# SPE MP ······ 2025-2026

# PROGRAMME DE COLLE 16

## I. Fonctions intégrables : EXERCICES

**...et toujours convergence dominée en vue des suites et séries de fonctions**

Intégrabilité, calcul, théorème de convergence dominée version **suite** et version **série**.

## II. Intégrales dépendant d'un paramètre : $F(x) = \int_I f(x,t)dt$ : COURS & EXERCICES

Théorème de **continuité** • de F ($I$ intervalle quelconque et $x \in A \subset \mathbb{R}^n$ )
(démonstration à l'aide du critère séquentiel et de la convergence dominée)

Théorèmes de **dérivabilité** $C^1$ • ( $I$ intervalle quelconque et $x \in A \subset \mathbb{R}$ ) - formule de Leibniz
(démonstration à l'aide de l'inégalité des accroissement finis de $[a,b]$ dans $\mathbb{C}$ ).

Théorèmes de **dérivabilité** $C^k$ • ( $I$ intervalle quelconque et $x \in A \subset \mathbb{R}$ )
(démonstration par récurrence)

**Tout sur la fonction GAMMA** • : $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ : $\Gamma$ est définie, continue et de classe $C^\infty$ sur $]0,+\infty[$ et on peut dériver sous le signe intégrale. Variations, convexité , $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, $\Gamma(n) = (n-1)!$, équivalent en 0, limite de $\Gamma(x)$ et $\dfrac{\Gamma(x)}{x}$ en $+\infty$ et le tracé de $\Gamma$.
Tout cela a été démontré et doit être su.

Annexe Fubini (HPTS)* •* : Si $f$ est continue sur $[a,b] \times [c,d] \longmapsto \mathbb{C}$ alors

$$\int_{[a,b]} \left( \int_{[c,d]} f(x,y)\, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_{[c,d]} \left( \int_{[a,b]} f(x,y)\, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

(démonstration à partir du théorème de dérivabilité,

**Prévisions** : Suites et Séries de fonctions