SPE MP ······ 2025-2026

PROGRAMME DE COLLE 18 : COLLE DEUX EN UN

1. COURS : SÉRIES ENTIÈRES (TOUT sauf les probabilités)

- Lemme d'Abel, rayon de convergence, disque de convergence d'une série entière $(\sum a_n z^n)$.
- Si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$, alors $R_a = \dfrac{1}{|\ell|}$ (avec $\dfrac{1}{0} = +\infty$)

Si $a_n \underset{+\infty}{=} O(b_n)$ alors $R_a \geqslant R_b$ et si $a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n$ alors $R_a = R_b$.

Somme, produit de Cauchy de 2 séries entières, minorations des rayons de convergence.

Convergence normale sur tout disque fermé $D_F(0,r)$ avec $0 < r < R$ de $(\sum a_n z^n)$ (de rayon R)

Série entière de la variable complexe : disque (ouvert) de convergence, théorème de régularité :

$$f \text{ définie par } f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \text{ est } \boxed{C^0} \text{ sur } D_O(0,R).$$

Série entière de la variable réelle : intervalle (ouvert) de convergence, théorème de régularité :

$$f \text{ définie par } f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ est } \boxed{C^\infty} \text{ sur }]-R,R[$$

et on peut dériver terme à terme ; savoir l'expression de la dérivée :

$$f^{(p)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\cdots(n+p)a_{n+p}x^n$$

et on peut $\boxed{\text{intégrer terme à terme}}$ sur un segment de $]-R,R[$.

En $\pm R$: **Théorème radial** :

$$\text{Si } \left(\sum a_n R^n\right) \text{ converge alors } \lim_{x\to R^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n \text{ (démonstration : hors programme)}$$

.

Développement en série entière d'une fonction, condition nécessaire (C^∞), série de Taylor.

- Développement en série entière de $\boxed{e^x, \text{ch}x, \text{sh}x, \cos x, \sin x, \dfrac{1}{1-x}, \dfrac{1}{a-x}, (1+x)^\alpha}$: par la méthode de l'équation différentielle, $\boxed{\ln(1+x), \arctan x}$ (tous à savoir par coeur !!!) et toute fraction rationnelle (connaitre la méthode).
- Exponentielle complexe, relation fondamentale : $\boxed{e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}}$

Utilisation des séries entières pour les équations différentielles : Résolution d'équation différentielle (exemple : $y'' - 2xy' - 2y = 0$).

Calculs des sommes $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P(n)x^n$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(n)}{n!}x^n$ (P polynôme).

Calcul du nombre (de Bell) de partitions $[\![1,n]\!]$.

2.SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS : EXERCICES

Prévisions : Séries entières : fin - Produits scalaires