Corrigé DM 10

exercice 1

a) * $\forall t>0$, $n^2 u_n(t) = (\sqrt{n})^4 e^{-t\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{C.C.}} 0$

donc $u_n(t) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, $\frac{1}{n^2} \geq 0$ et $\left(\sum \frac{1}{n^2}\right)$ cvg,

Par T.C. : $\boxed{\left(\sum u_n(t)\right) \text{ cvg}}$

* $\forall t \leq 0$: $u_n(t) \not\to 0$, donc $\left(\sum u_n(t)\right)$ D.G.

d'où $\boxed{\left(\sum u_n\right) \text{ cvg simplement sur } \mathbb{R}^{+*}}$

b) i) $\forall n\in\mathbb{N}$, u_n C^∞ sur $\mathcal{D}$, par TG et

$\forall k\in\mathbb{N}^*$, $\forall t\in\mathcal{D}$: $\underline{u_n^{(k)}(t) = (-\sqrt{n})^k e^{-t\sqrt{n}}}$

ii) $\left(\sum u_n\right)$ C.S. sur $\mathcal{D}$ (a))

iii) <u>HD</u> : $\forall t\in[a,b]\subset]0,+\infty[$, $\forall k\geq 1$, $\forall n\in\mathbb{N}$:

$|u_n^{(k)}(t)| \leq (\sqrt{n})^k e^{-a\sqrt{n}} = \alpha_n$

$n^2\alpha_n = (\sqrt{n})^{k+4} e^{-a\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{C.C.}} 0$, donc $\alpha_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$;

comme au a) $\left(\sum \alpha_n\right)$ cvg d'où $\left(\sum u_n^{(k)}\right)$ C.N. $/_{[a,b]}$

On conclut avec le th C^k :

d' : $\boxed{g \ C^\infty \text{ sur } D \text{ et } g^{(k)}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-\sqrt{n})^k e^{-t\sqrt{n}}}$

c) d'après le b), $\forall t \in D$ $\quad g'(t) = -\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n}\, e^{-t\sqrt{n}} < 0$,

donc g décroissante sur D, d'où par T.L.M.,

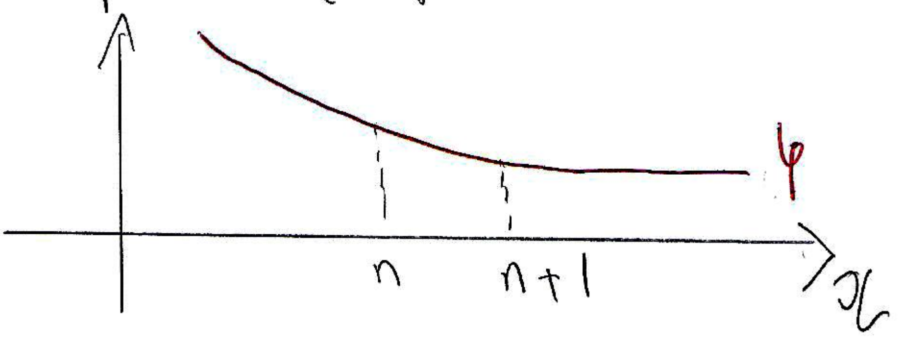
$\lim_{x \to 0^+} g(x) = \ell$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$.

$\forall N \geq 1 \quad \forall t > 0$: $g(t) \geq \sum_{n=0}^{N} e^{-t\sqrt{n}}$, on passe à la limite, qd $t \to 0^+$, $\ell \geq \sum_{n=0}^{N} 1 = N+1$ (par T.G.)

qd $N \to \infty$, il vient $\boxed{\lim_{t \to 0^+} g(t) = +\infty}$

d) (On fait comme pour $\zeta(x)$ au verso de 1)

Fixons $t > 0$, soit $\varphi(x) = e^{-t\sqrt{x}}$, φ est positive, continue et décroissante sur $\mathbb{R}^+$



$\forall n \geq 0,\ \forall x \in [n, n+1] :\ \varphi(n+1) \leq \int_n^{n+1} \varphi(x)\,dx \leq \varphi(n),$

tout cvg Σ et $\int$ d'où :

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \varphi(n+1)}_{g(t)-\varphi(0)} \leqslant \int_0^{+\infty} \varphi(n)\,dn \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(n) = g(t)$$

donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi \leqslant g(t) \leqslant \int_0^{+\infty} \varphi + 1$

Or $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi = \int_0^{+\infty} e^{-t\sqrt{n}}\,dn = \int_0^{+\infty} e^{-tu}\, 2u\,du$

cdV C^1-bij m $]0, +\infty[$

$u = \sqrt{n}$

$\Leftrightarrow n = u^2 \rightarrow dn = 2u\,du$

donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi = \underbrace{\left[2u \frac{e^{-tu}}{-t}\right]_0^{+\infty}} + \frac{2}{t}\int_0^{+\infty} e^{-tu}\,dt$ (IPP)

$*$ $\underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$ par CC
$*$ $= 0$ en 0) règle des 2/3

d'où $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi = \frac{2}{t}\int_0^{+\infty} e^{-tu}\,du = \frac{2}{t}\left[\frac{e^{-tu}}{-t}\right]_0^{\infty} = \frac{2}{t^2}$

On a donc $\forall t > 0 :\ \dfrac{2}{t^2} \leqslant g(t) \leqslant \dfrac{2}{t^2} + 1$

$\Rightarrow 1 \leqslant \dfrac{t^2}{2} g(t) \leqslant 1 + \dfrac{t^2}{2}$ T.E.

$\longrightarrow 1,\ t^2 \to 0$

d° : $\boxed{g(t) \underset{0^+}{\sim} \frac{2}{t^2}}$

e) Utilisons le théorème d'inversion Σ-lim :

* $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad u_n(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$

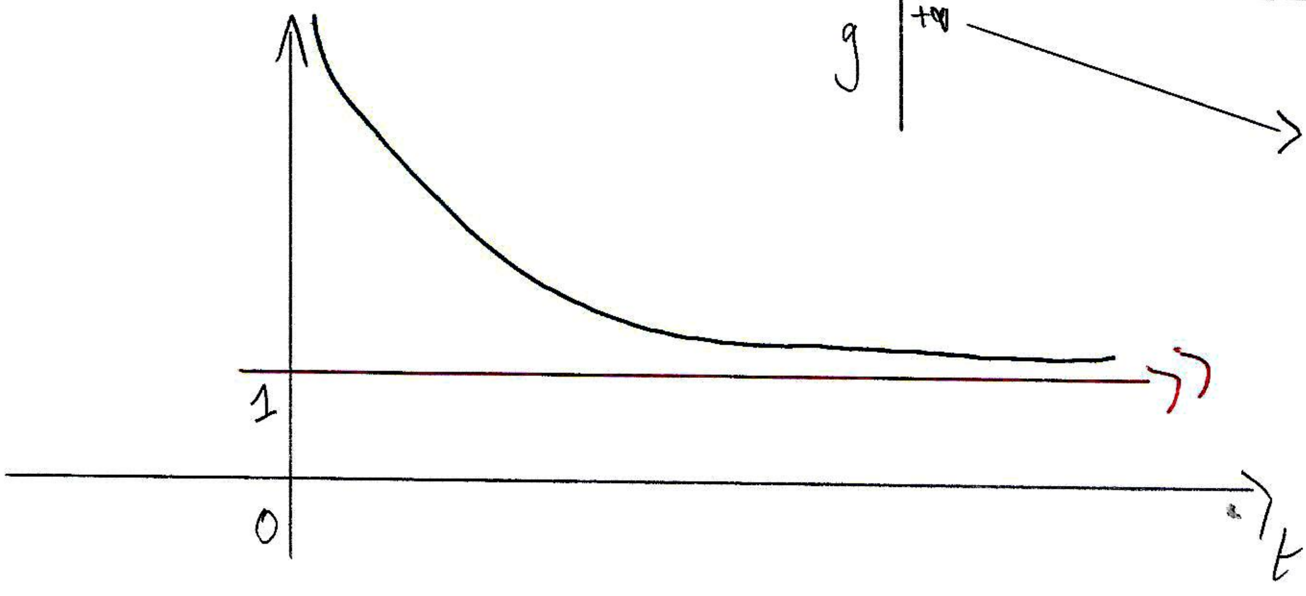
* $\forall t \geqslant [\underbrace{7}_{\text{(par exemple)}}, \underbrace{+\infty}_{\text{non négociable}}[$ $\quad |u_n(t)| \leqslant e^{-7\sqrt{n}} = \alpha_n$

et comme $\alpha_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, $(\Sigma \alpha_n)$ cvg d'où (Σu_n) CN$/_{[7,+\infty[}$

d° : $\boxed{\lim_{t \to +\infty} g(t) = 1}$

f) On a vu av c, d e) :

t	0	$+\infty$
g'	$-$	
g	$+\infty$ $\searrow$	1



Rem : avec $g' \nearrow$ ou $g'' \geq 0$, g convexe

Dm 10 (PROBLÈME) : CCP 2016 - Filière MP
Corrigé de l'épreuve Mathématiques I : exercice 2 et probème

D'après le corrigé de Nicolas Basbois & Damien Broizat (UPS)

PROBLÈME : Fonction Digamma.

Partie préliminaire

III.1.

a. Soit $x > 0$. La fonction $h_x : \ t \longmapsto e^{-t}t^{x-1}$ est continue sur $]0,+\infty[$ par produit de fonctions continues, les fonctions exponentielle et puissances étant bien continues sur $]0,+\infty[$.

On a $h_x(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} t^{x-1} = \dfrac{1}{t^{1-x}}$ avec $1-x<1$ et $t^2\, e^{-t}t^{x-1} = t^{x+1}e^{-t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissance comparée, d'où $h_x(t) = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.

Ainsi, par comparaison de fonctions positives et critère de Riemann en 0 et en $+\infty$,

$\boxed{h_x : t \longmapsto e^{-t}t^{x-1} \text{ est intégrable sur }]0,+\infty[}$.

On peut ainsi définir la fameuse fonction Gamma d'Euler $\Gamma : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$, sur $]0,+\infty[$.

b. Soit $x>0$. La fonction h_x définie dans la question précédente est continue et strictement positive sur $]0,+\infty[$. La positivité de l'intégrale nous donne $\int_0^{+\infty} h_x(t)dt \geqslant 0$ et la continuité de h_x implique qu'on ne pourrait avoir $\int_0^{+\infty} h_x(t)dt = 0$ que si h_x était identiquement nulle sur $]0,+\infty[$, ce qui n'est pas le cas.

Ainsi $\boxed{\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} h_x(t)dt > 0, \text{ et ce pour tout } x>0}$.

c. On définit $h : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & h_x(t) = e^{-t}t^{x-1} \end{array}\right.$.

— Pour tout $t>0$, $x \longmapsto h(x,t)$ est de classe C^1 (et même C^∞ en fait) sur $\mathbb{R}_+^*$. On a donc l'existence de $\dfrac{\partial h}{\partial x}$ sur tout $(\mathbb{R}_+^*)^2$ et, pour tout $t>0$, la continuité de $x \longmapsto \dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Notons d'ailleurs qu'on a, pour tout $(x,t) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t) = \ln(t)e^{-t}t^{x-1}$.

— Pour tout $x>0$, $t \longmapsto \dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)$ est continue (donc continue par morceaux) sur $\mathbb{R}_+^*$.

— Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}_+^*$. On a donc $0 < a \leqslant b$.

$$\forall (x,t) \in [a,b]\times\mathbb{R}_+^*,\ \left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \left\{\begin{array}{l} |\ln(t)|e^{-t}t^{a-1} \text{ si } t\leqslant 1 \\ \ln(t)e^{-t}t^{b-1} \text{ si } t>1 \end{array}\right. .$$

Notons donc φ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\varphi(t) = \left\{\begin{array}{l} |\ln(t)|e^{-t}t^{a-1} \text{ si } t\leqslant 1 \\ \ln(t)e^{-t}t^{b-1} \text{ si } t>1 \end{array}\right.$. Cette fonction est continue par morceaux (et même continue en fait).

De plus, pour $t>1$, on a $t^2\varphi(t) = t^{1+b}\ln(t)e^{-t}$, donc $t^2\varphi(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissance comparée, d'où $\varphi(t) = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.

Et, pour $t \in]0,1]$, on a $t^{1-\frac{a}{2}}\varphi(t) = t^{\frac{a}{2}}|\ln(t)|e^{-t} \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 0$ (toujours par croissance comparée, car $a>0$), donc $\varphi(t) = \underset{t\to 0^+}{o}\left(\dfrac{1}{t^{1-\frac{a}{2}}}\right)$, avec $1-\dfrac{a}{2}<1$.

Donc φ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

On en déduit l'hypothèse de domination sur tous les segments de $]0,+\infty[$.

Cela prouve finalement que

$$\boxed{\Gamma \text{ est de classe } C^1 \text{ sur }]0,+\infty[, \text{ donc dérivable, avec : } \forall x>0,\ \Gamma'(x) = \int_0^{+\infty}\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)dt = \int_0^{+\infty}\ln(t)e^{-t}t^{x-1}dt.}$$

III.2. Pour tout entier $n \geqslant 2$, on pose $u_n = \displaystyle\int_{n-1}^{n}\frac{1}{t}dt - \frac{1}{n}$.

a. $u_n = \ln(n) - \ln(n-1) - \dfrac{1}{n} = \ln(n) - \ln(n(1-\dfrac{1}{n})) - \dfrac{1}{n} = -\ln(1-\dfrac{1}{n}) - \dfrac{1}{n} = (\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{2n^2}) - \dfrac{1}{n} + o(\dfrac{1}{n^2})$

Donc $u_n = \dfrac{1}{2n^2} + o(\dfrac{1}{n^2}) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n^2}$ d'où $\boxed{u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n^2}}$.

b. Pour $n \geqslant 2$, on a $\sum\limits_{k=2}^{n} u_k = \displaystyle\int_1^n \frac{dt}{t} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$ par relation de Chasles, d'où

$\sum\limits_{k=2}^{n} u_k = \ln(n) + 1 - \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} = 1 - H_n$.

Comme $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n^2} \geqslant 0$, par T.C. , la série $(\sum u_n)$ converge et donc la suite $\left(\sum\limits_{k=2}^{n} u_k\right)_{n\geqslant 2}$ converge , il s'ensuit que $\boxed{\text{la suite } (H_n)_{n\geqslant 1} \text{ converge}}$.

On note dans la suite $\gamma = \lim\limits_{n\to+\infty} H_n$, et on définit la fonction Digamma ψ, pour $x \in]0, +\infty[$, par $\psi(x) = \dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$.

Expression de la fonction Digamma à l'aide d'une série

III.3. Pour $x \in]0, +\infty[$ et pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit la fonction f_n sur $]0, +\infty[$ par :

$$f_n : t \longmapsto \begin{cases} \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n t^{x-1} \text{ si } t \in]0, n] \\ 0 \text{ si } t > n \end{cases} .$$

a. On peut établir l'inégalité souhaitée par simple étude de la fonction $x \longmapsto \ln(1-x)+x$ sur $]-\infty, 1[$, ou bien par un argument de convexité : en effet la fonction ln est notoirement concave sur $\mathbb{R}_+^*$ ($\ln''(x) = -\dfrac{1}{x^2} \leqslant 0$), donc son graphe est au-dessous de chacune de ses tangentes. Comme la tangente en $x = 1$ a pour équation $y = x - 1$, on en déduit : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(x) \leqslant x - 1$. Il vient ensuite, via deux changements de variable successifs : $\forall x > -1$, $\ln(1 + x) \leqslant x$, puis $\boxed{\forall x < 1,\ \ln(1 - x) \leqslant -x}$.
Ensuite, soit $n \geqslant 1$ (et, normalement, $x > 0$ est déjà fixé aussi dès l'énoncé de la question III.3.). La fonction f_n est positive par définition.

De plus, pour tout $t \in]0, n[$, $f_n(t) = e^{n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)} t^{x-1}$, avec $\ln\left(1 - \dfrac{t}{n}\right) \leqslant -\dfrac{t}{n}$ par la question précédente, vu qu'on a bien $\dfrac{t}{n} < 1$ pour $t \in]0, n[$. On en déduit, par croissance de l'exponentielle et produit par une quantité positive : $f_n(t) \leqslant e^{n\times\left(-\frac{t}{n}\right)} t^{x-1} = e^{-t}t^{x-1}$. Enfin f_n est nulle sur $[n, +\infty[$, tandis que la fonction $t \longmapsto e^{-t}t^{x-1}$ y est positive, d'où finalement l'encadrement : $\boxed{\forall t > 0,\ 0 \leqslant f_n(t) \leqslant e^{-t}t^{x-1}.}$

b. Comme demandé, on applique le théorème de convergence dominée :
- Pour tout $n \geqslant 1$, f_n est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$ par TG.
- Soit $t > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $N \geqslant t$, par exemple $N = \lfloor t \rfloor + 1$. Alors, pour tout $n \geqslant N$, $t \in]0, n]$, et donc $f_n(t) = \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n t^{x-1}$. Or, $\left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)}$, et $\ln\left(1 - \dfrac{t}{n}\right) = -\dfrac{t}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, donc $\left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n = e^{n\left(-\frac{t}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{-t+o(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-t}$ par continuité de l'exponentielle.
  Donc $f_n(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-t}t^{x-1}$.
  On a ainsi prouvé que $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers la fonction $f : t \longmapsto e^{-t}t^{x-1}$ qui est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ par TG.
- De plus, pour tout $n \geqslant 1$ et pour tout $t > 0$, $|f_n(t)| \leqslant e^{-t}t^{x-1}$ par la question précédente, et on a prouvé dans la première question du problème que la fonction $t \longmapsto e^{-t}t^{x-1}$ est (continue bien sûr et) intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Donc, par le théorème de convergence dominée, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$.

Comme f_n est nulle sur $[n, +\infty[$, cela donne finalement : $\boxed{\displaystyle\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \Gamma(x),}$ et ce raisonnement a bien été mené pour tout $x > 0$.

III.4. Pour tout entier naturel n et tout $x > 0$, on pose $I_n(x) = \displaystyle\int_0^1 (1-u)^n u^{x-1} du$.

a. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$.
La fonction $\alpha : u \longmapsto (1-u)^n u^{x-1}$ est bien définie et continue sur $]0, 1]$ par TG.
De plus, $\alpha(u) \underset{u \to 0^+}{\sim} u^{x-1} = \dfrac{1}{u^{1-x}}$, avec $1 - x < 1$, donc α est intégrable sur $]0, 1]$ par comparaison (TC) de fonctions positives et critère de Riemann.
Cela assure $\boxed{\text{la bonne définition de } I_n(x)}$.
On définit maintenant sur $]0, 1]$ les fonctions $\alpha_1 : u \longmapsto (1-u)^n$ et $\alpha_2 : u \longmapsto \dfrac{u^x}{x}$. Ces fonctions sont de classe C^1, et on a $\alpha_1(u)\alpha_2(u)$ qui admet une limite finie pour $u \longrightarrow 0^+$, en l'occurrence 0. On en déduit, par intégration par parties :
$I_n(x) = \displaystyle\int_0^1 \alpha_1(u)\alpha_2'(u)du = \alpha_1(1)\alpha_2(1) - \lim_{u \to 0^+} \alpha_1(u)\alpha_2(u) - \int_0^1 \alpha_1'(u)\alpha_2(u)du = 0 - 0 + \frac{n}{x}\int_0^1 (1-u)^{n-1}u^x du$
D'où $\boxed{I_n(x) = \dfrac{n}{x} I_{n-1}(x+1)}$.

b. Soit $x > 0$.
On a $I_0(x) = \displaystyle\int_0^1 u^{x-1}du = \left[\frac{u^x}{x}\right]_0^1 = \frac{1}{x}$.
Soit $n \geqslant 1$. On a, par une récurrence immédiate,
$I_n(x) = \dfrac{n}{x} I_{n-1}(x+1) = \dfrac{n}{x} \times \dfrac{n-1}{x+1} I_{n-2}(x+2) = \dfrac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)} I_0(x+n) = \dfrac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$.
On a donc : $\boxed{I_n(x) = \dfrac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}}$

c. La fonction $t \longmapsto \dfrac{t}{n}$ réalise une bijection strictement croissante et de classe C^1 de $]0, n]$ sur $]0, 1]$. Via le changement de variable $u = \dfrac{t}{n}$, on obtient donc :

$$\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}dt = \int_0^1 (1-u)^n (nu)^{x-1} n du = n^x \int_0^1 (1-u)^n u^{x-1} du = n^x I_n(x).$$

Le résultat de la question 3.b. se réécrit ainsi : $\Gamma(x) = \displaystyle\lim_{n \to +\infty} n^x I_n(x)$. Et le calcul de la question précédente permet de conclure : $\boxed{\Gamma(x) = \displaystyle\lim_{n \to +\infty} n^x \times \frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n! n^x}{\prod_{k=0}^{n}(x+k)}}$.
Cette relation est appelée *formule de Gauss* (selon l'énoncé, mais n'est-ce pas plutôt la formule dite d'Euler dans la littérature ?).

III.5. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$.
L'indication donnée (fallait-il la prouver ?) est immédiate en remarquant qu'on a
$e^{xH_n} = e^{x\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}} e^{-x\ln(n)} = \left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n} e^{\frac{x}{k}}\right) \times \dfrac{1}{n^x}$.
Ensuite, d'après la formule de Gauss établie à la question précédente, on a :

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\prod_{k=0}^{n}(x+k)}{n! n^x} = \lim_{n \to +\infty} \frac{x}{n^x} \times \frac{\prod_{k=1}^{n}(k+x)}{\prod_{k=1}^{n} k} = \lim_{n \to +\infty} \frac{x}{n^x} \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{x}{k}\right).$$

Grâce à l'indication fournie, on réécrit :

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = \lim_{n \to +\infty} x e^{xH_n} \prod_{k=1}^{n}\left[\left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}}\right].$$

Or $H_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \gamma$ donc, par continuité de l'exponentielle, $e^{xH_n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} e^{x\gamma}$ et, finalement, par produit de limites,

$\boxed{\dfrac{1}{\Gamma(x)} = x e^{\gamma x} \displaystyle\lim_{n \to +\infty} \prod_{k=1}^{n}\left[\left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}}\right]}$.

III.6.

a. Il y a 2 méthodes pour cette question :

- On effectue un DL d'ordre 2 : $\ln(1+\frac{x}{k}-\frac{x}{k} \underset{k\to+\infty}{=} -\frac{x^2}{2k^2}+o(\frac{1}{k^2}) \underset{k\to+\infty}{\sim} -\frac{x^2}{2k^2} \leqslant 0$ et on conclut avec T.C.

- Si l'on veut rester dans les clous du sujet, on commence par réécrire la formule précédente :

$$\prod_{k=1}^{n}\left[\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-\frac{x}{k}}\right] \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\Gamma(x)xe^{\gamma x}}.$$

Par continuité de ln, on en déduit :

$$\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left[\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-\frac{x}{k}}\right]\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln\left(\frac{1}{\Gamma(x)xe^{\gamma x}}\right),\ i.\ e.$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\ln\left(1+\frac{x}{k}\right)-\frac{x}{k}\right] \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\ln\left(\Gamma(x)xe^{\gamma x}\right).$$

En particulier, on a prouvé que la série $\sum\limits_{k\geqslant 1}\left[\ln\left(1+\frac{x}{k}\right)-\frac{x}{k}\right]$ converge. Ceci ayant été démontré pour tout $x>0$, on a établi

$\boxed{\text{la convergence simple de la série de fonctions } \sum\limits_{k\geqslant 1} g_k \text{ sur }]0,+\infty[, \text{ où l'on pose } g_k : x\longmapsto \ln\left(1+\frac{x}{k}\right)-\frac{x}{k}}$.

b. On note $g=\sum\limits_{k=1}^{+\infty} g_k$ sur $]0,+\infty[$.

Outre la convergence simple sur $]0,+\infty[$ de $\sum\limits_{k\geqslant 1} g_k$ vers g établie à la question précédente, on a :

— Les fonctions g_k sont toutes de classe C^1 sur $]0,+\infty[$.

— Pour tout $k\geqslant 1$, pour tout $x>0$, $g_k'(x)=\frac{1}{k+x}-\frac{1}{k}=-\frac{x}{k(k+x)}$.

Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}_+^*$. On a donc $0<a\leqslant b$. Alors pour tout $k\geqslant 1$ et tout $x\in[a,b]$, $|g_k'(x)|\leqslant \frac{b}{k^2}$ et, comme $\sum\limits_{k\geqslant 1}\frac{b}{k^2}$ converge, on a établi la convergence normale, donc uniforme, de $\sum\limits_{k\geqslant 1} g_k'$ sur $[a,b]$.

On en déduit que $\boxed{g \text{ est de classe } C^1 \text{ sur }]0,+\infty[}$, avec : $\boxed{\forall x>0,\ g'(x)=\sum\limits_{k=1}^{+\infty} g_k'(x)=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k+x}-\frac{1}{k}\right)}$.

c. Par la question 6.a., on a, pour tout $x>0$,

$$g(x)=-\ln\left(\Gamma(x)xe^{\gamma x}\right)=-\ln\left(\Gamma(x)\right)-\ln(x)-\gamma x.$$

Dérivant cette relation sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient :

$$g'(x)=-\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}-\frac{1}{x}-\gamma,$$

c'est-à-dire, vu que $\psi=\frac{\Gamma'}{\Gamma}$, $\psi(x)=-g'(x)-\frac{1}{x}-\gamma$.

Comme $-g'(x)=-\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k+x}-\frac{1}{k}\right)=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\left(-\frac{1}{k+x}+\frac{1}{k}\right)$, on a finalement établi :

$$\boxed{\forall x>0,\ \psi(x)=-\frac{1}{x}-\gamma+\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+x}\right).}$$

III.7.

a. Posant $x=1$ dans la formule précédente, on trouve : $\psi(1)=-1-\gamma+\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$, d'où, par télescopage, $\psi(1)=-1-\gamma+1=-\gamma$.

De plus $\Gamma(1)=\int_0^{+\infty} e^{-t}dt=\lim\limits_{X\to+\infty}[-e^{-t}]_0^X=\lim\limits_{X\to+\infty} 1-e^{-X}=1$ donc, vu que $\psi(1)=\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)}$, on obtient $\Gamma'(1)=-\gamma$.

Mais en reprenant l'expression obtenue à la question 1.c., on constate que $\Gamma'(1)=\int_0^{+\infty} e^{-t}\ln(t)dt$, d'où finalement :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-t}\ln(t)dt=-\gamma.}$$

b. D'après la formule de la question 6.c., on a, pour tout $x > 0$,

$$\psi(x+1) - \psi(x) = -\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x+1}\right) - \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right)$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x+1} - \frac{1}{k} + \frac{1}{k+x}\right)$$

par somme de séries convergentes. Et donc par télescopage :

$$\psi(x+1) - \psi(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k+x} - \frac{1}{k+x+1}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{k+x} - \frac{1}{k+x+1}\right) = \frac{1}{x}.$$

On conclut : $\boxed{\psi(x+1) - \psi(x) = \frac{1}{x}}$

Remarque. *On aurait aussi pu procéder ainsi :*

$$\psi(x+1) - \psi(x) = \frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)} - \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \frac{d}{dx}\left(\ln\left(\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)}\right)\right).$$

Or, il est bien connu que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ (il suffit d'intégrer par parties), donc

$$\psi(x+1) - \psi(x) = \frac{d}{dx}(\ln(x)) = \frac{1}{x}.$$

En particulier, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\psi(k+1) - \psi(k) = \frac{1}{k}$.

Il s'ensuit, pour tout entier $n \geqslant 2$, $\boxed{\psi(n) = \psi(1) + \sum_{k=1}^{n-1}\big(\psi(k+1) - \psi(k)\big) = -\gamma + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}.}$

c. Soit $x > 0$ fixé. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit $j_k : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & \dfrac{1}{k+y+1} - \dfrac{1}{k+y+x} \end{array}\right.$.

Cette notation est discutable : il aurait peut-être été préférable de noter $j_{k,x}$, pour insister sur le fait que l'on travaille à $x > 0$ fixé, et que la convergence uniforme étudiée ici ne porte que sur la variable y.

On peut réécrire $j_k(y) = \dfrac{k+y+x-k-y-1}{(k+y+1)(k+y+x)} = \dfrac{x-1}{(k+y+1)(k+y+x)}$ donc,

$$\forall y > 0,\ |j_k(y)| \leqslant \frac{|x-1|}{(k+1)(k+x)}.$$

Comme $\sum_{k\geqslant 0} \dfrac{|x-1|}{(k+1)(k+x)}$ est une série convergente, vu que $\dfrac{|x-1|}{(k+1)(k+x)} \underset{k\to+\infty}{\sim} \dfrac{|x-1|}{k^2}$, on a

$\boxed{\text{la convergence normale, donc uniforme, de } \sum_{k\geqslant 0} j_k \text{ sur }]0,+\infty[}$.

Ensuite, reprenant la formule de 6.c., on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\psi(x+n) - \psi(1+n) = -\frac{1}{x+n} + \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x+n}\right) - \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1+n}\right),$$

et selon le même principe de calcul qu'à la question précédente, on aboutit à :

$$\psi(x+n) - \psi(1+n) = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{k+1+n} - \frac{1}{k+x+n}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} j_k(n).$$

Or, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $j_k(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc, par le théorème de la double limite (qui s'applique ici car la série de fonctions étudiée converge uniformément sur un voisinage de $+\infty$),

$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\big(\psi(x+n) - \psi(1+n)\big) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} j_k(n) = 0.}$

III.8. Par analyse-synthèse :

— **Analyse** : Soit f solution. On va montrer que f vérifie la formule de ψ établie en 6.c., à savoir :

$$\forall x>0, \qquad f(x)=-\frac{1}{x}-\gamma+\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+x}\right)$$

Puisque $\dfrac{1}{t}=f(t+1)-f(t)$ pour tout $t>0$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+x}\right) &= \sum_{k=1}^{+\infty}\big(f(k+1)-f(k)-f(k+x+1)+f(k+x)\big)\\
&= \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\big(f(k+1)-f(k)\big)+\sum_{k=1}^{n}\big(f(k+x)-f(k+x+1)\big)\right)\\
&= \lim_{n\to+\infty}\left(f(n+1)-\underbrace{f(1)}_{=-\gamma}+f(1+x)-f(n+x+1)\right)\\
&= f(x+1)+\gamma-\underbrace{\lim_{n\to+\infty}\big(f(x+1+n)-f(1+n)\big)}_{=0}=f(x)+\frac{1}{x}+\gamma,
\end{aligned}$$

ce qui montre bien la relation voulue, et donc $f=\psi$.

— **Synthèse** : La seule solution éventuelle au problème est donc ψ. Mais on a prouvé en 7.a., 7.b. et 7.c. que ψ satisfait les trois conditions voulues, donc finalement $\boxed{\psi \text{ est solution, et c'est la seule}}$.

Autour de la fonction Digamma

III.9. Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

a. On suppose les boules indiscernables, ce qui implique qu'à tout moment de l'expérience, chaque boule de l'urne a la même probabilité d'être tirée, peu importe son numéro (*cette hypothèse n'était pas faite par l'énoncé – est-ce un oubli ou un acte volontaire de la part du concepteur du sujet ? – mais elle est éminemment raisonnable*).
Avec cette hypothèse,

$$\boxed{X \text{ suit la loi uniforme sur } \{1,\dots,n\} \text{ et donc } E(X)=\frac{n+1}{2} \text{ (et pour tout } k\in\{1,\dots,n\},\ P(X=k)=\frac{1}{n})}.$$

b. Vu l'expérience, Y prend ses valeurs dans $\{1,\dots,n\}$.
Soit $k\in\{1,\dots,n\}$.
On utilise la formule des probabilités totales, avec le système complet d'événements $\{(X=1),(X=2),\dots,(X=n)\}$:

$$P(Y=k)=\sum_{j=1}^{n}P_{(X=j)}(Y=k)\times P(X=j)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}P_{(X=j)}(Y=k).$$

On calcule cette somme en distinguant selon les valeurs de j ($j=k$ ou $j\neq k$). En effet, pour $j=k$, le premier tirage aura amené k boules numérotées k en plus dans l'urne, tandis que pour $j\neq k$, le premier tirage n'aura pas amené de boule numérotée k supplémentaire dans l'urne. Ainsi :

$$\begin{aligned}
P(Y=k)=\frac{1}{n}\left(P_{(X=k)}(Y=k)+\sum_{1\leqslant j\leqslant n,\ j\neq k}P_{(X=j)}(Y=k)\right)&=\frac{1}{n}\left(\frac{k+1}{k+n}+\sum_{1\leqslant j\leqslant n,\ j\neq k}\frac{1}{j+n}\right),\\
&=\frac{1}{n}\left(\frac{k}{k+n}+\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j+n}\right).
\end{aligned}$$

Or, par 7.b., $\psi(2n+1)-\psi(n+1)=\sum\limits_{k=1}^{2n}\dfrac{1}{k}-\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}=\sum\limits_{k=n+1}^{2n}\dfrac{1}{k}=\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{1}{j+n}$, d'où finalement :

$$\boxed{\forall k\in\{1,\dots,n\},\ P(Y=k)=\frac{1}{n}\left(\frac{k}{k+n}+\psi(2n+1)-\psi(n+1)\right).}$$

Et il faut corriger ce que demandait l'énoncé, c'est-à-dire prouver cette relation pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, alors qu'elle n'est valable que pour $k\in\{1,\dots,n\}$.

c. On a $E(Y) = \sum\limits_{k=1}^{n} kP(X=k) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\left(\frac{k}{k+n} + \psi(2n+1) - \psi(n+1)\right)$, donc :

$$E(Y) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n(n+k)} + \frac{n+1}{2}\big(\psi(2n+1) - \psi(n+1)\big).$$

Utilisant l'indication fournie, $E(Y) = \dfrac{1-n}{2} + n\big(\psi(2n+1) - \psi(n+1)\big) + \dfrac{n+1}{2}\big(\psi(2n+1) - \psi(n+1)\big)$ et donc

$$\boxed{E(Y) = \frac{1-n}{2} + \frac{3n+1}{2}\big(\psi(2n+1) - \psi(n+1)\big).}$$

Et on est un peu perplexe devant ce résultat : était-ce ce à quoi l'énoncé voulait arriver ?

Remarque. *Il n'était pas demandé de démontrer l'indication fournie, mais elle n'avait rien d'extraordinaire :*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n(n+k)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n} - \frac{k}{n+k}\right) = \frac{n+1}{2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k-n}{n+k} = \frac{n+1}{2} - \sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{n}{n+k}\right)$$

$$= \frac{n+1}{2} - n + n\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \frac{1-n}{2} + n\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1-n}{2} + n\big(\psi(2n+1) - \psi(n+1)\big).$$

Petite vérification avec Pyzo et Maple

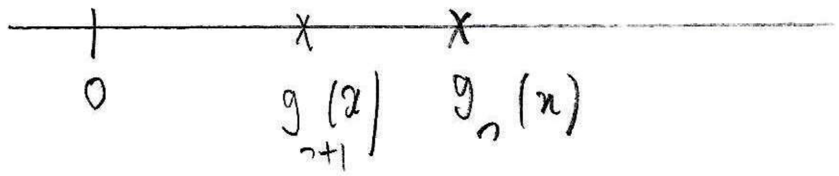
```
def Y(n):
    x=randint(1,n)
    L=[i for i in range(1,n+1)]
    L=L+[x for i in range(x)]
    tirage=randint(0,len(L)-1)
    return L[tirage]
def espY(n,nb):
    s=0
    for k in range(nb):
        s=s+Y(n)
    return s/nb
 # et l'exécution :      >>> espY(13,1000001) = 7.484631515368485
et la valeur exacte :
                              10020063511/1338557220 = 7.485719222.....
```

exercice 2*

1) Posons $g_n = f - f_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $g_{n+1} \leq g_n$ et

(g_n) converge simplement vers 0 sur $[a,b]$, enfin

par TG g_n est continue sur $[a,b]$ pour tout n.



Mq (g_n) C.V. sur $[a,b]$ vers 0. Par l'absurde.

si $\exists \varepsilon > 0 \setminus \forall N \in \mathbb{N} \ \exists x \in [a,b] \ \exists n \geq N \mid |g_n(x)| > \varepsilon$

Pour $N = 0$ $\exists n_0 \geq 0$ $\exists x_0 \setminus |g_{n_0}(x_0)| > \varepsilon$

$N = n_0 + 1$ $\exists n_1 > n_0$ $\exists x_1 \setminus |g_{n_1}(x_1)| > \varepsilon$

et par récurrence $\exists\ n_0 < n_1 < n_2 < \cdots < n_p < \cdots$ ds $\mathbb{N}$

$\exists\ x_0, x_1, x_2, \ldots, x_p \cdots$ ds $[a,b]$

tel que : $\forall p \in \mathbb{N}$ $|g_{n_p}(x_p)| > \varepsilon$

B.W. : $\exists \varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ st $\nearrow$, $\exists \lambda \in [a,b] \setminus$

$x_{\varphi(p)} \xrightarrow[p \to \infty]{} \lambda$

$\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall p \geq k$ $\quad \varepsilon < g_{\varphi(p)}(x_{\varphi(p)}) \leq g_k(x_{\varphi(p)})$

Faisons tendre $p \to +\infty$, il vient par continuité ②

de g_k, $\begin{vmatrix} g_k(\lambda) \geq \varepsilon \\ \forall k \in \mathbb{N} \end{vmatrix}$ absurde $g_k(\lambda) \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$ (c.s.

cl° : $\boxed{(f_n) \text{ c.U. vers } f \text{ sur } [a,b]}$

Rem. Si $f_n(x) = 1 - x^n$ sur $[0,1)$, $f_n \leq f_{n+1}$

(f_n) c.s. (et non CU) sur $[0,1]$.

2) * Commençons par un exemple : $f = 0$

$\forall x \in [a,b] \qquad f_n(a) \leq f_n(x) \leq f_n(b)$

donc $\|f_n - 0\|_{\infty, [a,b]} \leq \max\left(|f_n(a)|, |f_n(b)|\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

* Cas général. Par cvg simple, f est aussi croissante $/_{[a,b]}$

$\forall x \in [a,b] \qquad f_n(a) - f(b) \leq f_n(x) - f(x) \leq f_n(b) - f(a)$

L'idée c'est que si a et b sont proches et n gd ↑ sera petit.

On va découper $[a,b]$ en segment $[a',b']$ | $|f_n(b') - f(a')| \leq \varepsilon$.

Soit $\varepsilon > 0$, avec Heine, $\exists \alpha > 0 \mid \forall (x,y) \in [a,b]^2$,

$|x - y| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon/2$

soit $k \in \mathbb{N}^* \mid \underline{\frac{b-a}{k} \leqslant \alpha}$ et σ la subdivision : ③

$$\sigma = (x_0 = a < \cdots < x_k = b) \quad \text{et} \quad x_i = a + i\,\frac{b-a}{k}$$

$\forall i \in [\![0,k]\!], \exists n_i \in \mathbb{N} \mid \forall n \geqslant n_i \quad |f_n(x_i) - f(x_i)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$

Posons $\underline{\underline{N_0}} = \max(n_0, \dots, n_k) \underline{\underline{\in \mathbb{N}}}$, $\forall n \geqslant N_0$ et $\forall i \in [\![0,k]\!]$:

$$|f_n(x_i) - f(x_i)| \leqslant \varepsilon/2$$

$\forall i \in [\![0,k-1]\!]$

$\underline{\underline{\forall x \in [x_i, x_{i+1}]}}$ et $\underline{\underline{\forall n \geqslant N_0}}$

$$\begin{aligned} f_n(x) - f(x) &\leqslant f_n(x_{i+1}) - f(x_i) \\ &\leqslant f_n(x_{i+1}) - f(x_{i+1}) + f(x_{i+1}) - f(x_i) \\ &\leqslant |\quad\text{———}\quad| + |\quad\text{———}\quad| \\ &\leqslant \underbrace{\varepsilon/2}_{n \geqslant N_0} + \underbrace{\varepsilon/2}_{|x_{i+1} - x_i| \leqslant \alpha} \\ &\leqslant \varepsilon \end{aligned}$$

de même $\quad f_n(x) - f(x) \geqslant f_n(x_i) - f(x_{i+1})$

$$\begin{aligned} &\geqslant f_n(x_i) - f(x_i) + f(x_i) - f(x_{i+1}) \\ &\geqslant -\varepsilon/2 + (-\varepsilon/2) \\ &\geqslant -\varepsilon \end{aligned}$$

d'où $\underline{|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon}$ $\quad$ d'où $\boxed{\text{cv} / [a,b]}$

3°) Posons $f(t) = t + \frac{1}{2}(x - t^2)$, $f'(t) = 1 - t \geq 0$

t	0		1
f'		$+$	
f	$0 \leq x/2$	$\nearrow$	$\frac{x+1}{2} \leq 1$

donc $[0,1]$ stable par f et $f \nearrow$ donc (u_n) monotone bornée

Comme $f(t) = t \iff t^2 = x \iff t = \pm\sqrt{x} \geq 0 \iff t = \sqrt{x}$

<u>cqfd</u> (p_n) c.s. vers $g : x \longmapsto \sqrt{x}$ sur $[0,1]$

Comme (p_n) est croissante, avec le 1°) on conclut :

d'où $\boxed{(p_n) \text{ c.u. sur } [0,1] \text{ vers } x \longmapsto \sqrt{x}}$

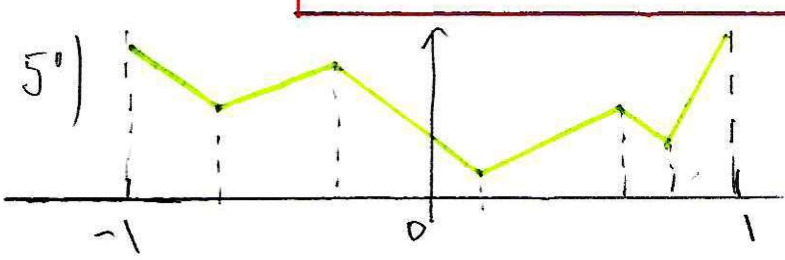
4°) Par récurrence, p_n est un polynôme en x.

* Posons $q_n(x) = p_n(x^2)$, par critère séq., (q_n) c.s. vers $h : x \longmapsto \sqrt{x^2} = |x|$ sur $[-1,1]$

* $\|q_n - h\|_{\infty,[-1,1]} = \sup_{x \in [-1,1]} |p_n(x^2) - h(x)| \leq \|p_n - g\|_{\infty,[0,1]}$

d'où $\boxed{(q_n) \text{ c.u. sur } [-1,1] \text{ vers } x \longmapsto |x|}$

5°)



Mq E sev de $\mathcal{F}([-1,1],\mathbb{R})$ ⑤

* $\theta \in E$
* $\forall (f,g) \in E^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$

$\exists\, \sigma = (-1 = a_0 < \dots < a_n = 1)$ subdivision de $[-1,1]$

$\exists\, \tau = (-1 = b_0 < \dots < b_p = 1)$ ———

telles que $\forall i \in [\![0, n-1]\!]$ f affine sur $[a_i, a_{i+1}]$

$\forall j \in [\![0, p-1]\!]$ g ——— $[b_j, b_{j+1}]$.

On trie $\{a_0, \dots, a_n\} \cup \{b_0, \dots, b_p\} = \{c_0 < \dots < c_q\}$

$\rho = (-1 = c_0 < \dots < c_q = 1)$ est une subdivision de $[-1,1]$

et $\forall k \in [\![0, q-1]\!]$ $[c_k, c_{k+1}] \subset [a_i, a_{i+1}] \cap [b_j, b_{j+1}]$

donc $\lambda f + g$ est affine sur $[c_k, c_{k+1}]$

cl° $\boxed{E\ \mathbb{R}\text{-ev.}}$

Pour "approximable" on fait "comme pour les fct en escalier"

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \alpha > 0 \setminus \forall (x,y) \in [-1,1]^2\ |x-y| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon/2$

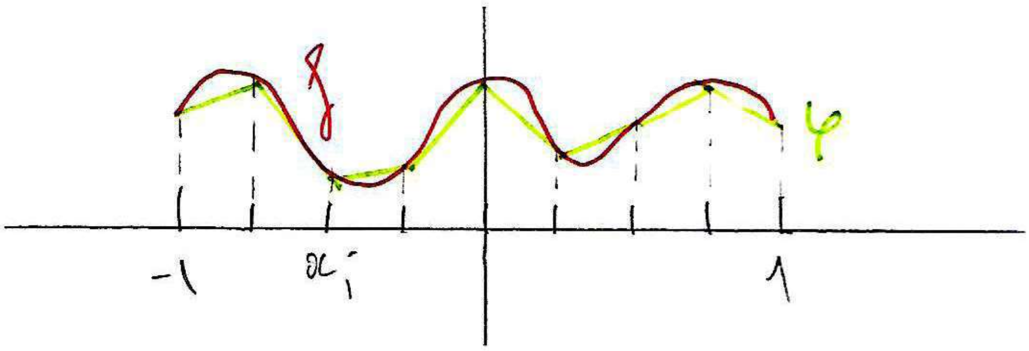
(tjs Heine)

Soit $k \in \mathbb{N}^* \setminus \frac{2}{k} \leq \alpha$ et $\sigma = (x_i)$ $x_i = -1 + i\frac{2}{n}$

Soit φ définie sur $[-1,1]$ telle que

$$\forall i \in [\![0, k-1]\!] \ \forall x \in [x_i, x_{i+1}] \quad \varphi(x) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i) + f(x_i)$$

(φ affine/morcx, $C^0/_{[-1,1]}$ et interpole f aux x_i



$\forall x \in [-1,1]$, $\exists i \in [\![0, k-1]\!] \setminus \quad x \in [x_i, x_{i+1}]$

$$|f(x) - \varphi(x)| \leq |f(x) - f(a_i)| + |f(a_i) - \varphi(x)|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \left|\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}\right| (x - x_i)$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \times 1$$

$$\leq \varepsilon \quad \text{cqd} \cdot \varphi \in E \text{ et } \|f - \varphi\|_{\infty, [-1,1]} \leq \varepsilon$$

d'o $\boxed{E \text{ approxime uniformément toute fct } C^0 \text{ sur } [-1,1]}$

<u>base</u>

* $\forall (a_1, \dots, a_n) \in [-1,1]^n \setminus a_1 < \dots < a_n$

$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_{a_i} = 0$

Soit $i \in [\![1, n]\!] \setminus a_i \in]-1, 1[$, si $\lambda_i \neq 0$ ⑦

$$f_{a_i} = \underbrace{- \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{\lambda_j}{\lambda_i} f_{a_j}}_{g}$$

Or g est dérivable en a_i et pas f_{a_i} : $\rightarrow\leftarrow$ donc $\underline{\lambda_i = 0}$

il ne reste donc que $a_1 = -1$ et/ou $a_n = 1$

or si $\forall x \in [-1, 1]$ $\lambda_1 |x+1| + \lambda_n |x-1| = 0$

pour $x = -1$: $\lambda_n = 0$ d'où : $(f_a)_{a \in [-1,1]}$ libre

$x = 1$: $\lambda_1 = 0$

* Soit $\varphi \in E$, $\exists\ \sigma = (a_0 = -1 < \cdots < a_n = 1)$ telle que

$\forall i \in [\![0, n-1]\!]\ \forall x \in [a_i, a_{i+1}] : \varphi(x) = \alpha_i x + \beta_i$

Notons $E_\sigma = \{ f \in E \setminus \forall i \in [\![0, n-1]\!],\ f$ affine sur $[\cancel{x_i}, \cancel{x_{i+1}}]\}$

a_i, a_(i+1)

Soit $\phi : E_\sigma \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$

$f \longmapsto (f(a_0), \cdots, f(a_n))$

on a ϕ linéaire et ϕ injectif ($\ker \phi = \{0\}$)

d'où $\dim E_\sigma = \dim \operatorname{Im} \phi \subset \mathbb{R}^{n+1}$

donc $\dim E_\sigma \leq n+1$

Or $(\delta_{a_0}, \dots, \delta_{a_n})$ est libre dans E_σ d'où (8)

$\dim E_\sigma = n+1$ et $(\delta_{a_0}, \dots, \delta_{a_n})$ base de E_σ

cqfd $\exists ! (\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \varphi = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \delta_{a_i}$

d'où $\boxed{(\delta_a)_{a \in [-1,1]} \text{ base de } E}$

6°) Avec le 4°), $r_n(t) = c\, q_n\left(\frac{x}{c}\right)$ CU vers $x \longmapsto |x|$ sur $[-c, c]$ $(\forall c > 0)$, d'où :

$\forall a \in \mathbb{R}$, $\forall c > 0$, $u_n^{(a)}(t) = r_n(t-a)$ C.U. vers $x \longmapsto |x-a|$ sur $[-c-a, c-a]$ et donc en prenant c assez grand :

$\forall a \in [-1,1]$ $(u_n^{(a)})_{n \in \mathbb{N}}$ C.U. vers δ_a sur $[-1,1]$.

Soit f continue de $[-1,1]$ ds $\mathbb{R}$ et soit $\varepsilon > 0$

$\exists \varphi \in E \mid \|f - \varphi\|_{\infty, [-1,1]} \leq \varepsilon$ (c'est le 5°)).

donc $\exists k \in \mathbb{N}$, $\exists (a_0, \dots, a_k) \in [-1,1]^{k+1}$, $\exists (\lambda_0, \dots, \lambda_{k+1}) \in \mathbb{R}^{k+1}$

tel que $\varphi = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i \delta_{a_i}$

(9)

Posons $P_n = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i u_n^{(a_i)}$, il est clair que P_n est polynomial (car p_n, q_n, r_n le sont).

$$\|P_n - \varphi\|_{\infty,[-1,1]} \leq \sum_{i=0}^{k} |\lambda_i| \, \|u_n^{(a_i)} - f_{a_i}\|_{\infty,[-1,1]} = \alpha_n$$

Comme $\alpha_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \|P_{n_0} - \varphi\|_{\infty,[-1,1]} \leq \varepsilon/2$

<u>cqs</u> $\|f - P_{n_0}\|_{\infty,[-1,1]} \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \leq \varepsilon$

d° $\boxed{\text{Encore une démo. de S.W. !}}$

Exercice 3*

1°) Posons $u_n(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^n \cos(\pi 9^n x)$

* $\forall n \in \mathbb{N}$ u_n est C^0 par TG

* $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $|u_n(x)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n = a_n$ & (Σa_n) cvg

donc (Σu_n) C.N$/\mathbb{R}$ par th. de continuité :

$$\boxed{W \ C^0 \text{ sur } \mathbb{R}}$$

car les 2 séries cvg.

2°) * $\forall x \in \mathbb{R}$ $|W(x)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 3$: $\boxed{W \text{ bornée}}$

* $\forall x \in \mathbb{R}$ $W(x+2) = W(x)$; $\boxed{W \text{ est périodique}}$

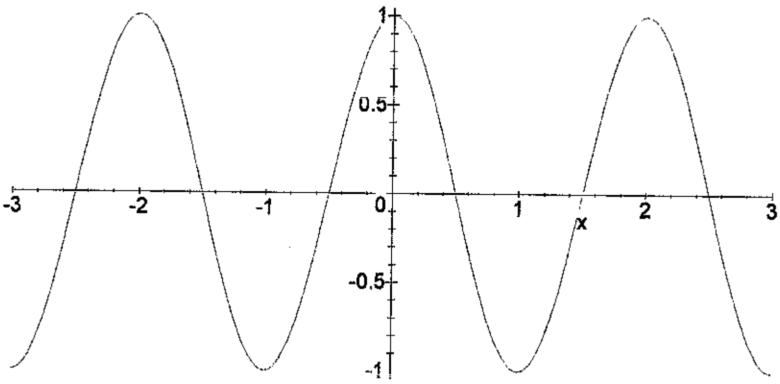
3°) Voir page ②

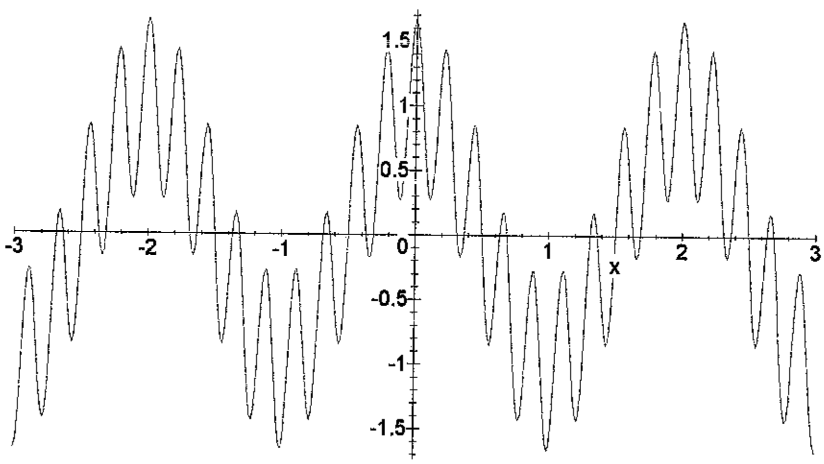
4°) Le fait que la série $(\Sigma u_n')$ diverge ne permet pas de conclure car $(\Sigma u_n')$ CN$/\mathbb{R}$ n'est qu'une condition suffisante mais non nécessaire.

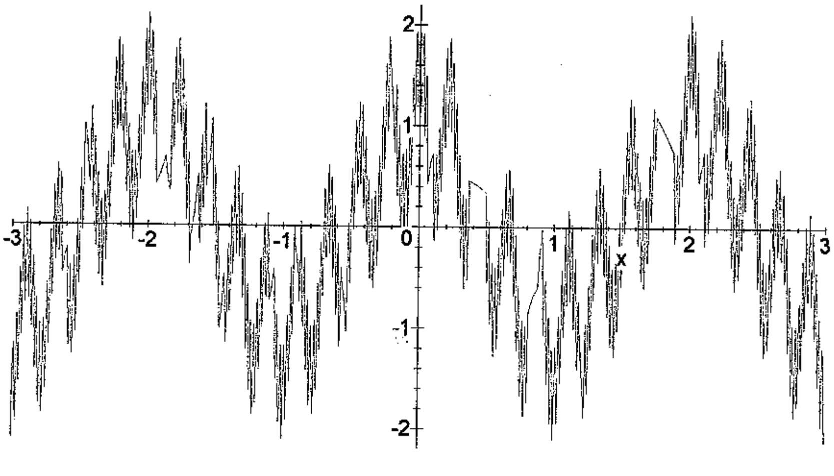
```
> 
> W:=(n,x)->sum((2/3)^p*cos(Pi*9^p*x),p=0..n);
```

$$W := (n, x) \to \sum_{p=0}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^p \cos(\pi\, 9^p\, x)$$

```
> plot({W(0,x)},x=-3..3);plot({W(1,x)},x=-3..3);plot({W(2,x)},x=-3
  ..3);
```








```
> 
```

5°) $\forall h \neq 0$

$$|S_m(h)| \leq \sum_{n=0}^{m-1} \left(\frac{2}{3}\right)^n \left| \frac{\cos \pi g^n(a+h) - \cos \pi g^n a}{h} \right|$$

utilisons... les A.F. !! ;

$$|S_m(h)| \leq \sum_{n=0}^{m-1} \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{\pi g^n(a+h) - \pi g^n a}{h} \underbrace{|\cos c|}_{\leq 1}$$

$$\leq \sum_{n=0}^{m-1} \pi 6^n = \pi \frac{6^m - 1}{6 - 1} \leq \frac{\pi 6^m}{5}$$

d'où $\boxed{\forall m \geq 1,\ \forall h \neq 0\ |S_m(h)| \leq \frac{\pi 6^m}{5}}$

6°) analyse : $x = g^m a = p_m + \lambda_m \Rightarrow p_m - \frac{1}{2} \leq x < p_m + \frac{1}{2}$

$\Rightarrow p_m \leq x + \frac{1}{2} < p_m + 1$

synthèse posons $\underline{p_m = E(g^m a + \frac{1}{2})}$ & $\underline{\lambda_m = g^m a - p_m}$

E(x) : partie entière de x

On a $\underline{p_m \in \mathbb{Z} \text{ et } \lambda_m \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[}$

7°) $\underline{h_m = \frac{-\lambda_m + 1}{g^m}}$ et $\underline{h'_m = \frac{-\lambda_m - 1}{g^m}}$ conviennent.

de + : $h_m \times h'_m = \frac{\lambda_m^2 - 1}{g^{2m}} < 0$ car $|\lambda_m| \leq 1/2$ donc $\lambda_m^2 \leq \frac{1}{4}$

d h_m & h'_m existent et sont de signes contraires

8°) $\forall n \geq m$, $\cos \pi g^n (a + h_m) = \cos\left(\pi g^{n-m} g^m (a + h_m)\right)$

$= \cos\left(\pi g^{n-m} (p_m + \lambda_m) + \pi g^{n-m} (-\lambda_m + 1)\right)$

$= \cos\left(\pi g^{n-m} p_m + \pi g^{n-m}\right)$ comme g^{n-m} est impair

$= - \cos\left(\pi g^{n-m} p_m\right)$ or $\cos k\pi = (-1)^k$

$= -(-1)^{g^{n-m} p_m}$ et $(-1)^{gk} = ((-1)^g)^k = (-1)^k$

$= (-1)^{p_m + 1}$ on fait de même avec h'_m

d' : $\boxed{\forall n \geq m \quad \cos \pi g^n (a + h) = (-1)^{p_m+1} \text{ pour } h = h_m \text{ et } h = h'_m}$

9°) $$R_m(h_m) = \sum_{n=m}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{(-1)^{p_m+1} - \cos \pi g^{n-m} (p_m + \lambda_m)}{h_m}$$

$$= \sum_{n=m}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{(-1)^{p_m+1} - (-1)^{g^{n-m} p_m} \cos(\pi g^{n-m} \lambda_m)}{h_m}$$

$$= \sum_{n=m}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{(-1)^{p_m+1} \left(1 + \cos(\pi g^{n-m} \lambda_m)\right)}{h_m}$$

donc $R_m(h_m) = \frac{(-1)^{p_m+1}}{h_m} \sum_{n=m}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \left(1+\cos(\pi g^{n-m} \lambda_m)\right)$

donc $|R_m(h_m)| = \frac{g^m}{|-\lambda_m+1|} \sum_{n=m}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \left(1+\cos(\pi g^{n-m} \lambda_m)\right)$

$\geqslant \frac{2}{3} g^m \sum_{n=m}^{\infty}$ ————

↳ car $|-\lambda_m+1| \leqslant \frac{1}{2}+1 = \frac{3}{2}$ dc $\frac{1}{|-\lambda_m+1|} \geqslant \frac{2}{3}$

Comme $\left| \begin{array}{l} 1+\cos \pi \lambda_m \geqslant 1 \quad \text{car } |\lambda_m \pi| \leqslant \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos(\pi \lambda_m) \geqslant 0 \\ \text{et} \\ \forall n > m \quad 1+\cos(\pi g^{n-m} \lambda_m) \geqslant 1-1 \geqslant 0 \end{array} \right.$

d'où $R_m(h_m) \geqslant \frac{2}{3} g^m \left(\left(\frac{2}{3}\right)^m + 0 + 0 \dots\right) = \frac{2}{3} 6^m$

On a la m̂ chose pour h'_m

d $\boxed{|R_m(h_m)| \geqslant \frac{2}{3} 6^m \quad \& \quad |R_m(h'_m)| \geqslant \frac{2}{3} 6^m}$

10) $|R_m(h_m)| \geqslant \frac{2}{3} 6^m \geqslant \frac{\pi}{5} 6^m$ car $\frac{\pi}{5} = 0{,}62\ldots \leqslant \frac{2}{3} = 0{,}66\ldots$

et $\frac{\pi}{5} 6^m \geqslant |S_m(h_m)|$ avec le 5) donc $\boxed{|R_m(h_m)| \geqslant |S_m(h)|}$

idem pour h'_m.

11°) $$\left|\frac{W(a+h_n)-W(a)}{h_n}\right| = \left|S_n(h_n)+R_n(h_n)\right|$$

$$\geq \Big||R_n(h_n)|-|S_n(h_n)|\Big| = |R_n(h_n)|-|S_n(h_n)|$$

$$\geq \frac{2}{3}6^n - \frac{\pi}{5}6^n = \left(\frac{2}{3}-\frac{\pi}{5}\right)6^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

Or $|h_n| = \left|\frac{-\lambda_n+1}{9^n}\right| \leq \frac{1/2}{9^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ donc :

$$h_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad \left|\frac{W(a+h_n)-W(a)}{h_n}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$$

Par contraposée du critère séquentiel : <u>W non dérivable en a</u>

de plus, on a le même résultat pour h'_n. Vu l'expression de $R_n(h_n)$ en haut de la page 5, $R_n(h_n)$ et $R_n(h'_n)$ sont de signes contraires donc

$\frac{W(a+h_n)-W(a)}{h_n}$ et $\frac{W(a+h'_n)-W(a)}{h'_n}$ sont de signes contraires et tendent en module vers l'infini.

On en conclut que $h \longmapsto \frac{W(a+h)-W(a)}{h}$ n'admet pas de limite en 0 et donc W n'admet pas de tangente même verticale en a,

Enfin comme h_m & h'_m sont de signes contraires, W n'est pas non plus dérivable à gauche et à droite

cl $\boxed{W \text{ non dérivable en } a, \forall a \in \mathbb{R} \text{ et } C^0/\mathbb{R}}$

12°) * Si W était lipschitzienne il existerait $k > 0$ |
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad |W(x)-W(y)| \leq k|x-y|$

Pour $x = a + h_m$ & $y = a$ notations du 5°-11°),

$\forall m \geq 1; \left|\frac{W(a+h_m)-W(a)}{h_m}\right| \leq k$, absurde car tend vers l'infini qd $m \to \infty$ cl; $\boxed{W \text{ non lipschitzienne}}$

* L'idée : W unif. C^0 sur $[0,2]$ et 2-périodique.
W étant continue sur $[-1,3]$ elle y est uniformément continue (théorème de Heine), donc
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \alpha > 0 \ \forall (x,y) \in [-1,3]^2 \ |x-y| \leq \alpha \Rightarrow |W(x)-W(y)| \leq \varepsilon$

Quitte à diminuer le α on peut supposer $\underline{\alpha \leq 1}$

$\underline{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2} \setminus \underline{|x-y| \leq \alpha}$

$\exists n \in \mathbb{Z} \mid x - 2n \in [0, 2[$ avec $n = E\left(\frac{x}{2}\right)$

Encadrons $y - 2n$:

$$x - \alpha \leq y \leq x + \alpha$$

$$-1 \leq -\alpha \leq x - \alpha - 2n \leq y - 2n \leq x + \alpha - 2n < 2 + \alpha \leq 3$$

On en déduit $(x-2n, y-2n) \in [-1, 3]^2$ et

$|(x-2n) - (y-2n)| = |x-y| \leq \alpha$ donc $\underline{|W(x) - W(y)| \leq \varepsilon}$

par 2-périodicité

cl : $\boxed{W \text{ est uniformément continue sur } \mathbb{R},}$

13°) Considérons $g_n = \frac{1}{2^n} W$, par TG, comme $W = 2^n g_n$, g_n

est C^0 nulle part dérivable sur $\mathbb{R}$,

$\forall x \in [a,b], |g_n(x)| \leq \frac{1}{2^n} 3 = \varepsilon_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ donc $\|g_n - \Theta\|_{\infty, \mathbb{R}} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

d'où (g_n) c.u. vers Θ sur $[a,b]$

Soit f continue sur $[a,b]$. Il existe une suite (φ_n) de fonctions polynômiales (Stone Weierstrass) qui converge uniformément vers f sur $[a,b]$. Posons $f_n = \varphi_n + g_n$. Par TG, f_n est continue et nulle part dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$0 \leq \|f_n - f\|_{\infty,[a,b]} \leq \underbrace{\|\varphi_n - f\|_{\infty,[a,b]}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0} + \underbrace{\|g_n - 0\|_{\infty,[a,b]}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$$

Par théorème d'encadrement, $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

cl : $\boxed{(f_n) \text{ suite de fct } C^0 \text{ \& nulle part dérivable sur } \mathbb{R} \text{ vérifie } (f_n) \text{ C.U. vers } f \text{ sur } [a,b].}$

Interprétation (evn) : $A = \{$fonction C^0 et nulle part dérivable$\}$ est dense dans $E = C^0([a,b],\mathbb{R})$ muni de la $\|\ \|_\infty$ sur $[a,b]$.