed{I = J - K \simeq 1{,}07667\ldots \text{ à } 10^{-4} \text{ près}}$

exercice 2

1) $$F = E + \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_k} \frac{\lambda_{kj}}{(X-a_k)^j}$$

On a aussi $F = \frac{P}{Q}$ avec $\left| \begin{array}{l} (P,Q) \in \mathbb{K}[X] \times (\mathbb{K}[X] - \{0\}) \\ P \wedge Q = 1 \end{array} \right.$

$P = a_p X^p + \dots$, $Q = b_q X^q + \dots$, donc

$$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{a_p/b_q}{x^{q-p}} = \frac{\lambda}{x^\alpha} \quad \text{avec} \begin{cases} \lambda = a_p/b_q \neq 0 \\ \alpha = q-p \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Pb : F est complexe et $\int_{-\infty}^{+\infty} F$ existe n'entraîne pas que F soit intégrable.

Posons $F = F_1 + iF_2$ (fct Re et Im)

$$x^\alpha F_1(x) + i x^\alpha F_2(x) \longrightarrow \lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$$

Donc $\begin{cases} x^\alpha F_1(x) \longrightarrow \lambda_1 \\ x^\alpha F_2(x) \longrightarrow \lambda_2 \end{cases}$

Comme $\lambda \neq 0$, $\lambda_1 \neq 0$ ou $\lambda_2 \neq 0$. Par exemple (SNALG!)

Supposons $\lambda_1 \neq 0$ on a donc $F_1(x) \sim \frac{\lambda_1}{x^\alpha}$

Quitte à changer F en $-F$, on peut supposer $\lambda_1 > 0$. ②

Comme $\frac{\lambda_1}{x^\alpha} > 0$, $\exists A > 0$ | F_1 soit positive sur $[A, +\infty[$.

Enfin $\int_{-\infty}^{+\infty} F$ existe $\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} F_1$ existe $\Rightarrow \int_A^{+\infty} F_1$ existe

$\Rightarrow F_1$ intégrable sur $[A, +\infty[$ car $F_1 \geqslant 0$.

Comme $F_1(x) \sim \frac{\lambda}{x^\alpha}$, par T.C., $\alpha > 1$.

Comme $\alpha = q - p = d^\circ Q - d^\circ P$, $\boxed{E = 0}$.

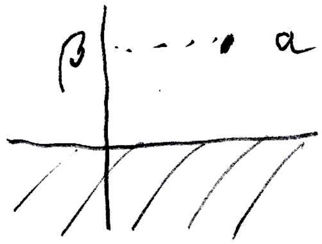
On en déduit que $xF(x) = 0 + \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{\lambda_{k,j}\, x}{(x-a_k)^j} \xrightarrow[+\infty]{} 0$

Si $j = 1$, $\frac{\lambda_{k,1}\, x}{(x-a_i)^1} \xrightarrow[+\infty]{} \lambda_{k,1} = \mathrm{Res}_F(a_k)$

si $j \geqslant 2$, $\frac{\lambda_{k,j}\, x}{(x-a_k)^j} \xrightarrow[+\infty]{} 0$

et $\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{Res}_F(a_k) = 0}$

2) 1er cas $\left| \begin{array}{l} a = \alpha + i\beta \\ \alpha > 0 \end{array} \right.$



$t \longmapsto \frac{1}{t-a}$ $C^0/\mathbb{R}$ par TG ($a \notin \mathbb{R}$).

③

$$\int_{-n}^{n} \frac{dt}{t-a} = \int_{-n}^{n} \frac{dt}{t-\alpha-i\beta} = \int_{-n}^{n} \frac{(t-\alpha+i\beta)\,dt}{(t-\alpha)^2+\beta^2}$$

$$= \int_{-n}^{n} \frac{[\frac{1}{2} 2(t-\alpha) + i\beta]\,dt}{(t-\alpha)^2+\beta^2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\ln\left((t-\alpha)^2+\beta^2\right)\right]_{-n}^{n} + i\beta\left[\frac{1}{\beta}\,\text{Arctan}\left(\frac{t-\alpha}{\beta}\right)\right]_{-n}^{n}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{(n-\alpha)^2+\beta^2}{(n+\alpha)^2+\beta^2}\right) + i\left(\text{Arctan}\left(\frac{n-\alpha}{\beta}\right) - \text{Arctan}\left(\frac{n-\alpha}{\beta}\right)\right)$$

$\beta > 0$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}\ln(1) + i\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = i\pi$$

d'où $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \int_{-n}^{n} \frac{dt}{t-a} = i\pi}$

2e cas $\left| \begin{array}{l} a = \alpha + i\beta \\ \beta < 0 \end{array} \right.$ alors $a' = -a = -\alpha + i\beta'$ avec $\beta' = -\beta > 0$,

$\forall n \in \mathbb{R}^{+*}$ $\displaystyle\int_{-n}^{n} \frac{dt}{t-a} = \int_{n}^{-n} \frac{-du}{-u-a}$ avec le cdvc : $u = -t$

$$= -\int_{-n}^{n} \frac{du}{u-a'} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -i\pi$$

d'où $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{-n}^{n}\frac{dt}{t-a}=-i\pi}$

3°) $\forall j\geq 2$ $\int_{-n}^{n}\frac{dt}{(t-a)^j}=\left[\frac{(t-a)^{-j+1}}{-j+1}\right]_{-n}^{n}$
$\forall a\in\mathbb{C}-\mathbb{R}$

$$=\frac{1}{1-j}\left(\frac{1}{(n-a)^{j-1}}-\frac{1}{(n-a)^{j-1}}\right)$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{}\frac{1}{1-j}(0-0)$$ par TG ou mieux !

$\left(|n-a|\geq|n|-|a| \ \ldots \ \forall n\mid |n|\geq|a|\right)$

On reprend la déc. en elt simples du 1°) :

$$\forall n>0 \quad \int_{-n}^{n}F(t)\,dt=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_k}\int_{-n}^{n}\frac{\lambda_{k,j}\,dt}{(t-a_k)^j}$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{}\sum_{k=1}^{n}\lambda_{k,1}\,i\pi\times\text{signe}(\mathrm{Im}(a_k))+0$$

Comme $\int_{-\infty}^{+\infty}F$ cvg, $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{-n}^{n}F=\int_{-\infty}^{+\infty}F$

cqfd $\int_{-\infty}^{+\infty}F=i\pi\left(\sum_{a_k\in P^+}\mathrm{Res}_F(a_k)-\sum_{a_k\in P^-}\mathrm{Res}_F(a_k)\right)$

⑤

Comme $\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}_F(a_k) = \sum_{a_k \in \mathcal{P}^+} \mathrm{Res}_F(a_k) + \sum_{a_k \in \mathcal{P}^-} \mathrm{Res}_F(a_k) = 0$,

d'où $$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} F(t)\,dt = 2\pi i \sum_{a_k \in \mathcal{P}^+} \mathrm{Res}_F(a_k)}$$

4) Les 2 fonctions $t \mapsto \dfrac{1}{t^{2p}+1}$ sont $C^0/\mathbb{R}$ par TG

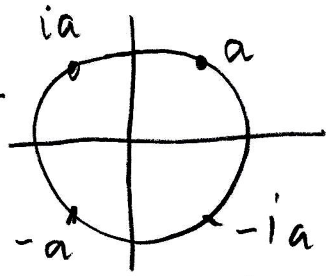
et par TC et $\underset{\pm\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{2p}}$, les 2 intégrales existent.

<u>1^er cas</u> : $F(t) = \dfrac{1}{t^2+1}$ $\quad \mathcal{P}^+ = \{i\}$

$\mathrm{Res}_F(i) = \dfrac{1}{2i} = \dfrac{-i}{2}$ d'où $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{dt}{t^2+1} = \pi}$

cohérent avec $\left[\mathrm{Arctan}\right]_{-\infty}^{+\infty}$!

<u>2^eme cas</u> : $F(t) = \dfrac{1}{t^4+1}$



racines de X^4+1 : $a, -a, ia, -ia$ avec $a = e^{i\pi/4}$

Donc $\mathcal{P}^+ = \{a, ia\}$

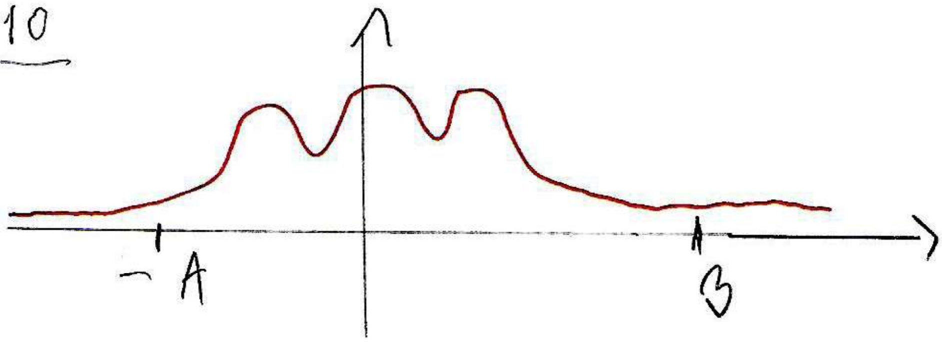
b pôle simple : formule du cours

Si b est un pôle de F : $\mathrm{Res}_F(b) = \dfrac{1}{4b^3} = \dfrac{-b}{4}$

D'où $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^4+1} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$

Mines 2010

$\boxed{Q_0}$



* Soit $\varepsilon = 1 > 0$, $\exists B \in \mathbb{R}^+ \mid \forall x \geq B : |u(x)| \leq 1$

$\exists A \in \mathbb{R}^+ \mid \forall x \leq -A : |u(x)| \leq 1$

(car $\lim\limits_{\pm\infty} u = 0$)

Sur $[-A, B]$, u est bornée (image d'1 segment par u continue) ; $\exists m \leq M \mid \forall x \in [-A, B]$ $m \leq u(x) \leq M$.

cqs $\forall x \in \mathbb{R}$ $\min(-1, m) \leq u(x) \leq \max(1, M)$

d'où : $\boxed{u \text{ est bornée sur } \mathbb{R}.}$

* Soit $\varepsilon > 0$, $\exists B \in \mathbb{R}^+ \mid \forall x \geq B : |u(x)| \leq \varepsilon/2$

$\exists A \in \mathbb{R}^+ \mid \forall x \leq -A : |u(x)| \leq \varepsilon/2$

donc $\forall x, y \geq B$: $|u(x) - u(y)| \leq |u(x)| + |u(y)| \leq \varepsilon$

$\forall x, y \leq -A$: ——————— $\leq \varepsilon$

Sur $[-A-1, B+1]$, u est uniformément C^0 (Heine)

le ± 1, c'est pour les "raccords"

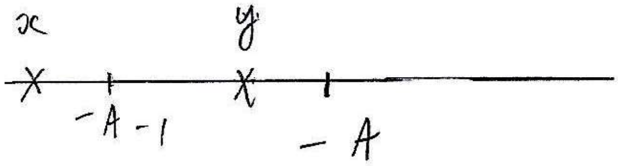
donc $\exists \alpha > 0 \setminus \forall (x,y) \in [-A-1, B+1]^2$:

$$|x-y| \leq \alpha \Rightarrow |u(x) - u(y)| \leq \varepsilon$$

comme α convient $\Rightarrow \forall \alpha' \leq \alpha$, α' convient aussi,

on peut supposer $\alpha \leq 1$

Reste les "raccords" :



si $x \leq -A-1 \leq y$ et $|x-y| \leq \alpha \leq 1$

dans ce cas, $x \leq y \leq -A$ et $|u(x)-u(y)| \leq \varepsilon$

idem si $x \leq B+1 \leq y$, $B \leq x \leq y$

cqfd : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$: $|x-y| \leq \alpha \Rightarrow |u(x) - u(y)| \leq \varepsilon$

d^o_2 : $\boxed{u \text{ est uniformément } C^0 \text{ sur } \mathbb{R}.}$

Q1 * $t \mapsto f(t)g(x-t)$ $C^0/\mathbb{R}$ par TG, comme $g \in C_0(\mathbb{R})$,

elle est bornée sur $\mathbb{R}$ donc $f(t)g(x-t) \underset{\pm\infty}{=} O(|f(t)|)$

or $f \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ donc f positive et $\int_{\mathbb{R}} f$ existe donc

f est intégrable$/\mathbb{R}$ d'où par T.C. $t \mapsto f(t)g(x-t)$ int.$/\mathbb{R}$

$\mathcal{U}_1$: $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt \text{ converge}}$

* Posons $F(x,t) = f(t)g(x-t)$ et $I = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{R}$

Par TG, $F(x,\cdot)$ est C^0/mcx sur I, $\forall x \in A$

$F(\cdot,t)$ est C^0 sur A, $\forall t \in I$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall t \in \mathbb{R}$: $|F(x,t)| \leq \|g\|_\infty \cdot f(t) = \varphi(t)$ et

φ int. $/\mathbb{R}$ $\quad$ $\mathcal{U}_2$: $\boxed{f*g \ C^0 \text{ sur } \mathbb{R}}$

* Effectuons le CdV $u = x-t$ C^1-bijectif de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et

$$f*g(x) = \int_{+\infty}^{-\infty} f(x-u)g(u)(-du) = g*f(x)$$

$\mathcal{U}_3$: $\boxed{f*g = g*f}$

$\boxed{Q_2}$ utilisons le th. de cvg dominée et le critère séq. : soit $x_n \to +\infty$

Posons $f_n(t) = f(t)g(x_n - t)$ et $I = \mathbb{R}$

$\rightarrow$ $\forall t \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(t) = 0$ car $f(t)$ cste (% n) et $g \in C_0(\mathbb{R})$
(+ critère séquentiel)

dc (f_n) c.s. vers 0 sur $\mathbb{R}$

$\rightarrow f_n$ et θ sont $C^0 / I = \mathbb{R}$ par TG, ④

$\rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R} \quad |f_n(t)| \leq \|g\|_\infty \cdot f(t) = \varphi(t)$ idem Q_1

cqs $\forall x_n \to +\infty$, $f*g(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, par critère séquentiel :

cl_1 : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f*g(x) = 0}$

Pour $-\infty$, on fait rigoureusement la même chose, $\left| \begin{array}{l} \text{si } x_n \to -\infty, \\ \lim\limits_{n\to\infty} g(x_n - t) = 0 \end{array}\right.$

cl_2 : $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f*g(x) = 0}$

$\boxed{Q_3}$ Posons $h = f*g$, h est <u>définie</u> et <u>continue</u> : démo identique à Q_1, à Q_1 on ne se sert que de g bornée et $C^0/\mathbb{R}$.

Comme f et g sont positives, h est <u>positive</u>

$\forall x \in \mathbb{R} \quad |h(x)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \|g\|_\infty dt = \|g\|_\infty \times 1$

donc <u>h bornée</u>

Pour l'intégrale, utilisons Fubini (juste 1) et 3°))

1) $F : (x,t) \longmapsto f(t) g(x-t)$ est $C^0 / \mathbb{R}^2$ par TG,

$\forall x \in \mathbb{R} \quad \left| \begin{array}{l} |f(t) g(x-t)| \leq \|g\|_\infty \cdot f(t) \quad : \text{int} / \mathbb{R} \\ \forall t \in \mathbb{R} \end{array} \right.$

cqs $\int_{-\infty}^{+\infty} |F(x,t)| dt$ cvg par T.C.

et par cdv C^1-bijectif : $u = x-t$ ds cette $\int$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F(x,t)| dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(u) du \text{ cvg}$$

3) $\int_{-\infty}^{+\infty} |F(x,t)| dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(u) du = f(t)$

donc $t \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} |F(x,t)| dx$ int. $/\mathbb{R}$.

cqs (Fubini) :

$$\int_{\mathbb{R}} f*g(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(x-t) dt \right) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(x-t) dx \right) dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1$$

d'où $\boxed{f*g \in \mathcal{P}(\mathbb{R})}$

$\boxed{Q_4}$ $\forall x \in \mathbb{R} : |T_f(u)(x)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) u(x-t) dt \right|$

$$\leq \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \|u\|_\infty dt = \|u\|_\infty$$

car $t \mapsto f(t) u(x-t)$ int. $/\mathbb{R}$

d'où : $\boxed{\|T_f(u)\|_\infty \leq \|u\|_\infty}$

Q5 On utilise la commutativité de Q1 et l'associativité admise à Q3 : $T_f T_g(u) = f*(g*u) = (f*g)*u = (g*f)*u$

$= g*(f*u) = T_g T_f(u)$

d'où : $\boxed{T_f T_g = T_g T_f}$

Q6 $\|T_{f_1}T_{f_2}(u) - T_{g_1}T_{g_2}(u)\|$ =

$= \|T_{f_1}T_{f_2}(u) - T_{f_1}T_{g_2}(u) + T_{g_2}T_{f_1}(u) - T_{g_1}T_{g_2}(u)\|_\infty$

$\leq \|T_{f_1}(T_{f_2}(u) - T_{g_2}(u))\|_\infty + \|T_{g_2}(T_{f_1}(u) - T_{g_1}(u))\|_\infty$

$\leq \|T_{f_2}(u) - T_{g_2}(u)\|_\infty + \|T_{f_1}(u) - T_{g_1}(u)\|$ avec Q4

d'où : $\boxed{\|T_{f_1}T_{f_2}(u) - T_{f_2}T_{f_1}(u)\|_\infty \leq \|T_{f_1}(u) - T_{g_1}(u)\|_\infty + \|T_{f_2}(u) - T_{g_2}(u)\|_\infty}$

Q7 Récurrence/n : $n=1$ oui ! (il y a égalité)

si c'est vrai pour n,

$\|(T_f)^{n+1}(u) - (T_g)^{n+1}(v)\|_\infty = \|T_f\cdot(T_f)^n(u) - T_g(T_g)^n(u)\|_\infty$

$\leq \|T_f(u) - T_g(u)\|_\infty + n\|T_f(u) - T_g(u)\|_\infty \leq (n+1)\|T_f(u) - T_g(u)\|_\infty$

↑ Q6 ↳ hyp. de réc.

d'où $\boxed{\|(T_g)^n(u) - (T_g)^n(u)\|_\infty \leq n \|T_g(u) - T_g(u)\|_\infty}$ 7

$\boxed{Q_8}$ * g_h est continue / TG, positive, bornée / $\frac{1}{h\sqrt{2\pi}}$ sur $\mathbb{R}$

$$\forall A > 0, \int_{-A}^{A} g_h(x)\,dx = \int_{-A/h}^{A/h} \frac{1}{\cancel{h}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \cancel{h}\,dy \quad \left(\text{cdV } y = \frac{x}{h}\right)$$

$$\xrightarrow[A \to +\infty]{} \int_{-\infty}^{+\infty} g_1 = 1 \quad \text{d'où}_1 \quad \boxed{g_h \in \mathcal{P}(\mathbb{R})}$$

* $\forall A > 0 \quad \int_{-A}^{A} x g_h(x)\,dx = 0$ par imparité

d'autre part $x g_h(x) \underset{\pm\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^3}\right)$ par c.c., donc $x \mapsto x g_h(x)$

est int. / $\mathbb{R}$ d'où$_2$: $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} x g_h(x)\,dx = 0}$

* $\forall A < 0 < B \quad \int_A^B x^2 g_h(x)\,dx \overset{ipp}{=} \left[x\left(\frac{-h}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2h^2}\right)\right]_A^B + \frac{h}{\sqrt{2\pi}} \int_A^B e^{\frac{-x^2}{2h^2}}\,dx$

ou règle des 2/3 (depuis 2014)

$$\xrightarrow[\substack{A \to -\infty \\ B \to +\infty}]{} 0 - 0 + h^2 \int_{-\infty}^{+\infty} g_h = h^2 \quad \text{c.c.}$$

d'où$_3$: $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 g_h(x)\,dx = h^2}$

Q9 Par récurrence $\underbrace{g_h * g_h * \cdots * g_h}_{p \text{ fois}} = g_{\sqrt{p}h}$ (vrai pour $p=1$ et $\underbrace{g_h * \cdots * g_h}_{p+1 \text{ fois}} = g_{\sqrt{p}h} * g_h = g_{\sqrt{ph^2+h^2}} = g_{\sqrt{p+1}h}$)

d'où $\forall u \in C_0(\mathbb{R})$

$$\left(T_{g_{\frac{h}{\sqrt{n}}}}\right)^n (u) = T_{g_{\frac{h}{\sqrt{n}}}} \circ \cdots \circ T_{g_{\frac{h}{\sqrt{n}}}} (u) = \underbrace{g_{\frac{h}{\sqrt{n}}} * \cdots * g_{\frac{h}{\sqrt{n}}}}_{n \text{ fois}} * u = T_{\left(g_{\frac{h}{\sqrt{n}}}\right)^{*n}}(u)$$

$$= g_{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}}h} * u = T_{g_h}(u)$$

d'où $\boxed{T_{g_h} = \left(T_{g_{\frac{h}{\sqrt{n}}}}\right)^n = T_{\left(g_{\frac{h}{\sqrt{n}}}\right)^{*n}}}$

Q10 $P_{0,h}(x) = \frac{1}{h\sqrt{2\pi}}$ et $P_{1,h}(x) = \frac{-x}{h^3\sqrt{2\pi}}$, montrons par récurrence $\forall k \in \mathbb{N}, \exists P_{k,h} \in \mathbb{R}[X]$, de degré k : c'est vrai pour $k=0$, si c'est vrai pour k, $g_h^{(k+1)}(x) = \frac{d}{dx}\left(P_{k,h}(x)\, e^{-x^2/2h^2}\right)$

$$= \left(P'_{k,h}(x) - \frac{x}{h^2} P_{k,h}(x)\right) e^{-x^2/2h^2}$$

posons $P_{k+1,h}(x) = \underbrace{P'_{k,h}(x)}_{k-1} - \underbrace{\frac{x}{h^2} P_{k,h}(x)}_{k+1}$: polynôme et $d°$: donc $d° = k+1$

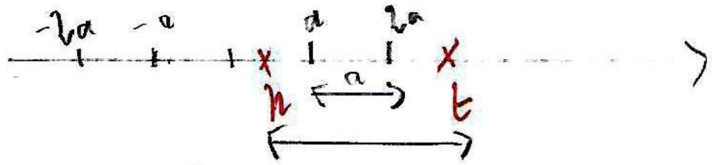
d° : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \exists P_{k,h} \text{ poly. de } d^\circ k \mid g^{(k)}(x) = P_{k,h}(x)\, e^{-x^2/2h^2}}$ 9

Q11 Soit $\varphi(y) = P_{k,h}(y)\, e^{-y^2/4h^2}$ φ est $C^0/\mathbb{R}$ (TG) et

$\lim_{\pm\infty} \varphi(y) = 0$, donc $\varphi \in C_0(\mathbb{R})$ donc $\underset{(Q_0)}{\exists} M_{k,h} \in \mathbb{R} \mid$

$\forall y \in \mathbb{R}$ $|\varphi(y)| \leq M_{k,h}$

d'où $\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}$: $\left|P_{k,h}(x-t)\, e^{-\frac{(x-t)^2}{2h^2}}\right| \leq M_{k,h}\, e^{-\frac{(x-t)^2}{4h^2}}$



si $t \geq 2a$ et $x \in [-a,a]$, $|x-t| = d(x,t) \geq d(a,t) = |a-t|$

Si $t \leq -2a$, $|x-t| = |-x-\overbrace{(-t)}^{\geq 2a}| \geq |a+t| = |a-|t||$

donc $\underline{e^{-(x-t)^2/4h^2} \leq e^{-(a-|t|)^2/4h^2}}$

si $|t| \leq 2a$ et $x \in [-a,a]$, $(x,t) \in \overbrace{[-a,a]\times[-2a,2a]}^{K}$: compact

de $\mathbb{R}^2$, donc $\psi : K \to \mathbb{R}, (x,t) \mapsto M_{k,h}\, e^{-(x-t)^2/4h^2}$ est

bornée (th des bornes atteintes) :

$\exists M'_{k,h} \in \mathbb{R} \mid \forall |t| \leq 2a, \forall x \in [-a,a]$; $M_{k,h}\, e^{-\frac{(x-t)^2}{4h^2}} \leq M'_{k,h}$

Posons $\boxed{\phi_k(t) = \begin{cases} M'_{k,h} & \text{si } |t| \leq 2a \\ M_{k,h}\, e^{-(a-|t|)^2/4h^2} & \text{si } |t| > 2a \end{cases}}$

Par TG, ϕ est C^0/morceaux sur $\mathbb{R}$ et $\phi_h(t) \underset{\pm\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ par c.c.

d° $\boxed{\phi_h \ C^0/\text{mcx et intégrable sur } \mathbb{R}}$

$\boxed{Q_{12}}$ Posons $f(x,t) = u(t)\,g_h(x-t)$ (rappel $g_h * u = u * g_h$)

→ $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x,\cdot)$ est C^0 et int$/_{\mathbb{R}}$ (Q_1)

→ $\forall t \in \mathbb{R}$ $f(\cdot,t)$ est $C^\infty/_{\mathbb{R}}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) = u(t)\,P_{k,h}(x-t)\,e^{-\frac{(x-t)^2}{2h^2}}$$

et par TG, $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}$ est C^0 % x et % t, $\forall k \in \mathbb{N}^*$

→ $\forall a>0$ $\forall x \in [-a,a]$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$:

$$\left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leq \underset{\substack{\uparrow \\ u \text{ bornée}/_{\mathbb{R}}}}{\|u\|_\infty}\, \phi_k(t) = \varphi(t) \text{ et } \varphi \text{ int.}/_{\mathbb{R}}$$

d° : $\boxed{T_{g_h}(u) \text{ est } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R}}$

$\boxed{Q_{13}}$ $T_{g_h}(u)$ est C^∞ et (formule de Leibniz) :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}\quad \left(T_{g_h}(u)\right)^{(k)}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\,P_{k,h}(x-t)\,e^{-\frac{(x-t)^2}{2h^2}}\,dt$$

si on pose $v(t) = P_{k,h}(t)\, e^{-t^2/2h^2}$, v est $C^0/\mathbb{R}$ et intégrable$/\mathbb{R}$ et $\left(T_{g_h}(u)\right)^{(k)}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(t)\, u(x-t)\, dt$

on fait comme à Q_2 : $f_n(t) = v(t)\, u(x_n - t)$, (f_n) cs vers 0 sur $\mathbb{R}$, f_n et 0 $C^0/\mathbb{R}$ et $\forall n, \forall t \in \mathbb{R}$:

$|f_n(t)| \leq |v(t)|$ et $t \longmapsto |v(t)|$ int $/\mathbb{R}$

cqs $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(T_{g_h}(u)\right)^{(k)}(x) = 0$ d'où : $\boxed{T_{g_h}(u) \in C_0^\infty(\mathbb{R})}$

$\boxed{Q14}$ $\forall t \geq \alpha > 0$, $t^2 \geq \alpha t$ donc $e^{-t^2/2h^2} \leq \underbrace{e^{-\alpha t/2h^2}}_{\text{int}/\mathbb{R}^+}$ d'où

$$0 \leq \int_\alpha^{+\infty} g_h(t)\,dt \leq \frac{1}{h\sqrt{2\pi}} \int_\alpha^{+\infty} e^{-\alpha t/2h^2}\,dt = \frac{1}{h\sqrt{2\pi}} \times \frac{2h^2}{\alpha}$$

$\xrightarrow[h \to 0^+]{} 0$

Par th. d'encadrement, $\lim\limits_{h \to 0^+} \int_\alpha^{+\infty} g_h(t)\,dt = 0$, comme g_h est paire, on a $\int_\alpha^{+\infty} g_h = \int_{-\infty}^{-\alpha} g_h$ d'où

d'où : $\boxed{\lim\limits_{h \to 0^+} \int_\alpha^{+\infty} g_h = \lim\limits_{h \to 0^+} \int_{-\infty}^{-\alpha} g_h = 0}$

$\boxed{Q_{17}}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $\left(T_{g_h}(u) - u\right)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_h(t)\, u(x-t)\, dt - u(x)$

Or $u(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_h(t)\, u(x)\, dt$ car $g_h \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, donc

$$\left(T_g(u) - u\right)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_h(t)\left[u(x-t) - u(x)\right] dt$$

Découpons l'$\int$ selon Q_{14} : $\forall \alpha > 0$

$$\left|\int_{\alpha}^{+\infty} g_h(t)\left[u(x-t) - u(x)\right] dt\right| \leq 2\|u\|_\infty \int_{\alpha}^{+\infty} g_h(t)\, dt$$

$u \in C_0(\mathbb{R})$ $\quad g_h \geqslant 0$

de même $\left|\int_{-\infty}^{-\alpha} \text{———}\right| \leq 2\|u\|_\infty \int_{\alpha}^{+\infty} g_h(t)\, dt$

parité de g_h

Pour le segment $[-\alpha, \alpha]$, l'idée est d'utiliser avec Heine la <u>continuité uniforme de u</u> et $\int_{-\alpha}^{\alpha} g_h \leq \int_{-\infty}^{+\infty} g_h \leq 1$

<u>Soit $\varepsilon > 0$</u>, $\exists \alpha > 0 \mid \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x-y| \leq \alpha \Rightarrow |u(x) - u(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$

$\forall x \in \mathbb{R}$: $\left|\left(T_{g_h}(u) - u\right)(x)\right| \leq 4\|u\|_\infty \int_{\alpha}^{+\infty} g_h + \frac{\varepsilon}{2}$

[car $|x-t-x| = |t| \leq \alpha$ sur $\int_{-\alpha}^{\alpha} \dots$

d'après Q_{14}, $\exists h_0 > 0 \mid \forall h > 0$,

$$|h| \leq h_0 \Rightarrow 4\|u\|_\infty \int_\alpha^{+\infty} g_h \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

d'où $\forall h \in]0, h_0]$: $|(T_{g_h}(u) - u)(x)| \leq \varepsilon$

Comme ceci est vrai $\forall x \in \mathbb{R}$, on en déduit :

$$\|T_{g_h}(u) - u\|_\infty \leq \varepsilon$$

Avec les 4 ~~~, on conclut : cl° : $\boxed{\lim_{h \to 0^+} \|T_{g_h}(u) - u\|_\infty = 0}$

$\boxed{Q_{16}}$ a) $\forall u \in C_0(\mathbb{R})$, $T_{g_h}(u) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ c'est la Q_{13}, donc

$$T_{g_n}(u) = T_{g_n}(u - T_{g_h}(u)) + T_{g_n} T_{g_h}(u)$$

$$T_g(u) = T_g(u - T_{g_h}(u)) + T_g T_{g_h}(u) \quad \text{d'où}$$

$$\|T_{g_n}(u) - T_g(u)\| = \|(T_{g_n} - T_g)(u - v_h) + T_{g_n}(v_h) - T_g(v_h)\|$$

$$\leq \|u - v_h\|_\infty + \|T_{g_n}(v_h) - T_g(v_h)\| \quad \text{avec } v_h = T_{g_h}(u)$$

c Q_4

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists h_0 > 0 \mid \|u - v_{h_0}\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2}$ c'est la Q_{15}

pour ce h_0, $v_{h_0} \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ donc $\exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq N$

$$\| T_{f_n}(v_{h_0}) - T_f(v_{h_0}) \|_\infty \leq \varepsilon/2$$

d'où $\left| \begin{array}{l} \underbrace{\| T_{f_n}(u) - T_f(u) \|_\infty \leq \varepsilon} \\ \underbrace{\forall n \geq N} \end{array} \right.$

les 5 ~~ donne : cl° $\boxed{(f_n) \text{ cvg faiblement vers } f}$

Q16 b) : voir page 17

Q17 * Comme u est C^∞ sur $\mathbb{R}$, on peut appliquer T. Y. en x :

$u(x-t) = u(x) - t\,u'(x) + \frac{t^2}{2} u''(x) + o(t^2)$ d'où

$$\frac{u(x-t) - u(x) + t\,u'(x)}{t^2} = \frac{1}{2} u''(x) + o(1) \xrightarrow[t \to 0]{} \frac{u''(x)}{2}$$

cl₁ $\boxed{\text{La fonction admet un PPC en } 0}$

* $\frac{u(x-t) - u(x) + t\,u'(x)}{t^2} f_n^\#(t) = n\left(u(x-t) - u(x) + t\,u'(x)\right) f_n(t)$

Comme $f_n \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, cdv + $\int_{\mathbb{R}} t f(t)\,dt = 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(x-t) - u(x) + t\,u'(x)}{t^2} f_n^\#(t)\,dt = n\left(T_{f_n}(u)(x) - u(x)\right) + 0$$

Comme $f_n^\# \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, $\int_{-\infty}^{+\infty} u''(x) f_n^\#(t)\,dt = u(x)$,

cl° : $\boxed{n\left(T_{f_n}(u)(x) - u(x)\right) - \frac{1}{2} u''(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{u(x-t) - u(x) + t\,u'(x)}{t^2} - \frac{1}{2} u''(x) \right) f_n^\#(t)\,dt}$

$\boxed{Q_{18}}$ Utilisons I.T.L :

$$\left| u(x-t) - u(x) + t u'(x) - \frac{1}{2} t^2 u''(x) \right| \leq \frac{|t|^3}{3!} \sup_{y \in [x, x-t]} |u'''(y)|$$

$\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}$

$$\leq \frac{\|u'''\|_\infty}{6} |t|^3$$

car $u \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.

donc $\forall t \in \mathbb{R}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\underbrace{\left| \frac{u(x-t) - u(x) + t u'(x)}{t^2} - \frac{1}{2} u''(x) \right|}_{g(x,t)} \leq \frac{\|u'''\|_\infty}{6} |t|$$

$$\forall \alpha > 0 \quad \int_{-\alpha}^{\alpha} |g(x,t)| \rho_n^\#(t)\, dt \leq \frac{\|u'''\|_\infty}{6} \alpha \underbrace{\int_{-\alpha}^{\alpha} \rho_n^\#}_{\leq 1}$$

$$\leq \frac{\|u'''\|_\infty}{6} \alpha \quad (\rho_n^\# \in \mathcal{S}(\mathbb{R}))$$

d'autre part $$\int_{\alpha}^{+\infty} |g(x,t)| \rho_n^\#(t)\, dt \leq \int_{\alpha}^{+\infty} \left[\frac{\|u\| + \|u\|}{\alpha^2} + \frac{\|u'\|}{\alpha} + \frac{\|u''\|}{2} \right] \times \rho_n^\#(t)\, dt$$

Or $$\int_{\alpha}^{+\infty} \rho_n^\#(t)\, dt = \int_{\alpha}^{+\infty} n t^2 \sqrt{n} \rho(\sqrt{n} t)\, dt = \int_{\sqrt{n}\alpha}^{+\infty} v^2 \rho(v)\, dv$$

CdV C^1-bij : $v = \sqrt{n}\, t$

$\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

<u>Soit $\varepsilon > 0$</u>, $\exists \alpha > 0 \mid \frac{\|u''\|_\infty}{\sigma} \alpha \leq \frac{\varepsilon}{3}$

Pour ce $\alpha > 0$, $\exists N_1 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq N_1 \left(\frac{2\|u\|}{\alpha^2} + \frac{\|u'\|}{\alpha} + \frac{\|u''\|}{2}\right) \int_\alpha^{+\infty} \rho_n^\#(t)\,dt$

de m̂ $\exists N_2 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq N_2$ $\leq \varepsilon/3$

$$\left| \int_{-\infty}^{-\alpha} g(n,t) \rho_n^\#(t)\,dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

d'où $\begin{vmatrix} \forall n \geq \max(N_1, N_2) \\ \forall h \in \mathbb{R} \end{vmatrix} \left| \left[n\left(T_{\rho_n}(u) - u\right) - \frac{1}{2}u''\right](h) \right| \leq \frac{\varepsilon}{3} \times 3 \leq \varepsilon$

d'où $\boxed{\lim \left\| n\left(T_{\rho_n}(u) - u\right) - \frac{1}{2}u''\right\|_\infty = 0}$

$\boxed{Q_{15}}$ $\|T_{\rho}^{\,n}(u) - T_{g_1}(u)\|_\infty = \|T_{\rho}^{\,n}(u) - T_{g_{1/\sqrt{n}}}^{\,n}(u)\|$ (avec Q_9)

$\leq n \|T_{\rho_n}(u) - T_{g_{\frac{1}{\sqrt{n}}}}(u)\|_\infty$ (avec Q_7)

Or $n\left(T_{\rho_n}(u) - T_{g_{\frac{1}{\sqrt{n}}}}(u)\right) = n\left(T_{\rho_n}(u) - u\right) - \frac{1}{2}u'' - \left[n\left(T_{g_{1/\sqrt{n}}}(u) - u\right) - \frac{1}{2}u''\right]$

$\xrightarrow[n\to\infty]{TG} 0 - 0$ pour $\|\ \|_\infty$, c'est la Q_{14}

appliquée à ρ et à g_1 <u>on conclut avec Q_{16}.</u>

$\boxed{Q_{16}}$ b) $\displaystyle\int_a^b |t f(t)|\,dt \quad \forall a<b$

$\forall a<b$

$$= \int_a^b t\sqrt{f(t)}\sqrt{f(t)}\,dt \quad \text{car } f \geq 0$$

$$\leq \sqrt{\int_a^b t^2 f(t)\,dt}\sqrt{\int_a^b f(t)\,dt} \quad \text{(Cauchy-Schwarz)}$$

$$\leq \sqrt{\int_{\mathbb{R}} t^2 f(t)\,dt}\sqrt{\int_{\mathbb{R}} f(t)\,dt}$$

$$\leq 1 \times 1 = 1$$

d'où $\boxed{t \longmapsto t f(t) \text{ intégrable } / \mathbb{R}}$