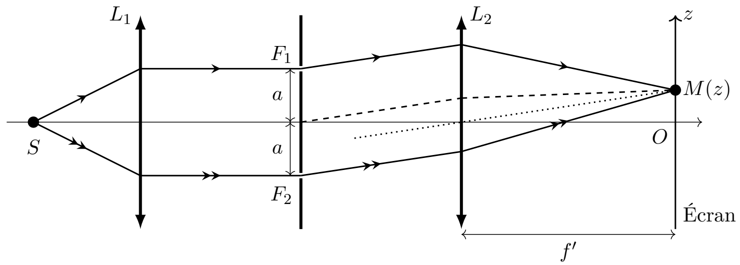
DM 9
Optique ondulatoire, mécanique

Exercice 1 : Mesure de l'épaisseur d'une lame par interférométrie

Frits Zernike, qui a obtenu le prix Nobel en 1953 pour son microscope à contraste de phase, a dans un premier temps utilisé un montage interférentiel à trois fentes, pour contrôler ou mesurer l'épaisseur d'une fine lame transparente à faces parallèles. On suppose que tous les rayons lumineux sont très peu inclinés par rapport à l'axe horizontal. L'indice de l'air sera pris égal à 1.

I – Système interférentiel à deux fentes

On considère d'abord un système de deux fentes F_1 et F_2 très fines. Elles sont distantes de $2a$ et de grande longueur. L'ensemble est éclairé par une source S ponctuelle et monochromatique de longueur d'onde λ placée au foyer objet d'une lentille convergente. L'observation de la figure d'interférences se fait sur un écran placé dans le plan focal image d'une lentille convergente de distance focale image f'. On s'intéresse aux ondes reçues au point M d'ordonnée z sur l'écran et on suppose z et a très petits devant f'.



On adopte le modèle scalaire de la lumière et on note s_0 l'amplitude associée au rayon fictif (en tirets sur la figure) provenant du milieu des deux fentes. Les amplitudes complexes des deux rayons issus de F_1 et F_2 et déphasés d'un angle 2φ sont alors : $\underline{s}_1 = s_0 e^{j\varphi}$ et $\underline{s}_2 = s_0 e^{-j\varphi}$. On note $E_0 = \underline{s}_1 \cdot \underline{s}_1^* = \underline{s}_2 \cdot \underline{s}_2^* = s_0^2$ l'éclairement (ou intensité lumineuse) émis par chacune des deux fentes.

Q.1 Après avoir cité les théorèmes que vous jugez utiles, exprimer φ en fonction de a, f', λ et z.

Q.2 Exprimer l'éclairement E résultant de l'interférence des deux ondes en fonction de E_0 et φ. Tracer l'allure de la courbe E en fonction de φ.

II – Système interférentiel à trois fentes

On ajoute une troisième fente F_0 au milieu des deux autres et identique à celles-ci et on place les fentes dans le plan focal objet de la seconde lentille.

Q.3 Montrer que le nouvel éclairement peut se mettre sous la forme : $E = E_0\left[1 + 2\cos(\varphi)\right]^2$.

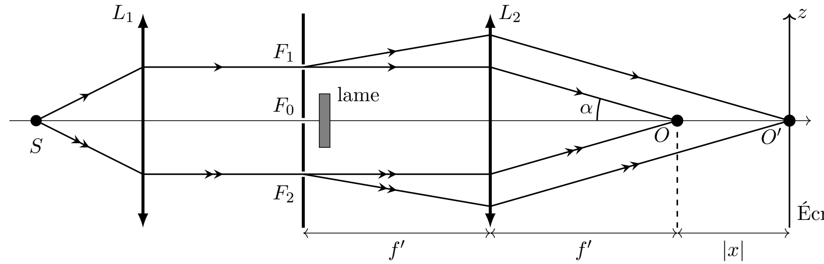
Q.4 Tracer l'allure de la courbe E/E_0 en fonction de φ.

À partir du montage à trois fentes, on ajoute devant la fente centrale F_0 et parallèlement au plan des fentes, une lame de verre à faces parallèles d'épaisseur e et d'indice $n = 1,5$. e étant très faible, on considèrera que le rayon lumineux qui traverse la lame, parcourt une distance e dans le verre, sans être dévié.

Q.5 Montrer que si l'épaisseur de la lame est telle qu'elle induit un retard de phase de $\pi/2$ pour le rayon central, on retrouve une alternance régulière de franges brillantes et de franges sombres (pas nécessairement noires), contrairement à la question précédente.

Q.6 Si on veut contrôler par cette méthode que la lame a bien l'épaisseur souhaitée $e = 0{,}3\,\mu\text{m}$, quelle valeur faut-il choisir pour λ ?

Si on veut mesurer l'épaisseur e, il faut adopter une autre méthode. On peut déplacer l'écran d'une distance $x = \overline{OO'}$, de façon à retrouver la même intensité lumineuse au centre de la figure que celle qu'on avait en l'absence de lame. Le point O' de la figure suivante est alors tel que les trois rayons issus des trois fentes sont à nouveau en phase (comme en O sans la lame).

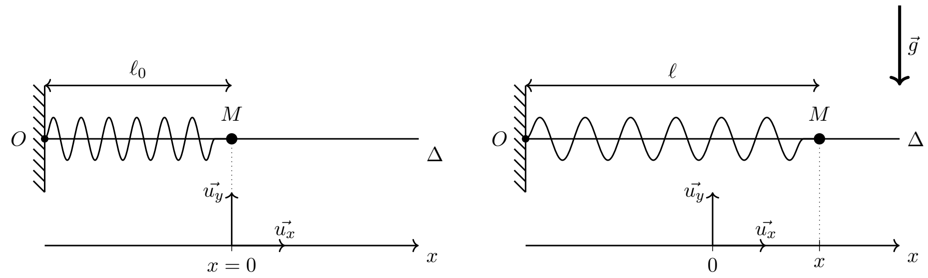


Q.7 Exprimer x en fonction de n, e et de l'angle $\alpha \approx a/f'$.

Q.8 *Application numérique* : on donne $a = 0{,}1\,\text{mm}$, $f' = 10\,\text{cm}$ et $n = 1{,}5$ et on mesure à l'aide d'un microscope viseur : $x = -1\,\text{cm}$. Déterminer la valeur de e.

Exercice 2 : Ressort avec ou sans frottements

Une particule ponctuelle M de masse m peut glisser sur un rail horizontal Δ fixe dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}$. Le point M est fixé à l'extrémité d'un ressort de raideur k dont l'autre extrémité est attachée en O, fixe dans $\mathcal{R}$. On repère le point M par son abscisse x et on suppose que la position $x = 0$ correspond à l'allongement au repos ℓ_0 du ressort.



I – Sans frottements

Le glissement s'effectue dans un premier temps sans frottements.

Q.1 Faire un bilan des forces qui s'appliquent sur le point M et les représenter sur un schéma pour $x > 0$.

Q.2 Exprimer l'énergie mécanique du système en fonction de x, $\dot{x}$ et des constantes du problème. Que peut-on dire de cette énergie mécanique ? En déduire l'équation différentielle régissant le mouvement du point M.

Q.3 Déterminer alors l'expression de x en fonction du temps et des constantes du problème en notant x_0 et $\vec{v_0} = \dot{x}_0 \vec{u_x}$ respectivement les position et vitesse initiales.

II – Avec frottements

Le point M est maintenant soumis à une force de frottement $\vec{f}$ de la part du rail. Cette force de frottement est de norme constante f quand le point M est en mouvement et comprise entre 0 et f lorsque le point M est immobile.

Q.4 Représenter les forces qui s'appliquent sur le point M lorsqu'il est en mouvement dans le sens des x décroissants. On fera figurer l'angle φ entre la réaction du rail sur le point M et la verticale. Donner l'expression de φ en fonction des constantes du problème.

Q.5 On place le point M à la position x_0 (de signe quelconque) sans vitesse initiale. À quelle(s) condition(s) sur x_0 le point M se déplace-t-il ?

Q.6 On suppose la condition de la question précédente vérifiée : le point M se déplace alors jusqu'à une position d'équilibre x_1. Donner, en fonction de f et k, un encadrement de la valeur x_1.

Q.7 Montrer que la force de frottement peut s'écrire : $\vec{f} = -\varepsilon f \vec{u_x}$ avec ε un coefficient tel que :

$$\varepsilon = \begin{cases} +1 & \text{si} \quad \dot{x} > 0 \\ -1 & \text{si} \quad \dot{x} < 0 \end{cases}$$

Q.8 Écrire alors l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$ sans chercher à la résoudre.

Dans toute la suite du problème, on choisit x_0 positif et très supérieur à la limite de démarrage du point M trouvée à la **Q.5** afin de supposer qu'il effectue plusieurs oscillations. On note x_1 la position du point M lorsqu'il s'arrête pour la première fois, x_2 sa position lorsqu'il s'arrête pour la deuxième fois, etc. Le point M est laché sans vitesse initiale ($\dot{x}_0 = 0$).

Q.9 Écrire et résoudre l'équation différentielle du mouvement avec frottement sur l'intervalle $\{x_0, x_1\}$.

Q.10 Déterminer le temps t_1 que dure le trajet entre x_0 et x_1. Exprimer alors x_1 en fonction de x_0, f et k.

Q.11 Exprimer le travail de la force de frottement sur le trajet entre x_1 et x_2 et en déduire la position x_2 lorsque le point M s'arrête pour la deuxième fois, à exprimer en fonction de x_0, f et k.

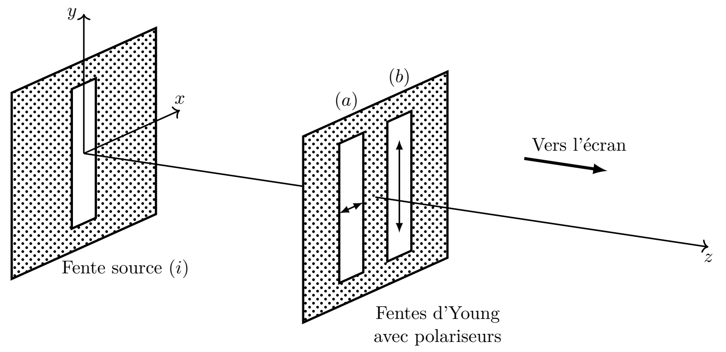
Q.12 De l'étude qui précède, déduire la nature de la décroissance de l'amplitude du mouvement au cours du temps. Déterminer alors l'équation $x_{max}(t)$ de la courbe reliant les maxima de $x(t)$.

Exercice 3 : Expérience de Fresnel et Arago (bonus)

On rappelle qu'un filtre polarisant (polariseur) de direction de polarisation Δ éclairé en incidence normale ne laisse passer que la composante suivant Δ du champ $\vec{E}$ incident, cette composante étant multipliée à la traversée du filtre par un coefficient de transmission $\underline{t}$ tenant compte du déphasage et de l'absorption par le polariseur. Pour simplifier, on prendra $\underline{t} = 1$ ici. L'expérience de Fresnel et Arago est destinée à mettre en évidence le rôle des états de polarisation dans une expérience d'interférences.

Pour ce faire, on interpose un polariseur devant chacune des fentes d'un dispositif de fentes d'Young, en prenant soin de croiser les directions passantes des polariseurs, comme indiqué sur le schéma ci-dessous (les directions de polarisation sont indiquées par des flèches).

La fente source est placée à l'abscisse z_0 et les fentes d'Young sont placées en z_f.



La fente source est éclairée avec une lumière monochromatique. On admettra qu'après la fente source, les composantes sur les axes (Ox) et (Oy) du champ électrique sont les suivantes :

$$E_x^i = E_0 \cos(kz_0 - \omega t + \varphi_x) \qquad ; \qquad E_y^i = E_0 \cos(kz_0 - \omega t + \varphi_y)$$

où $\varphi_x - \varphi_y$ varie aléatoirement au cours du temps (il s'agit de lumière naturelle, non polarisée).

Q.1 Quelles sont les composantes (E_x^a, E_y^a) et (E_x^b, E_y^b) du champ électrique pour les rayons ayant traversé les fentes (a) et (b) respectivement ?

Q.2 Peut-on observer des interférences entre ces rayons ?

On intercale un nouveau polariseur à l'abscisse $z_2 > z_f$ entre le plan des fentes et l'écran. La direction passante de ce polariseur fait un angle β par rapport à l'axe (Ox).

Q.3 Déterminer les nouvelles composantes $(E_x^{a'}, E_y^{a'})$ et $(E_x^{b'}, E_y^{b'})$ du champ électrique de chacun des rayons en sortie de ce polariseur. Peut-on observer des interférences entre eux ?

Finalement, on intercalle un autre polariseur à l'abscisse $z_1 < z_f$ entre le plan de la fente source et le plan des fentes d'Young. Sa direction passante fait un angle α avec l'axe (Ox). On garde le polariseur après les fentes d'Young, dont la direction passante fait toujours l'angle β par raport à (Ox).

Q.4 En procédant de proche en proche, donner les expressions des composantes $(E_x^{a''}, E_y^{a''})$ et $(E_x^{b''}, E_y^{b''})$ du champ électrique en sortie du système pour chacun des rayons.

Q.5 Simplifier ces composantes pour les valeurs suivantes de α et β :
a) configuration (1) : $\alpha = \frac{\pi}{4}$ et $\beta = \frac{\pi}{4}$
b) configuration (2) : $\alpha = \frac{\pi}{4}$ et $\beta = -\frac{\pi}{4}$

Q.6 Montrer que l'on peut ainsi obtenir des interférences entre les rayons issus des deux fentes dans les deux configurations ci-dessus. Que peut-on dire des systèmes de franges obtenus dans ces deux configurations ?