SPE MP ······ 2025-2026

PROGRAMME DE COLLE 17

SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS : COURS & EXERCICES

• Notion de convergence simple, uniforme pour les suites de fonctions de $I \subset E$ dans F avec E et F deux $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ espaces vectoriels de dimension finie.

• Notion de norme uniforme (notée $\|f\|_{\infty,I}$).

• $\boxed{\bullet}$ Notion de convergence simple, convergence uniforme, convergence absolue, convergence normale pour les séries. Lien entre ces convergences.

• $\boxed{\bullet}$ 3 Théorèmes fondamentaux (version **suite** et version **série** qui se déduit de la version suite) de continuité, d'intégration (sur un segment) et de dérivation (et son extension pour les fonctions de classe C^k ou C^∞).

• $\boxed{\bullet}$ Théorème de la double limite : Si une suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur un ensemble A vers une fonction g et si pour tout n, f_n admet une limite finie b_n en $a \in \overline{A}$ (éventuellement $a = +\infty$) alors

la suite (b_n) converge vers une limite finie ℓ et g converge en a vers ℓ.

et sa version série : $\displaystyle\lim_{x \to a} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \to a} u_n(x)$.

• $\boxed{\bullet}$ Tout sur la fonction ζ définie par $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ (fait en classe : notamment la C^∞-tude, les limites aux bords ainsi que l'équivalent en 1^+).

• Révision des théorèmes de convergence dominée et d'intégration terme à terme sur un intervalle quelconque.

• Convergence en moyenne, en moyenne quadratique, lien avec la convergence uniforme.Norme N_1 sur $\mathcal{L}_c^1(I, \mathbb{K})$: $N_1(f) = \displaystyle\int_I |f|$. Produit scalaire et norme N_2 sur $\mathcal{L}_c^2(I, \mathbb{R})$: $(f|g) = \displaystyle\int_I fg$. $N_2(f) = \sqrt{\displaystyle\int_I f^2}$.

Approximation uniforme :

• Définition

• Théorème d'approximation uniforme 1 : Toute fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ à valeurs dans un ev de dimension finie est approximable par des fonctions en escalier. (démo. fait en classe)

• $\boxed{\bullet}^*$ Théorème d'approximation uniforme 2 : Théorème de Stone-Weierstrass pour les fonctions continues sur un segment à valeurs dans $\mathbb{C}$ (démo. : faites avec les polynômes de Bernstein et les probabilités (notamment l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev)).

Prévisions : Séries entières