

exercice 2 a) p 38

n	0	1	2	3	4	5
a_n	1	1	1	$5/6$	$17/24$	$73/120$
na_n	0	1	2	$5/2$	$17/6$	$73/24$

$$H_n : \overbrace{0 < a_{n+1} < a_n}^{i)} , \overbrace{na_n \leq (n+1)a_{n+1}}^{ii)} \text{ et } \overbrace{a_n \geq \frac{a_{n-2}}{2}}^{iii)}$$

H_n vrai pour $n \in \llbracket 0, 4 \rrbracket$, si H_i vrai jusqu'à $n \geq 4$

$$* i) \quad a_{n+1} = a_n - \frac{a_{n-2}}{2(n+1)} < a_n \quad (\text{car } a_{n-2} > 0)$$

$$* ii) \quad (n+1)a_{n+1} = na_n + a_n - \frac{a_{n-2}}{2} \geq na_n \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{2^e partie} \\ \text{de i)} \end{array}$$

$$\text{et donc } a_{n+1} \geq \frac{n}{n+1} a_n > 0$$

$$* iii) \quad a_n \leq \frac{(n+1)a_{n+1}}{n} \text{ et } a_{n-1} \leq \frac{n}{n-1} a_n \leq \frac{(n+1)a_{n+1}}{n-1}$$

$$\text{donc } \frac{a_{n-1}}{2} \leq \frac{n+1}{2(n-1)} a_{n+1}$$

$$\text{or } \forall n \geq 4 \quad \frac{n+1}{2(n-1)} \leq 1 \quad \text{donc}$$

$$\frac{a_{n-1}}{2} \leq a_{n+1} \quad (iii)$$

d'où $(a_n) \searrow$ et $(na_n) \nearrow$