CCP - MP$_1$ - 2011 : exercice 1

1. Si $|x| \leq 1$ $\frac{2x^n}{n^2-1} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, $\frac{1}{n^2} \geq 0$ et $\left(\sum \frac{1}{n^2}\right)$ cvg

d'où par TC $\left(\sum \frac{2x^n}{n^2-1}\right)$ cvg

si $|x| > 1$, par cc, $\left|\frac{2x^n}{n^2-1}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$

d'où : $\boxed{R = 1}$

2. $\frac{1}{n^2-1} = \frac{1}{(n-1)(n+1)} = \underline{\frac{1/2}{n-1} - \frac{1/2}{n+1}}$

$\forall |x| < 1$, $\left(\sum \frac{x^n}{n-1}\right)$ et $\left(\sum \frac{x^n}{n+1}\right)$ cvg (Abel) on peut

donc "éclater" : $\forall |x| < 1$, $S(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n-1} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$

$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n} - \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n}$ on suppose $x \neq 0$,

$S(x) = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} - \frac{1}{x} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

$= -x\ln(1-x) - \frac{1}{x}\left(-\ln(1-x) - x - \frac{x^2}{2}\right)$.

d'où $\boxed{S(0) = 0 \text{ et } \forall x \in]-1,1[-\{0\} \quad S(x) = -\left(x - \frac{1}{x}\right)\ln(1-x) + 1 + \frac{x}{2}}$

3°) Par simple DL (notamment) en 1 de $\nearrow$, $\boxed{\lim_{x \to 1^-} S(x) = \frac{3}{2}}$ Th. radial exercice 2)

1) On injecte $y(x)$ dans $(E1)$:

$$2x\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}\,x^n + \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}\,x^n - \sum_{n=0}^{\infty}a_n\,x^n = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}\,x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}\,x^n - \sum_{n=0}^{\infty}a_n\,x^n = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)a_{n+1}\,x^n + \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}\,x^n - \sum_{n=0}^{\infty}a_n\,x^n = 0$$

suite: plus bas

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n=0: & (0+1)a_{0+1} - a_0 = 0 \\ \forall n\geq 1: & 2n(n+1)a_{n+1} + (n+1)a_{n+1} - a_n = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n=0: & a_1 = a_0 \\ \forall n\geq 1: & a_{n+1} = \dfrac{a_n}{(n+1)(2n+1)} \end{cases}$$

$$\underline{d} \quad \boxed{a_1 = a_0 \quad \text{et} \quad \forall n\geq 1 \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{(n+1)(2n+1)}}$$

2) Posons $u_n = a_n x^n$ avec $x \neq 0$ et $a_0 \neq 0$

On a par récurrence sur n, $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n \neq 0$

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{a_{n+1}\, x^{n+1}}{a_n\, x^n}\right| = \frac{1}{(n+1)(2n+1)}|x| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\underline{d} \quad \boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ (\sum a_n x^n) \text{ cvg} \quad \text{d'où} \quad R = +\infty}$$

3) si $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{6}$, $a_3 = \frac{1}{6\times 3\times 5}$, $a_4 = \frac{1}{4!\,3\times5\times7}$

On pense que $a_n = \dfrac{1}{n!\times 1\times 3\times 5\times \cdots \times (2n-1)}$ $\forall n \geq 1$

formule valable pour $n=1$ et si elle vrai pour n, elle l'est aussi pour $n+1$

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Soit } f(x) = 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!\,1\times3\times5\times\cdots(2n-1)} \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}. \\ f \text{ est solution DSE de (E1)} \end{array}}$$

4) $\dfrac{1}{n!\,1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)} = \dfrac{2^n}{\underbrace{(2\times 1)(2\times 2)\times\cdots\times(2\times n)}_{2^n n!}\times 1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)}$

$= \dfrac{2^n}{(2n)!}$

Donc $f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n x^n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(2x)^n}{(2n)!}$

Si $x \geqslant 0$ $\quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(\sqrt{2x})^{2n}}{(2n)!} = \operatorname{ch}\sqrt{2x}$

Si $x < 0$ $\quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{(\sqrt{-2x})^{2n}}{(2n)!} = \cos\sqrt{-2x}$

$\underline{d}$ $\quad \boxed{\forall x \geqslant 0 \ f(x) = \operatorname{ch}\sqrt{2x} \ \text{ et } \ \forall x < 0 \ f(x) = \cos\sqrt{-2x}}$

2 a) $y' = z'f + zf'$ et $y'' = z''f + 2z'f' + zf''$

On injecte dans (E1) :

$2x(z''f + 2z'f' + \cancel{zf''}) + z'f + \cancel{zf'} - \cancel{zf} = 0$

$\Leftrightarrow$ $\underline{\underline{2x f(x) z''(x) + (4x f'(x) + f(x)) z'(x) = 0}}$ $\quad (E_2)$

b) Soit I un intervalle où rien ne s'annule (x et $z'(x)$) :

$(E_2) \Leftrightarrow \dfrac{z''(x)}{z'(x)} = -\left(\dfrac{2f'(x)}{f(x)} + \dfrac{1}{2x}\right)$

on intègre % à x :

$\ln|z'(x)| = -2\ln|f(x)| - \frac{1}{2}\ln|x| + \alpha$

$\Rightarrow$ $\underline{z'(x) = \dfrac{\lambda}{\sqrt{|x|}\, f(x)^2}}$ avec $\lambda = e^{\alpha}$

Soit $I \subset \mathbb{R}_+^*$ donc :

$$z'(x) = \frac{\lambda}{\sqrt{x}\, ch^2\sqrt{2x}}$$

$$\Rightarrow z(x) = \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{x}\, ch^2\sqrt{2x}} + \mu$$ posons $u = \sqrt{2x}$, $u^2 = 2x$, $2dx = 2u\,du$

$$= \lambda \int \frac{u\,du}{\frac{u}{\sqrt{2}}\, ch^2 u} + \mu$$

$$= \sqrt{2}\lambda \int \frac{du}{ch^2 u} + \mu$$

$$= \sqrt{2}\lambda\, th\, u + \mu$$

$$\Rightarrow \underline{z(x) = \sqrt{2}\lambda\, th\sqrt{2x} + \mu}$$

Soit $I \subset \mathbb{R}_-^*$ donc : $z'(x) = \dfrac{\lambda}{\sqrt{-x}\cos^2(\sqrt{-2x})}$

de la même manière (cdv) on obtient :

$$\underline{z(x) = \sqrt{2}\lambda \tan\sqrt{-2x} + \mu}$$

c) soit $I \subset \mathbb{R}_+^*$ on a alors :

$$\boxed{y(x) = \sqrt{2}\lambda\, sh\sqrt{2x} + \mu\, ch\sqrt{2x}}$$

soit $I \subset \mathbb{R}_-^*$ on a alors

$$\boxed{y(x) = \sqrt{2}\lambda \sin\sqrt{-2x} + \mu \cos\sqrt{-2x}}$$

Solutions générales de (E)

<u>Remarque</u>: Pour une rigueur absolue on montrerait que ces 4 fonctions sont solutions et que ds les 2 cas ($\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_+^*$) elles forment bien un base de l'ensemble des solutions (dont on <u>sait</u> qu'il forme un $\mathbb{R}$-ev de dimension 2 sur $I \subset \mathbb{R}_+^*$ ou $I \subset \mathbb{R}_-^*$).

EXERCICE 3

Q2. Soit $t \in]-1,1[$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $|p_n t^n| \leqslant p_n$, or la série $\sum p_n$ converge de somme 1, donc, par théorème de comparaison (TC), la série $\sum p_n t^n$ converge absolument donc convergente. alors $t \in D_{G_X}$, donc $\boxed{]-1,1[\subset D_{G_X}}$.

Première méthode :

Soit $t \in]-1,1[$, alors $G_S(t) = E(t^{X_1+X_2}) = E(t^{X_1}t^{X_2}) = E(t^{X_1})E(t^{X_2})$ car les variables X_1 et X_2 sont indépendantes, donc les variables $f(X_1) = t^{X_1}$ et $g(X_2) = t^{X_2}$ sont indépendantes aussi. On en déduit donc $G_S(t) = G_{X_1}(t)G_{X_2}(t)$.

Deuxième méthode :

Les séries entières $\sum\limits_{n\geq 0} P(X_1 = n)t^n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} P(X_2 = n)t^n$ ont un rayon de convergence au mois égal à 1, par application du théorème produit de cauchy de deux séries entières, il en résulte :
$G_{X_1}(t)G_{X_2}(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} P(X_1 = n)t^n \sum\limits_{n=0}^{+\infty} P(X_2 = n)t^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n t^n$ avec $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} P(X_1 = k)P(X_2 = n-k)$.
Comme X_1 et X_2 sont indépendantes,
$c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} P(X_1 = k)P(X_2 = n-k)c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} P\Big([X_1 = k] \cap [X_2 = n-k]\Big)$.
D'autre part $\bigcup\limits_{k=0}^{n} [X_1 = k] \cap [X_2 = n-k] = (X_1 + X_2 = n)$ (réunion disjointe), on en déduit donc que $c_n = P(S = n)$. D'où $G_{X_1}(t)G_{X_2}(t) = G_S(t)$

Conclusion: $\boxed{G_S(t) = G_{X_1}(t)G_{X_2}(t).}$

Q3. On peut écrire ici $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ où chaque X_i représente la variable aléatoire égal au numéro tirée pendant le i-ème tirage. Ces variables sont indépendantes car le tirage est avec remise, et les variables sont tous à valeurs dans $\{0,1,2\}$,

Soit $i \in \{1,...,n\}$ et $t \in]-1,1[$, alors $G_{X_i}(t) = t^0 p_0 + t^1 p_1 + t^2 p_2$
On a $p_0 = \dfrac{1}{4}$, $p_1 = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$ et $p_2 = \dfrac{1}{4}$, par application de ce qui précède :
$G_{S_n}(t) = [G_{X_1}(t)]^n = \left[\dfrac{1}{4} + \dfrac{t}{2} + \dfrac{t^2}{4}\right]^n = \dfrac{1}{4^n}(t+1)^{2n} = \sum\limits_{k=0}^{2n} \dfrac{1}{4^n}\binom{2n}{k}t^k$.
Mais $G_{S_n}(t) = \sum\limits_{k=0}^{2n} P(S_n = k)t^k$ et avec $S_n(\Omega) = \{0,1,\ldots,(2n)\}$.
conclusion:

$$\boxed{\forall k \in \{0,1,\ldots,2n\},\quad P(S_n = k) = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{k} \text{ ainsi } S_n \sim \mathcal{B}(2n, \frac{1}{2}) \text{ donc } E(S_n) = n \text{ et } V(S_n) = \frac{n}{2}}$$

Q4.
```
from random import *
from math import *

def bino(n,k): # fonction non demandée pour vérifier avec la valeur théorique
    return factorial(n)//factorial(n-k)//factorial(k)

def tirage(n):
    sac=[0,1,1,2] # le sac des 4 boules
    somme=0
    for i in range(n):
        choix=randint(0,3)
        somme=somme+sac[choix]
    return somme

def proba(n,k,N):
    c=0 # compteur
    for i in range(N): # on effectue N simulations de "tirage"
        if tirage(n)==k: # la somme S_n est égale à k...
            c=c+1        # on incrémente le compteur c
    return c/N

def probaVerif(n,k,N): # fonction identique à "proba" avec en plus la valeur théorique
    c=0
    for i in range(N):
        if tirage(n)==k:
            c=c+1
    return [c/N,bino(2*n,k)/2**(2*n)]


# 3 exécutions ----------------->:

>>> probaVerif(10,4,100001)
[0.004839951600483995, 0.004620552062988281]


>>> probaVerif(12,12,100001)
[0.16121838781612183, 0.1611802577972412]

>>> probaVerif(12,23,1000001)
[3.999996000004e-06, 1.430511474609375e-06]
```

Le théorème qui permet de justifier que l'on tend probablement vers la valeur de $P(S_n = k)$ est

$\boxed{\textbf{la loi faible des grands nombres}}$.

En effet si on note (X_k) une suite de variable de Bernoulli qui suivent toute la même loi : $X_k \sim \mathbb{1}_{(S_n=k)}$, alors $E(X_k) = P(S_n = k) = m$ et pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim\limits_{N\to+\infty} P\left(\left|\dfrac{X_1 + \cdots + X_N}{N} - m\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0.$

On a donc $\boxed{\forall\varepsilon > 0 \lim\limits_{N\to+\infty} P\Big(\Big|\mathbf{proba}(n,k,N) - P(S_n = k)\Big| \geqslant \varepsilon\Big) = 0.}$