La correction de l'exercice est au début de la correction du DS8*.

Problème : séries trigonométriques

CCP2017 - MP1
Corrigé (d'après le corrigé de M. Devulder)

Partie 1 : exemples

4. On utilise d'I.T.L. entre 0 et x avec la fonction vectorielle $f : x \longmapsto e^{ix}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ qui est de classe C^∞ par T.G. :

$\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall N \in \mathbb{N}$: $\left|e^{ix} - \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{i^n x^n}{n!}\right| \leqslant \dfrac{|x-0|^{N+1} M_{N+1}}{(N+1)!}$.

Comme $f^k(x) = i^k e^{ix}$, $M_{N+1} = \displaystyle\sup_{t\in[0,x]} |f^{N+1}(x)| = 1$.

On conclut avec les croissances comparées : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} : e^{ix} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n x^n}{n!}.}$

5. On a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \left|\frac{1}{2^n}\cos(nx) + \frac{1}{3^n}\sin(nx)\right| \leqslant \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}$$

Le majorant est indépendant de x et est le terme général d'une série convergente.

Cl: $\boxed{\text{La série de fonctions est donc normalement convergente sur } \mathbb{R}}$.

Pour le calcul, on remarque que pour $p \geqslant 2$, e^{ix}/p est de module < 1 et que donc (somme géométrique)

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e^{ix}}{p}\right)^n = \frac{1}{1 - \dfrac{e^{ix}}{p}} = \frac{p}{p - e^{ix}}}$$

En passant aux parties réelle et imaginaire, on a donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{p^n} = \frac{p^2 - p\cos(x)}{p^2 - 2p\cos(x) + 1} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{p^n} = \frac{p\sin(x)}{p^2 - 2p\cos(x) + 1}$$

Il reste à combiner les résultats pour $p = 2$ et $p = 3$:

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^n}\cos(nx) + \frac{1}{3^n}\sin(nx)\right) = \frac{4 - 2\cos(x)}{5 - 4\cos(x)} + \frac{3\sin(x)}{10 - 6\cos(x)}}$$

6. En utilisant le DSE de l'exponentielle, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \exp(e^{ix}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{inx}}{n!}$$

Or, $\exp(e^{ix}) = \exp(\cos(x))\exp(i\sin(x))$ et la partie réelle de cette quantité est $\varphi(x)$

Cl: $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \exp(\cos(x))\cos(\sin(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n!}}$

7. Posons $a_n = \dfrac{1}{n+1}$ et $u_n(x) = a_n \cos(nx)$. (a_n) est de limite nulle mais $u_n(0) = \dfrac{1}{n+1}$ est le terme général d'une série divergente.

Cl: $\boxed{(\sum u_n) \text{ n'est donc pas simplement convergente sur } \mathbb{R}}$.

8. La norme infinie sur $\mathbb{R}$ de $u_n : x \longmapsto \dfrac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ est immédiatement égale à $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ (atteinte en $\dfrac{\pi}{2n}$) qui est le terme général d'une série divergente. Donc la série $(\sum \|u_n\|_{\infty,\mathbb{R}})$ diverge.

Cl: $\boxed{\text{La série de fonction proposée n'est donc pas normalement convergente sur } \mathbb{R}}$.

Partie 2 : propriétés

Une condition suffisante

9. Posons $u_n(x) = a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$. On a

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |u_n(x)| = |a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)| \leqslant |a_n| + |b_n| = \alpha_n$$

La série $(\sum \alpha_n)$ est convergente par hypothèse sur $(\sum a_n)$ et $(\sum b_n)$.

Cl: $\boxed{\text{La série de fonctions est donc normalement convergente sur } \mathbb{R}}$.

Une condition nécessaire

10. Première méthode :

La réponse est évidente si $a = b = 0$. Supposons maintenant que $(a, b) \neq (0, 0)$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ a\cos(x) + b\sin(x) = \sqrt{a^2+b^2}\Big(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos(x) + \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin(x)\Big)$

Or il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin(\theta) = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$, on a donc

$\forall x \in \mathbb{R},\ |a\cos(x) + b\sin(x)| = \sqrt{a^2+b^2}|\cos(x)\cos(\theta) + \sin(x)\sin(\theta)|$
$= \sqrt{a^2+b^2}|\cos(x-\theta)| \leqslant \sqrt{a^2+b^2}$ et majoration atteint en $x = \theta$.

Cl: $\boxed{\max_{x\in\mathbb{R}} |a\cos(x) + b\sin(x)| = \sqrt{a^2+b^2}}$

Deuxième méthode : On a $((.|.)$ étant le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^2$)

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |a\cos(x)+b\sin(x)| = |((a,b)|(\cos(x),\sin(x)))| \leqslant \|(a,b)\|\cdot\|(\cos(x),\sin(x))\| = \sqrt{a^2+b^2}$$

De plus, il y a un cas d'égalité :

- c'est immédiat si $a = b = 0$ (n'importe quel x convient) ;
- si $(a,b) \neq (0,0)$, $(a/\sqrt{a^2+b^2}, b/\sqrt{a^2+b^2})$ est un vecteur normé et il existe donc un x tel que ce vecteur soit $(\cos(x),\sin(x))$.

11. Posons $u_n(x) = a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)$. On suppose ici que $\sum(\|u_n\|_{\infty,\mathbb{R}})$ converge (c'est la caractérisation de la convergence normale). On a (avec la question précédente et car nx varie dans $\mathbb{R}$ quand c'est le cas pour x si $n > 0$)

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant |a_n| \leqslant \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \|u_n\|_{\infty,\mathbb{R}}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant |b_n| \leqslant \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \|u_n\|_{\infty,\mathbb{R}}$

Par théorème de comparaison des séries positives, on conclut :

Cl: $\boxed{\sum(a_n) \text{ et } \sum(b_n) \text{ convergent absolument et donc les suites } (a_n) \text{ et } (b_n) \text{ tendent vers } 0}$

Autres propriétés

12. La convergence normale sur $\mathbb{R}$ entraîne la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ et cette dernière conserve la continuité. Les fonctions de la séries étant continues sur $\mathbb{R}$, il en est de même de f.

La convergence normale sur $\mathbb{R}$ entraîne la convergence simple sur $\mathbb{R}$. La convergence simple conserva la 2π-périodicité (si $S_n(x + 2\pi) = S_n(x)$, on peut passer à la limite pour obtenir la 2π-périodicité de la limite). Ici, f est donc 2π-périodique. **Cl:** $\boxed{f \in C_{2\pi}}$

13. On effectue une linéarisation : $\cos^2(nx) = \dfrac{1}{2}(\cos(2nx) + 1)$. On a donc

$$\forall n \geqslant 1,\ \underline{\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx)\,dx} = \left[\frac{1}{4n}\sin(2nx) + \frac{x}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} = \underline{\ \pi\ }$$

De même, $\sin(kx)\cos(nx) = \dfrac{1}{2}(\sin(kx + nx) + \sin(kx - nx))$. $\sin(px)$ est d'intégrale nulle sur $[-\pi, \pi]$ (évident si $p = 0$, par primitivation en $-\dfrac{\cos(px)}{p}$ sinon). On en déduit que

$$\boxed{\forall n, k,\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\cos(nx)\,dx = 0}$$

14. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (a_k\cos(kx)\cos(nx) + b_k\sin(kx)\cos(nx))\,dx$$

Posons encore $u_k(x) = a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)$. On a $\forall x,\ |u_k(x)\cos(nx)| \leqslant |u_k(x)| \leqslant \|u_k\|_{\infty,\mathbb{R}}$. Le majorant est indépendant de x et est le terme général d'une série convergente (par l'hypothèse de normale convergence). On a donc sous l'intégrale une série de fonctions continues normalement convergente sur le SEGMENT $[-\pi, \pi]$ et on est dans le cas où on peut intervertir :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} \left(a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\cos(nx)\,dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\cos(nx))\,dx\right)$$

Dans la somme, tous les termes sont nuls sauf celui d'indice $k = n$ qui vaut $a_n\pi$ si $n \neq 0$ (question précédente et résultat admis) et $2\pi a_0$ si $n = 0$. Ainsi,

$$\textbf{Cl:}\quad \boxed{\forall n \neq 0,\ a_n = \alpha_n(f) \ \text{ et } \ a_0 = \frac{1}{2}\alpha_0(f)}$$

15. Il s'agit d'utiliser la question précédente avec $a_0 = \alpha_0(f)/2$, $b_0 = 0$ et pour $n \geqslant 1$, $a_n = \alpha_n(f)$ et $b_n = \beta_n(f)$. La somme est ici égale à g et on obtient donc

Cl: $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_n(f) = \alpha_n(g) \ \text{ et } \ \beta_n(f) = \beta_n(g)}$

16. $h \mapsto \alpha_n(h)$ et $h \mapsto \beta_n(h)$ étant linéaire, on a ici $\alpha_n(g-f) = \beta_n(g-f) = 0$ et, avec le résultat admis $g - f = 0$.

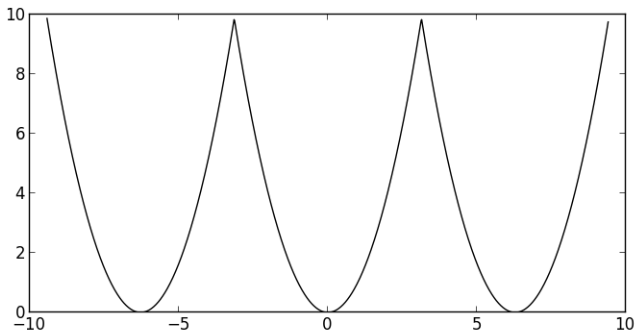
Cl: $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = g(x)}$

17. Si f est paire, $x \mapsto f(x)\sin(nx)$ est impaire et sa fonction est donc d'intégrale nulle sur un intervalle centré sur 0 (ce que l'on voit par le changement de variable affine $t = -x$). En particulier, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \beta_n(f) = 0}$

$x \mapsto f(x)\cos(nx)$ est paire et $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos(nx)\,dx}$

18. Utilisons un petit script Python. Pour calculer $f(x)$, on cherche un entier k tel que $x - 2k\pi = y \in [-\pi, \pi]$ et on renvoie y^2.

```
from numpy import *
from matplotlib import pyplot as plt
def f(x):
    k=floor((x+pi)/(2*pi))
    return (x-2*k*pi)**2
a,b=-3*pi,3*pi
pas=(b-a)/1000
lx=[a+k*pas for k in range(1000)]
ly=[f(x) for x in lx]
plt.plot(lx,ly,'k')
plt.axis('scaled')
plt.show()
```



La fonction f étant paire, les coeffcients $\beta_n(f)$ sont tous nuls. De plus

$$\alpha_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\cos(nx)\,dx$$

Une double intégration par parties donne, pour $n \neq 0$,

$$\int_0^\pi x^2 \cos(nx)\, dx = -\frac{2}{n}\int_0^\pi x \sin(nx)\, dx = -\frac{2}{n}\left(\left[-\frac{x\cos(nx)}{n}\right]_0^\pi + \frac{1}{n}\int_0^\pi \cos(nx)\, dx\right)$$

et ainsi

$$\boxed{\forall n \neq 0,\ \alpha_n(f) = \frac{4(-1)^n}{n^2}}$$

On a aussi : $$\boxed{\alpha_0(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\, dx = \frac{2}{3}\pi^2}$$

Comme $\sum(\alpha_n(f))$ et $\sum(\beta_n(f))$ convergent absolument, on peut utiliser ce qui précède et conclure

Cl: $$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx)}$$

la série étant normalement convergente sur $\mathbb{R}$.

19. Pour $x = 0$, on obtient

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}}$$

Pour $x = \pi$, on obtient

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

On découpe la somme en isolant les termes d'indice pair et ceux d'indice impair (c'est licite car la série est absolument convergente et donc les trois séries en présence convergent) :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$$

On en déduit que

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}}$$

20. $x \longmapsto \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ est continue sur $]0,1]$ par théorèmes généraux.

En 0, la fonction est équivalente à $\dfrac{x}{x} = 1$ et est donc prolongeable par continuité. Notre fonction est donc intégrable sur $[0,1]$.Utilisons le DSE de $x \longmapsto \ln(1+x)$:

$$\forall x \in]0,1[,\ \frac{\ln(1+x)}{x} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{n}$$

On en déduit que

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{n}\,dx$$

On veut intervertir somme et intégrale. Utilisons le théorème d'intégration terme à terme.

- $g_n\ :\ x \longmapsto (-1)^{n-1}\dfrac{x^{n-1}}{n}$ est le terme général d'une série de fonctions continue qui converge simplement sur $]0,1[$ vers $g : x \longmapsto \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.
- g_n et g sont continues sur $]0,1[$.
- g_n est intégrable sur $]0,1[$ et $\displaystyle\int_0^1 |g_n(x)|\,dx = \frac{1}{n^2}$ est le terme générale d'une série convergente.

L'interversion est licite et donne

$$\boxed{\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 (-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{n}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}}$$

21. Dans l'exemple de la question 18, on a obtenu une série normalement convergente sur $\mathbb{R}$. Cependant la somme f n'est pas dérivable. En effet, f est dérivable à droite et gauche en π avec des nombres dérivés 2π (à gauche) et -2π (à droite).
Supposons que $(\sum na_n)$ et $(\sum nb_n)$ sont des séries absolument convergente. Montrons qu'alors en posant $u_n(x) = a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)$, $(\sum u_n)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On utilise pour cela le théorème de dérivation des séries de fonctions :

- $\forall n,\ u_n \in C^1(\mathbb{R})$ et $u_n'(x) = -na_n\sin(nx) + nb_n\cos(nx)$.
- $(\sum u_n)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.
- $\|u_n'\|_\infty \leqslant |na_n| + |nb_n|$ est le terme général d'une série convergente et $(\sum u_n')$ est donc normalement convergente sur $\mathbb{R}$.

Le théorème s'applique donc et indique non seulement que la somme est de classe C^1 mais aussi que sa dérivée est la somme de la série dérivée.

22. On a vu en question 5 que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{3^n} = \frac{3\sin(x)}{10-6\cos(x)}$$

On est dans le cadre de la condition précédente avec $a_n = 0$ et $b_n = 1/3^n$. On en déduit (en dérivant) que

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n\cos(nx)}{3^n} = \frac{3}{2}\frac{5\cos(x)-3}{(5-3\cos(x))^2}}$$

Concours Commun Mines-Ponts 2024

Épreuve de mathématiques I, MP & MPI, trois heures

(d'aprè le corrigé de M. Winckler (UPS))

Remarque. L'énoncé ne précise pas ce qu'est p. Nous supposons dans tout ce corrigé que c'est un entier (pour que $(\cos(t))^{2p+1}$ soit bien défini y compris lorsque le cosinus est strictement négatif), et plus précisément un entier naturel pour que $t \mapsto \dfrac{1-(\cos(t))^{2p+1}}{t^2}$ soit continue sur $]0,+\infty[$, de sorte que l'intégrale de Dirichlet généralisée ait bien un sens (on en aura aussi besoin pour appliquer la formule du binôme de Newton à la question 17).

Partie I : Calcul d'une intégrale

1. Dans cette question et la suivante, on notera f_θ la fonction de l'énoncé.
Soit $\theta \in]-\pi,\pi[$. Pour s'assurer que f_θ est bien définie sur $]0,+\infty[$, il suffit de vérifier que le dénominateur $1+te^{i\theta}$ ne s'annule pas pour tout $t \in]0,+\infty[$. Or, si $t>0$, alors l'égalité $te^{i\theta}+1=0$ implique, en isolant 1 et en comparant les modules : $t=1$. Ensuite :
$$e^{i\theta}+1=0 \iff e^{i\theta}=-1 \iff \theta \equiv \pi \bmod 2\pi,$$
ce qui est impossible par hypothèse sur θ. Ainsi $\boxed{f_\theta \text{ est bien définie sur }]0,+\infty[}$.
Justifions son intégrabilité sur $]0,+\infty[$. L'application f_θ est continue sur cet intervalle en tant que quotient de fonctions continues dans le dénominateur ne s'annule pas. On a de plus :
$$\underline{\textbf{En 0}} : |f_\theta(t)| \underset{t\to 0}{\sim} t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}} > 0$$
et la fonction de Riemann $t \mapsto \dfrac{1}{t^{1-x}}$ est d'exposant $1-x<1$ donc intégrable sur $]0,1]$. Par le théorème de comparaison des fonctions intégrables, l'application f_θ est intégrable sur $]0,1]$.
Enfin, comme $e^{i\theta} \neq 0$ on a :
$$\underline{\textbf{En } +\infty} : |f_\theta(t)| \underset{t\to +\infty}{\sim} \tfrac{t^{x-1}}{|te^{i\theta}|} = t^{x-2} = \tfrac{1}{t^{2-x}} > 0,$$
et comme $x \in]0,1[$, on a : $2-x \in]1,2[$, donc en particulier la fonction de Riemann $t \mapsto \dfrac{1}{t^{2-x}}$ est d'exposant $2-x>1$ donc intégrable sur $[1,+\infty[$. Par le théorème de comparaison des fonctions intégrables, $\boxed{\text{l'application } f_\theta \text{ est intégrable sur } [1,+\infty[}$.
Étant intégrable sur $]0,1]$ et $[1,+\infty[$, l'application f_θ est intégrable sur $]0,+\infty[$: d'où le résultat.
2. Nous allons utiliser le théorème de dérivation des intégrales à paramètres. Posons :
$$\forall (t,\theta) \in]0,+\infty[\times]-\pi,\pi[, \quad k(t,\theta)=f_\theta(t).$$
Alors :
   — pour tout $t \in]0,+\infty[$, l'application $\theta \mapsto k(t,\theta)$ est de classe C^1 sur $]-\pi,\pi[$ et on a :
$$\forall t \in]0,+\infty[,\ \forall \theta \in]-\pi,\pi[, \quad \frac{\partial k}{\partial \theta}(t,\theta) = t^{x-1} \times \left(-\frac{ite^{i\theta}}{(1+te^{i\theta})^2}\right) = -ie^{i\theta}\frac{t^x}{(1+te^{i\theta})^2}\,;$$
   — pour tout $\theta \in]-\pi,\pi[$, l'application $t \mapsto k(t,\theta)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ par la question précédente;

— pour tout $\theta \in]-\pi,\pi[$, l'application $t \mapsto \dfrac{\partial k}{\partial \theta}(t,\theta)$ est continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$ par un argument semblable à celui de la question précédente ;

— pour tout $\beta \in]0,\pi[$, et tout $(t,\theta) \in]0,+\infty[\times [-\beta,\beta]$ on a :

$$\left|1+te^{i\theta}\right|^2 = |1|^2 + 2\mathrm{Re}\left(te^{i\theta}\right) + \left|te^{i\theta}\right|^2 = 1+2t\cos(\theta)+t^2, \tag{1}$$

et la parité du cosinus, ainsi que sa décroissance sur $[0,\beta]$, permettent d'écrire :

$$\left|1+te^{i\theta}\right|^2 \geqslant 1+2t\cos(\beta)+t^2 = \left|1+te^{i\beta}\right|^2 \ ;$$

on en déduit, toujours pour tout $(t,\theta) \in]0,+\infty[\times [-\beta,\beta]$:

$$\left|\frac{\partial k}{\partial \theta}(t,\theta)\right| = \frac{t^x}{|1+te^{i\theta}|^2} \leqslant \frac{t^x}{|1+te^{i\beta}|^2}. \qquad \text{(HYPOTHÈSE DE DOMINATION)}$$

Justifions que l'application $\varphi : t \mapsto \dfrac{t^x}{|1+te^{i\beta}|^2}$, qui est effectivement définie et continue sur $]0,+\infty[$ par les mêmes arguments que dans la question précédente (vu que $\beta \notin \{-\pi,\pi\}$), est intégrable sur cet intervalle. Elle est positive et on a :

$$\underline{En\ 0}\ : \varphi(t) \underset{t\to 0}{\sim} t^x = \frac{1}{t^{-x}} > 0, \quad \underline{En\ \infty}\ : \ \varphi(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} t^{x-2} = \frac{1}{t^{2-x}} > 0,$$

et comme $x \in]0,1[$ on a : $-x < 0 < 1$, ainsi que : $2-x > 1$. Les conditions d'intégrabilité des fonctions de Riemann au voisinage de 0 et $+\infty$ assurent donc, par comparaison, l'intégrabilité de φ sur $]0,+\infty[$. L'hypothèse de domination est bien vérifiée.

Par le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, d'une part l'application $t \mapsto \dfrac{\partial k}{\partial \theta}(t,\theta)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ pour tout $\theta \in]-\pi,\pi[$, et d'autre part r est de classe C^1 sur $]-\pi,\pi[$. De plus :

$$\boxed{\forall \theta \in]-\pi,\pi[, \quad r'(\theta) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial k}{\partial \theta}(t,\theta)\mathrm{d}t = -ie^{i\theta}\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{(1+te^{i\theta})^2}\mathrm{d}t.}$$

3. Pour tout $\theta \in]-\pi,\pi[$ on a : $g(\theta) = e^{ix\theta}r(\theta)$. Ainsi g est de classe C^1 sur $]-\pi,\pi[$ en tant que produit de fonctions de classe C^1, et on a :

$$\forall \theta \in]-\pi,\pi[, \quad g'(\theta) = ixe^{ix\theta}r(\theta) + e^{ix\theta}r'(\theta) = ie^{ix\theta}\left(xr(\theta) + \frac{1}{i}r'(\theta)\right).$$

Or, pour tout $\theta \in]-\pi,\pi[$, on a par la question précédente :

$$xr(\theta) + \frac{1}{i}r'(\theta) = \int_0^{+\infty}\left(xt^{x-1}\cdot\frac{1}{1+te^{i\theta}} + t^x\cdot\left(-\frac{e^{i\theta}}{(1+te^{i\theta})^2}\right)\right)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} h'(t)\mathrm{d}t,$$

donc : $\boxed{\forall \theta \in]-\pi,\pi[,\ g'(\theta) = ie^{ix\theta}\int_0^{+\infty} h'(t)\mathrm{d}t}$, ce qu'il fallait démontrer.

Le fait que l'intégrale ci-dessus converge (en tant que somme d'intégrales convergentes) assure *a priori* que h admet une limite finie en 0 et $+\infty$. Calculons-les. Comme $x > 0$, on a : $\lim\limits_{t\to 0} t^x = 0$, et de plus : $\lim\limits_{t\to 0}(1+te^{i\theta}) = 1$, donc :

$$\boxed{\lim_{t\to 0} h(t) = 0.}$$

(Remarque : l'énoncé demande de calculer $h(0)$ alors que h a été définie sur $]0,+\infty[$...)
Ensuite, comme $x-1<0$:

$$|h(t)| \underset{t\to+\infty}{\sim} t^{x-1} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc : $\lim\limits_{t\to+\infty} h(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} |h(t)| = 0$. On en déduit :

$$g'(\theta) = ie^{ix\theta}\int_0^{+\infty} h'(t)\mathrm{d}t = ie^{ix\theta}\left[h(t)\right]_0^{+\infty} = 0,$$

donc g est de dérivée nulle sur l'intervalle $]-\pi,\pi[$: on en déduit que $\boxed{\text{c'est une fonction constante}}$, d'où le résultat.

4. Soit $\theta\in]0,\pi[$. Comme g est constante sur $]-\pi,\pi[$, on a : $g(\theta)=g(-\theta)$, donc par la formule d'Euler :

$$g(\theta)\sin(x\theta) = \frac{1}{2i}\left(g(\theta)e^{ix\theta} - g(\theta)e^{-ix\theta}\right) = \frac{1}{2i}\left(g(-\theta)e^{ix\theta} - g(\theta)e^{-ix\theta}\right).$$

Or par définition de g on a :

$$g(-\theta)e^{ix\theta} - g(\theta)e^{-ix\theta} = \int_0^{+\infty}\left(\frac{t^{x-1}}{1+te^{-i\theta}} - \frac{t^{x-1}}{1+te^{i\theta}}\right)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\frac{t^x\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)}{\left|1+te^{i\theta}\right|^2}\mathrm{d}t.$$

Toujours par la formule d'Euler, on a : $e^{i\theta}-e^{-i\theta} = 2i\sin(\theta)$. Par l'identité remarquable (1) démontrée à la question 2, on a donc :

$$g(-\theta)e^{ix\theta} - g(\theta)e^{-ix\theta} = 2i\sin(\theta)\int_0^{+\infty}\frac{t^x}{t^2+2t\cos(\theta)+1}\mathrm{d}t,$$

d'où le résultat :

$$\boxed{g(\theta)\sin(x\theta) = \sin(\theta)\int_0^{+\infty}\frac{t^x}{t^2+2t\cos(\theta)+1}\mathrm{d}t.}$$

5. Soit $\theta\in]0,\pi[$. On a :

$$\forall t\in]0,+\infty[,\quad t^2+2t\cos(\theta)+1 = (t+\cos(\theta))^2+1-(\cos(\theta))^2 = (t+\cos(\theta))^2+(\sin(\theta))^2$$

(expression que l'on pouvait aussi déduire de : $\left|1+te^{i\theta}\right|^2 = \left|e^{-i\theta}+t\right|^2$), et comme $\sin(\theta)\neq 0$ on peut écrire, par la question précédente :

$$g(\theta)\sin(x\theta) = \frac{1}{\sin(\theta)}\int_0^{+\infty}\frac{t^x}{\left(\frac{t+\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right)^2+1}\mathrm{d}t.$$

Faisons alors le changement de variable affine C^1-bijectif $u=\dfrac{t+\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$. Il en résulte le résultat voulu :

$$\boxed{g(\theta)\sin(x\theta) = \frac{1}{\sin(\theta)}\int_{\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}}^{+\infty}\frac{(u\sin(\theta)-\cos(\theta))^x}{u^2+1}\sin(\theta)\mathrm{d}u = \int_{\mathrm{cotan}(\theta)}^{+\infty}\frac{(u\sin(\theta)-\cos(\theta))^x}{1+u^2}\mathrm{d}u.}$$

6. Suivons l'énoncé et utilisons l'extension du théorème de convergence dominée à paramètre continu (**ou bien le critère séquentiel et le théorème de convergence dominée !**). Posons :

$$\forall(\theta,u)\in]0,\pi[\times\mathbf{R},\quad \gamma(u,\theta) = \begin{cases}\frac{(u\sin(\theta)-\cos(\theta))^x}{1+u^2} & \text{si } u\geqslant\mathrm{cotan}(\theta),\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

La distinction de cas est faite pour se ramener à un intervalle fixe, puisqu'on a :

$$g(\theta)\sin(x\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty}\gamma(u,\theta)\mathrm{d}u.$$

Vérifions les hypothèses de l'extension du théorème de convergence dominée à paramètre continu :

— pour tout $\theta \in]0,\pi[$, l'application $u \mapsto \gamma(u,\theta)$ est continue (par morceaux) sur $\mathbf{R}$;

— pour tout $u \in \mathbf{R}$ et pour tout $\theta \in]0,\pi[$ au voisinage de π on a $\operatorname{cotan}(\theta) \leqslant u$ (puisque $\operatorname{cotan}(\theta)$ tend vers $-\infty$ quand θ tend vers π par valeurs inférieures), donc $\gamma(u,\theta) = \dfrac{(u\sin(\theta)-\cos(\theta))^x}{1+u^2}$ pour θ au voisinage de π, ce qui permet de déduire :

$$\forall u \in \mathbf{R}, \quad \lim_{\theta \to \pi^-} \gamma(u,\theta) = \frac{1}{1+u^2},$$

et l'application $u \mapsto \dfrac{1}{1+u^2}$ est continue (par morceaux) sur $\mathbf{R}$;

— montrons l'hypothèse de domination ; si $(\theta,u) \in]0,\pi[\times\mathbf{R}$ vérifie $u \geqslant \operatorname{cotan}(\theta)$, alors :

$$u\sin(\theta) - \cos(\theta) \geqslant \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\sin(\theta) - \cos(\theta) \geqslant 0,$$

donc : $|u\sin(\theta)-\cos(\theta)| = u\sin(\theta)-\cos(\theta)$, puis :

$$|\gamma(u,\theta)| = \frac{(u\sin(\theta)-\cos(\theta))^x}{1+u^2} = \frac{(\sqrt{1+u^2})^x}{1+u^2}\left(\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\sin(\theta) - \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\cos(\theta)\right)^x ;$$

comme : $\left(\dfrac{u}{\sqrt{1+u^2}}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{\sqrt{1+u^2}}\right)^2 = 1$, il existe $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que :

$$\frac{u}{\sqrt{1+u^2}} = \cos(\alpha), \quad \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} = \sin(\alpha),$$

ce qui permet enfin d'écrire :

$$\begin{aligned}|\gamma(u,\theta)| = \frac{1}{(1+u^2)^{1-\frac{x}{2}}}(\cos(\alpha)\sin(\theta)-\sin(\alpha)\cos(\theta))^x &= \frac{1}{(1+u^2)^{1-\frac{x}{2}}}(\sin(\theta-\alpha))^x \\ &\leqslant \frac{1}{(1+u^2)^{1-\frac{x}{2}}}\end{aligned}$$

tandis que si $u \leqslant \operatorname{cotan}(\theta)$ alors $\gamma(u,\theta) = 0$ donc l'inégalité reste trivialement vérifiée ; ainsi :

$$\forall (\theta,u) \in]0,\pi[\times\mathbf{R}, \quad |\gamma(u,\theta)| \leqslant \frac{1}{(1+u^2)^{1-\frac{x}{2}}}. \qquad \text{(HYPOTHÈSE DE DOMINATION)}$$

Justifions que $\varphi : u \mapsto \dfrac{1}{(1+u^2)^{1-\frac{x}{2}}}$ est intégrable sur $\mathbf{R}$: elle est continue sur cet intervalle, et au voisinage de $+\infty$:

$$\varphi(u) \underset{u\to+\infty}{\sim} \frac{1}{u^{2-x}} > 0.$$

Comme $x \in]0,1($, on a : $2-x > 1$, donc la fonction de Riemann $u \mapsto \dfrac{1}{u^{2-x}}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$. Par comparaison, il en est de même de φ, et par parité φ est intégrable au voisinage de $-\infty$ également, donc sur $\mathbf{R}$ tout entier : l'hypothèse de domination est vérifiée.
Par le théorème de convergence dominée à paramètre continu, on a :

$$\boxed{\lim_{\theta\to\pi^-} g(\theta)\sin(x\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{\theta\to\pi^-}\gamma(u,\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2},}$$

d'où le résultat.

Remarque. L'inégalité décisive $|u\sin(\theta)-\cos(\theta)| \leqslant \sqrt{1+u^2}$ peut s'obtenir plus rapidement en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz au produit scalaire usuel de $\mathbf{R}^2$, avec les vecteurs $(u,-1)$ et $(\sin(\theta),\cos(\theta))$.

7. Une primitive de $u \mapsto \dfrac{1}{1+u^2}$ étant l'arc tangente, la question précédente implique :

$$\lim_{\theta\to\pi^-} g(\theta)\sin(x\theta) = [\arctan(u)]_{-\infty}^{+\infty} = \pi.$$

Mais on a aussi, comme le sinus est continu sur $\mathbf{R}$ et la fonction g constante sur $]-\pi,\pi[$ par la question 3 :

$$\lim_{\theta\to\pi^-} g(\theta)\sin(x\theta) = g(0)\sin(x\pi) = \sin(x\pi)\int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{1+t}\mathrm{d}t.$$

Par unicité de la limite, on conclut :

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{1+t}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}.}$$

Notons que $\pi x \in]0,\pi[$, donc le sinus est bien non nul.

Partie II : Une expression (utile) de la fonction sinus

8. Par la relation de Chasles :

$$\int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{1+t}\mathrm{d}t = \int_0^{1}\frac{t^{x-1}}{1+t}\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{1+t}\mathrm{d}t$$

Effectuons le changement de variable $u=\dfrac{1}{t}$ dans la seconde intégrale. Il est licite puisque la fonction inverse est de classe C^1 et strictement décroissante sur $[1,+\infty[$ (donc C^1-bijectif). Alors :

$$\int_1^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{1+t}\mathrm{d}t = -\int_1^{0}\frac{u^{1-x}}{1+\frac{1}{u}}\frac{\mathrm{d}u}{u^2} = \int_0^{1}\frac{u^{1-x}}{u(1+u)}\mathrm{d}u = \int_0^{1}\frac{u^{-x}}{1+u}\mathrm{d}u.$$

On en déduit :

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{1+t}\mathrm{d}t = \int_0^{1}\frac{t^{x-1}}{1+t}\mathrm{d}t + \int_0^{1}\frac{u^{-x}}{1+u}\mathrm{d}u = \int_0^{1}\left(\frac{t^{x-1}}{1+t}+\frac{t^{-x}}{1+t}\right)\mathrm{d}t,}$$

d'où le résultat.

9. Pour tout $t\in]0,1[$, comme $|-t|<1$, on a : $\dfrac{1}{1+t} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(-t)^k$. On aimerait alors écrire, sous réserve de validité :

$$\int_0^{1}\frac{t^{x-1}}{1+t}\mathrm{d}t = \int_0^1 t^{x-1}\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k t^k\mathrm{d}t \overset{(*)}{=} \sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^1(-1)^k t^{x+k-1}\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{x+k}.$$

Pour avoir le résultat voulu, il suffit donc de justifier $(*)$. Ici, on n'est pas sur un segment donc le théorème d'intégration terme à terme avec la convergence uniforme ne s'applique pas. D'autre part, on ne peut utiliser le théorème d'intégration terme à terme de Lebesgue car la série $(\sum\dfrac{1}{x+k})$ n'est pas convergente. Nous allons utiliser le théorème de convergence dominée avec la suite des sommes partielles. . Posons :

$$\forall k\in\mathbf{N},\ \forall t\in]0,1[,\quad f_k(t) = (-1)^k t^{x+k-1}.$$

Alors :

— pour tout $k \in \mathbf{N}$, l'application f_k est continue (par morceaux) sur $]0,1[$;

— par convergence des séries géométriques de raison strictement entre -1 et 1, la série de fonctions $\sum_{k\geqslant 0} f_k$ converge simplement sur $]0,1[$, et sa somme $t \mapsto \dfrac{t^{x-1}}{1+t}$ est bien sûr continue (par morceaux) sur $]0,1[$;

— pour tout $N \in \mathbf{N}$ et tout $t \in]0,1[$, on a :

$$\left|\sum_{k=0}^{N} f_k(t)\right| = \left|t^{x-1}\sum_{k=0}^{N}(-t)^k\right| = t^{x-1}\frac{1-(-t)^{N+1}}{1+t} \leqslant \frac{t^{x-1}}{1+t}, \qquad \text{(HYPOTHÈSE DE DOMINATION)}$$

et l'application $\varphi : t \mapsto \dfrac{t^{x-1}}{1+t}$ est continue (par morceaux) sur $]0,1]$, intégrable en vertu de l'équivalent : $\varphi(t) \underset{t\to 0}{\sim} t^{x-1} = \dfrac{1}{t^{1-x}} > 0$, et de l'inégalité $1-x<1$. Elle est donc aussi intégrable sur $]0,1[$.

Par le théorème de convergence dominée :

$$\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 \sum_{k=0}^{N} f_k = \int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} f_k = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\mathrm{d}t,$$

et la linéarité de l'intégrale permet d'écrire :

$$\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 \sum_{k=0}^{N} f_k = \lim_{N\to+\infty}\sum_{k=0}^{N}\int_0^1 f_k = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{x+k},$$

d'où le résultat :

$$\boxed{\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k+x}.}$$

10. Par la question précédente, appliqué à $1-x \in]0,1[$, on a :

$$\int_0^1 \frac{t^{-x}}{1+t}\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k+1-x}.$$

La question 8 donne donc le résultat voulu :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{t^{-x}}{1+t}\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k+x} + \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k+1-x}.}$$

Pour s'accorder aux notations de l'énoncé, on nomme l'indice de sommation n dans ce qui suit.

11. En effectuant le changement d'indice $n \mapsto n+1$ dans la seconde somme ci-dessus, on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+x} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n-x} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n-x}\right) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2x}{n+x},$$

donc par la question 7 on a le résultat :

$$\boxed{\frac{\pi}{\sin(\pi x)} = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2(-1)^n x}{n^2-x^2}.}$$

12. Soit $y \in]0, \pi[$. Posons : $x = \dfrac{y}{\pi} \in]0, 1[$. Par la question précédente :

$$\frac{\pi}{\sin(y)} = \frac{\pi}{\sin(\pi x)} = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n x}{n^2 - x^2} = \frac{\pi}{y} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n y}{\pi\left(n^2 - \frac{y^2}{\pi^2}\right)}.$$

Il suffit alors de multiplier cette relation par $\dfrac{\sin(y)}{\pi}$ pour avoir :

$$1 = \frac{\sin(y)}{y} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n y \sin(y)}{\pi^2\left(n^2 - \frac{y^2}{\pi^2}\right)} = \frac{\sin(y)}{y} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n y \sin(y)}{-n^2\pi^2 + y^2},$$

d'où le résultat en réarrangeant les termes :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n y \sin(y)}{y^2 - n^2\pi^2} = 1 - \frac{\sin(y)}{y}.}$$

Partie III : Calcul d'une intégrale de Dirichlet généralisée

13. Comme on le disait en début de corrigé, **on suppose que p est un entier naturel** pour traiter cette question et les suivantes.

L'application $t \mapsto \dfrac{1 - (\cos(t))^{2p+1}}{t^2}$ est continue sur $]0, +\infty[$. De plus, pour tout $t \in [1, +\infty[$ on a :

$$0 \leqslant \frac{1 - (\cos(t))^{2p+1}}{t^2} \leqslant \frac{2}{t^2},$$

et l'intégrabilité sur $[1, +\infty[$ de la fonction de Riemann $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ (car l'exposant est $2 > 1$) assure, par comparaison d'intégrales de fonctions positives, que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1 - (\cos(t))^{2p+1}}{t^2} \mathrm{d}t$ converge.

Pour t au voisinage de 0, on écrit :

$$\frac{1 - (\cos(t))^{2p+1}}{t^2} = \frac{1 - \left(1 + \underset{t\to 0}{O}(t^2)\right)^{2p+1}}{t^2} = \frac{1 - \left(1 + (2p+1) \times \underset{t\to 0}{O}(t^2)\right)}{t^2} = \underset{t\to 0}{O}(1),$$

et $t \mapsto 1$ est continue sur le segment $[0, 1]$, donc intégrable sur $[0, 1]$ et en particulier sur $]0, 1]$. Par comparaison, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1 - (\cos(t))^{2p+1}}{t^2} \mathrm{d}t$ converge.

Ceci achève de démontrer que $\boxed{\text{l'intégrale } \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1 - (\cos(t))^{2p+1}}{t^2} \mathrm{d}t \text{ converge}}$.

Passons à la deuxième partie de la question. Nous allons intégrer par parties, en intégrant $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ et en dérivant $t \mapsto 1 - (\cos(t))^{2p+1}$, dont la dérivée est $t \mapsto (2p+1)(\cos(t))^{2p} \sin(t)$. Comme, par le théorème d'encadrement :

$$\lim_{t\to+\infty} -\frac{1 - (\cos(t))^{2p+1}}{t} = 0,$$

et par la relation de comparaison plus haut :

$$\frac{1 - (\cos(t))^{2p+1}}{t} = t \cdot \frac{1 - (\cos(t))^{2p+1}}{t^2} = \underset{t\to 0}{O}(t),$$

on a : $\lim_{t\to 0} -\dfrac{1-(\cos(t))^{2p+1}}{t} = 0$, la formule de l'intégration par parties assure que les intégrales :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-(\cos(t))^{2p+1}}{t^2}\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} -\frac{(2p+1)(\cos(t))^{2p}\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$$

sont de même nature, donc la seconde intégrale converge aussi et on a de plus :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{1-(\cos(t))^{2p+1}}{t^2}\mathrm{d}t &= \left[\frac{1-(\cos(t))^{2p+1}}{t}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -\frac{(2p+1)(\cos(t))^{2p}\sin(t)}{t}\mathrm{d}t \\ &= (2p+1)\int_0^{+\infty}(\cos(t))^{2p}\frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

et donc

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{1-(\cos(t))^{2p+1}}{t^2}\mathrm{d}t = (2p+1)\int_0^{+\infty}(\cos(t))^{2p}\frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t.}$$

d'où le résultat.

14. Soit $n \in \mathbf{N}\setminus\{0\}$. On effectue le changement de variable affine C^1-bijectif $u = t - n\pi$. On a :

$$\int_{\frac{\pi}{2}+(n-1)\pi}^{\frac{\pi}{2}+n\pi}(\cos(t))^{2p}\frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos(u))^{2p}\,\frac{(-1)^n\sin(u)}{u-n\pi}\mathrm{d}u.$$

Par la relation de Chasles et le changement de variable $u \mapsto -u$, comme le sinus est impair, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos(u))^{2p}\,\frac{(-1)^n\sin(u)}{u-n\pi}\mathrm{d}u &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos(u))^{2p}\,\frac{(-1)^n\sin(u)}{u-n\pi}\mathrm{d}u + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}(\cos(u))^{2p}\,\frac{(-1)^n\sin(u)}{u-n\pi}\mathrm{d}u \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos(u))^{2p}\,\frac{(-1)^n\sin(u)}{u-n\pi}\mathrm{d}u - \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos(u))^{2p}\,\frac{(-1)^n\sin(u)}{-u-n\pi}\mathrm{d}u \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos(u))^{2p}\,(-1)^n\sin(u)\left(\frac{1}{u-n\pi}+\frac{1}{u+n\pi}\right)\mathrm{d}u \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos(u))^{2p}\,(-1)^n\sin(u)\frac{2u}{u^2-n^2\pi^2}\mathrm{d}u,\end{aligned}$$

d'où le résultat, quitte à renommer u en t :

$$\boxed{\int_{\frac{\pi}{2}+(n-1)\pi}^{\frac{\pi}{2}+n\pi}(\cos(t))^{2p}\frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos(t))^{2p}\frac{2(-1)^n t\sin(t)}{t^2-n^2\pi^2}\mathrm{d}t.}$$

15. On utilise d'abord la relation de Chasles. Comme l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}(\cos(t))^{2p}\frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$ converge par la question 13, on a :

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}(\cos(t))^{2p}\frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_{\frac{\pi}{2}+(n-1)\pi}^{\frac{\pi}{2}+n\pi}(\cos(t))^{2p}\frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t \overset{(q.14)}{=} \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos(t))^{2p}\frac{2(-1)^n t\sin(t)}{t^2-n^2\pi^2}\mathrm{d}t.$$

Justifions qu'il est possible d'intervertir somme et intégrale, **par le théorème d'intégration terme à terme sur un segment**. Posons :

$$\forall n \in \mathbf{N}\setminus\{0\},\ \forall t \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right],\quad u_n(t) = (\cos(t))^{2p}\frac{2(-1)^n t\sin(t)}{t^2-n^2\pi^2}.$$

Alors :

— l'application u_n est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ en tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas (on a $\pm n\pi \notin \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ car $n \geqslant 1$) ;

— pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ on a :

$$|u_n(t)| = (\cos(t))^{2p} \frac{2t|\sin(t)|}{|t^2 - n^2\pi^2|} \leqslant \frac{\pi}{n^2\pi^2 - t^2} \leqslant \frac{\pi}{n^2\pi^2 - \frac{\pi^2}{4}} = \frac{1}{\pi} \frac{1}{n^2 - \frac{1}{4}},$$

et donc :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \|u_n\|_\infty \leqslant \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - \frac{1}{4}} < +\infty,$$

où la finitude de la dernière somme découle du théorème de comparaison des séries à termes positifs, appliqué à l'équivalent $\frac{1}{n^2 - \frac{1}{4}} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2} > 0$, et de la convergence des séries de Riemann d'exposant strictement supérieur à 1 ; on en déduit que la série de fonctions $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n$ converge normalement donc uniformément sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Par le théorème d'intégration terme à terme sur un segment, d'une part la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} u_n$ converge, et d'autre part :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n.$$

C'est-à-dire, en reprenant le calcul amorcé en début de question :

$$\boxed{\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} (\cos(t))^{2p} \frac{\sin(t)}{t} \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^{2p} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n t \sin(t)}{t^2 - n^2\pi^2} \right) \mathrm{d}t,}$$

d'où le résultat.

16. Par la question précédente et la question 12, qu'on applique avec $y = t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a :

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} (\cos(t))^{2p} \frac{\sin(t)}{t} \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^{2p} \left(1 - \frac{\sin(t)}{t}\right) \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^{2p} \mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^{2p} \frac{\sin(t)}{t} \mathrm{d}t,$$

d'où le résultat par la relation de Chasles :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} (\cos(t))^{2p} \frac{\sin(t)}{t} \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^{2p} \mathrm{d}t.}$$

17. Soit $t \in \mathbf{R}$ (l'énoncé ne précise pas ce qu'est t). Par la formule d'Euler et la formule du binôme de Newton, on a :

$$(\cos(t))^{2p} = \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \right)^{2p} = \frac{1}{2^{2p}} \sum_{k=0}^{2p} \binom{2p}{k} \left(e^{it}\right)^{2p-k} \left(e^{-it}\right)^k = \frac{1}{2^{2p}} \sum_{k=0}^{2p} \binom{2p}{k} e^{2it(p-k)}, \tag{2}$$

et donc :

$$(\cos(t))^{2p} = \frac{1}{2^{2p}} \sum_{k=0}^{p-1} \binom{2p}{k} e^{2it(p-k)} + \frac{1}{2^{2p}} \binom{2p}{p} + \frac{1}{2^{2p}} \sum_{k=p+1}^{2p} \binom{2p}{k} e^{2it(p-k)}.$$

Or, par le changement d'indice $k \mapsto 2p-k$, on a :

$$\sum_{k=p+1}^{2p} \binom{2p}{k} e^{2it(p-k)} = \sum_{k=0}^{p-1} \binom{2p}{2p-k} e^{2it(k-p)} = \sum_{k=0}^{p-1} \binom{2p}{k} e^{-2it(p-k)}$$

donc :

$$(\cos(t))^{2p} = \frac{1}{2^{2p}} \sum_{k=0}^{p-1} \binom{2p}{k} \left(e^{2it(p-k)} + e^{-2it(p-k)}\right) + \frac{1}{2^{2p}} \binom{2p}{p}.$$

Par la formule d'Euler, cela donne le résultat voulu :

$$\boxed{(\cos(t))^{2p} = \frac{1}{2^{2p}} \left(\binom{2p}{p} + 2 \sum_{k=0}^{p-1} \binom{2p}{k} \cos(2(p-k)t) \right).}$$

18. On a, par les questions 13, 16 et la précédente :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{1-(\cos(t))^{2p+1}}{t^2} \mathrm{d}t &= (2p+1) \int_0^{+\infty} (\cos(t))^{2p} \frac{\sin(t)}{t} \mathrm{d}t \\ &= \frac{2p+1}{2^{2p}} \left(\frac{\pi}{2} \binom{2p}{p} + 2 \sum_{k=0}^{p-1} \binom{2p}{k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2(p-k)t) \mathrm{d}t \right). \end{aligned}$$

Or, si $k \in [\![0, p-1]\!]$, alors :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2(p-k)t) \mathrm{d}t = \left[\frac{\sin(2(p-k)t)}{2(p-k)} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sin((p-k)\pi)}{2(p-k)} = 0,$$

donc :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{1-(\cos(t))^{2p+1}}{t^2} \mathrm{d}t = \frac{2p+1}{2^{2p}} \cdot \frac{\pi}{2} \binom{2p}{p} = \frac{\pi}{2} \frac{(2p+1)(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} = \frac{\pi}{2} \frac{(2p+1)!}{2^{2p}(p!)^2}.}$$

d'où le résultat.

Partie IV : Calcul de $E(|S_n|)$

19. Soit $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$. Il est clair que l'on a :

$$\forall k \in \mathbf{N} \setminus \{0\}, \quad \mathrm{E}(X_k) = 0, \quad \mathrm{V}(X_k) = \mathrm{E}(X_k^2) - \mathrm{E}(X_k)^2 = \mathrm{E}(1) = 1.$$

Par linéarité de l'espérance :

$$\boxed{\mathrm{E}(S_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}(X_k) = 0,}$$

et par indépendance des variables X_k :

$$\boxed{\mathrm{V}(S_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{V}(X_k) = n.}$$

D'où le résultat.

20. On a :
$$\cos(S+T) = \cos(S)\cos(T) - \sin(S)\sin(T).$$
Par linéarité de l'espérance :
$$\mathrm{E}(\cos(S+T)) = \mathrm{E}(\cos(S)\cos(T)) - \mathrm{E}(\sin(S)\sin(T)).$$
Or S et T sont indépendantes, donc par le lemme des coalitions il en est de même de $\cos(S)$ et $\cos(T)$, puis de $\sin(S)$ et $\sin(T)$. On en déduit :
$$\mathrm{E}(\cos(S+T)) = \mathrm{E}(\cos(S))\mathrm{E}(\cos(T)) - \mathrm{E}(\sin(S))\mathrm{E}(\sin(T)).$$
Or T et $-T$ ont même loi, donc $\sin(T)$ et $\sin(-T) = -\sin(T)$ également. Deux variables ayant même loi ont aussi même espérance, d'où :
$$\mathrm{E}(\sin(T)) = \mathrm{E}(-\sin(T)) = -\mathrm{E}(\sin(T)).$$
On en déduit : $\mathrm{E}(\sin(T)) = 0$, d'où le résultat :
$$\boxed{\mathrm{E}(\cos(S+T)) = \mathrm{E}(\cos(S))\mathrm{E}(\cos(T)).}$$

21. Soient $n \in \mathbf{N}\setminus\{0\}$ et $t \in \mathbf{R}$. Au vu de la définition des X_k, il est clair que tX_k et $-tX_k$ ont même loi pour tout $k \in \mathbf{N}\setminus\{0\}$. De plus, par le lemme des coalitions, $T = tX_{n+1}$ et $S = t\sum\limits_{k=1}^{n} X_k = tS_n$ sont indépendantes. Cela permet d'écrire, par la question précédente :
$$\mathrm{E}(\cos(tS_{n+1})) = \mathrm{E}(\cos(S+T)) = \mathrm{E}(\cos(tS_n))\mathrm{E}(\cos(tX_{n+1})).$$
Comme tX_{n+1} a même loi que tX_1, on a donc :
$$\mathrm{E}(\cos(tS_{n+1})) = \mathrm{E}(\cos(tS_n))\mathrm{E}(\cos(tX_1)).$$
Par le théorème de transfert :
$$\mathrm{E}(\cos(tX_1)) = \frac{\cos(t)}{2} + \frac{\cos(-t)}{2} = \cos(t).$$
On a donc montré :
$$\forall n \in \mathbf{N}\setminus\{0\}, \quad \mathrm{E}(\cos(tS_{n+1})) = \cos(t)\mathrm{E}(\cos(tS_n)).$$
Autrement dit : la suite $(\mathrm{E}(\cos(tS_n)))_{n\geqslant 1}$ est géométrique et de raison $\cos(t)$. On conclut :
$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N}\setminus\{0\}, \quad \mathrm{E}(\cos(tS_n)) = (\cos(t))^{n-1}\mathrm{E}(\cos(tS_1)) = (\cos(t))^{n-1}\mathrm{E}(\cos(tX_1)) = (\cos(t))^n.}$$

22. On a :
$$|a+b|^2 = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = |a|^2 + 2\mathrm{signe}(a)|a|b + b^2 = |a|^2 + 2\mathrm{signe}(a)|a|b + (\mathrm{signe}(a)b)^2,$$
c'est-à-dire :
$$|a+b|^2 = (|a| + \mathrm{signe}(a)b)^2.$$
On en déduit que les réels $|a+b|$ et $|a| + \mathrm{signe}(a)b$ sont égaux ou opposés. L'hypothèse $|a| \geqslant |b|$ assure que $|a| + \mathrm{signe}(a)b$ est positif. Or $|a+b|$ l'est aussi, donc :
$$\boxed{|a+b| = |a| + \mathrm{signe}(a)b.}$$

Appliqué à $a = S_{2n-1}(\omega)$ et $b = X_{2n}(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$ (dont il faut normalement s'assurer qu'elles vérifient les hypothèses sur a et b : voir plus bas), cela donne :

$$|S_{2n}| = |S_{2n-1} + X_{2n}| = |S_{2n-1}| + \operatorname{signe}(S_{2n-1})X_{2n}, \tag{3}$$

donc par linéarité de l'espérance :

$$\forall n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}, \quad \mathrm{E}(|S_{2n}|) = \mathrm{E}(|S_{2n-1}|) + \mathrm{E}\left(\operatorname{signe}(S_{2n-1})X_{2n}\right).$$

Or $X_1, \dots, X_{2n}$ sont indépendantes, donc par le lemme des coalitions il en est de même de X_{2n} et $\operatorname{signe}(S_{2n-1})$. On en déduit :

$$\mathrm{E}\left(\operatorname{signe}(S_{2n-1})X_{2n}\right) = \mathrm{E}\left(\operatorname{signe}(S_{2n-1})\right)\mathrm{E}\left(X_{2n}\right) \overset{(q.\,19)}{=} 0,$$

d'où le résultat :

$$\boxed{\mathrm{E}\left(|S_{2n}|\right) = \mathrm{E}\left(|S_{2n-1}|\right).}$$

Il reste à justifier que les choix $a = S_{2n-1}(\omega)$ et $b = X_{2n}(\omega)$ sont licites. C'est-à-dire : justifions que $S_{2n-1}(\omega)$ est non nul et que : $|S_{2n-1}(\omega)| \geqslant |X_{2n}(\omega)|$. On a : $S_{2n-1}(\omega) = \sum_{k=1}^{2n-1} X_k(\omega)$, et comme les $X_k(\omega)$ sont dans $\{-1, 1\}$, on a :

$$S_{2n-1}(\omega) \equiv \sum_{k=1}^{2n-1} 1 \bmod 2 \equiv 2n - 1 \bmod 2 \equiv 1 \bmod 2,$$

donc $S_{2n-1}(\omega)$ ne peut pas être nul (c'est une façon comme une autre de justifier que, pour qu'une somme de 1 et de -1 soit nulle, il faut autant de 1 que de -1, ce qui est impossible si on somme un nombre impair de termes). Comme $S_{2n-1}(\omega)$ est à valeurs entières, ceci impose :

$$|S_{2n-1}(\omega)| \geqslant 1 = |X_{2n}(\omega)|,$$

d'où le résultat : la relation (3) est vraie.

23. Soit $s \in \mathbf{R}$. Comme chaque membre de l'égalité à démontrer est une fonction paire de s, il suffit de la démontrer pour $s \geqslant 0$.

Si $s = 0$, on a immédiatement : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(st)}{t^2}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} 0\mathrm{d}t = 0 = \frac{\pi}{2}|0|$. Supposons donc $s > 0$. Le changement de variable affine C^1-bijectif $u = st$ donne :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(st)}{t^2}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(u)}{(u/s)^2}\frac{\mathrm{d}u}{s} = s\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(u)}{u^2}\mathrm{d}u.$$

Par la question 18 avec $p = 0$, on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(u)}{u^2}\mathrm{d}u = \frac{\pi}{2},$$

et donc :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(st)}{t^2}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}s = \frac{\pi}{2}|s|.}$$

D'où le résultat pour $s \geqslant 0$, et donc pour $s \in \mathbf{R}$ par parité.

24. Soit $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$. Par le théorème de transfert et parce que $S_n(\Omega)$ est de cardinal fini, on a :

$$\mathrm{E}\left(\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(tS_n)}{t^2}\mathrm{d}t\right) = \sum_{s \in S_n(\Omega)} \left(\int_0^{+\infty} \frac{1-(\cos(st))}{t^2}\mathrm{d}t\right) \mathrm{P}(S_n = s) = \sum_{s \in S_n(\Omega)} \frac{\pi}{2}|s| \cdot \mathrm{P}(S_n = s),$$

et donc, encore par le théorème de transfert :

$$\mathrm{E}\left(\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(tS_n)}{t^2}\mathrm{d}t\right) = \frac{\pi}{2}\mathrm{E}\left(|S_n|\right).$$

Mais on a aussi, par le théorème d'intégration terme à terme positif, dont les hypothèses découlent aisément des questions précédentes (intégrabilité du terme général, etc.) :

$$\mathrm{E}\left(\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(tS_n)}{t^2}\mathrm{d}t\right) = \int_0^{+\infty} \left(\sum_{s \in S_n(\Omega)} \frac{1-\cos(st)}{t^2}\mathrm{P}(S_n = s)\right) \mathrm{d}t.$$

Par le théorème de transfert, cela donne aussi :

$$\mathrm{E}\left(\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(tS_n)}{t^2}\mathrm{d}t\right) = \int_0^{+\infty} \mathrm{E}\left(\frac{1-\cos(tS_n)}{t^2}\right) \mathrm{d}t.$$

En comparant les deux expressions de $\mathrm{E}\left(\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(tS_n)}{t^2}\mathrm{d}t\right)$ obtenues, on a donc :

$$\mathrm{E}(|S_n|) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \mathrm{E}\left(\frac{1-\cos(tS_n)}{t^2}\right) \mathrm{d}t.$$

Par linéarité de l'espérance et la question 21, on conclut :

$$\boxed{\mathrm{E}(|S_n|) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1-\mathrm{E}\left(\cos(tS_n)\right)}{t^2}\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1-(\cos(t))^n}{t^2}\mathrm{d}t.}$$

25. Soit $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$. En combinant les questions 18 (avec $p = n-1$), 22 et la précédente, on a immédiatement le résultat voulu :

$$\boxed{\mathrm{E}\left(|S_{2n}|\right) = \mathrm{E}\left(|S_{2n-1}|\right) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1-(\cos(t))^{2n-1}}{t^2}\mathrm{d}t = \frac{(2n-1)!}{2^{2n-2}\left((n-1)!\right)^2}.}$$