E3A 2020 - MP
Corrigé

pour l'UPS, François Calio, MP Marceau Chartres

Exercice 1

1. La bilinéarité, la symétrie et la positivité ne posent pas de problème.
Pour la non dégénérescence : Soit $P \in E$ tel que $\langle P | P \rangle = 0$. On a $\int_0^1 P^2(t)\,dt = 0$. P^2 est une fonction continue positive sur $[0,1]$ dont l'intégrale sur cet intervalle est nulle, ainsi P^2 est la fonction nulle sur $[0,1]$. Ainsi P s'annule une infinité de fois sur $[0,1]$, donc, comme il s'agit d'un polynôme, $P = 0_E$. Ainsi $\boxed{\langle . \mid . \rangle \text{ est bien un produit scalaire sur } E = \mathbb{R}_n[X]}$.

2. Si F est un sev de E de dimension p, $F^\perp$ est un sous espace de E supplémentaire à F.
Donc $\dim\left(F^\perp\right) + \dim(F) = \dim(E)$ i.e. $\boxed{\dim\left(F^\perp\right) = n+1-p}$

3. <u>Si $n=2$</u>. Comme $\mathbb{R}_1[X]$ est de dimension $p = 2$, $\mathbb{R}_1[X]^\perp$ est de dimension 1. On cherche donc les polynômes $Q = aX^2 + bX + c$ orthogonaux à tous les polynômes de $\mathbb{R}_1[X]$. Il faut et il suffit que de tels polynômes soient orthogonaux à 1 et à X. Ainsi :

$$Q = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_1[X]^\perp \iff \begin{cases} \langle aX^2 + bX + c | 1 \rangle = 0 \\ \langle aX^2 + bX + c | X \rangle = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c = 0 \\ \frac{a}{4} + \frac{b}{3} + \frac{c}{2} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 6c \\ b = -6c \end{cases}$$

Ainsi , comme $\mathbb{R}_1[X]^\perp$ est de dimension 1, $\boxed{\left(6X^2 - 6X + 1\right) \text{ constitue une base de } \mathbb{R}_1[X]^\perp}$.

4. .

(a) $L \in \mathbb{R}_{n-1}[X]^\perp \setminus \left\{O_{\mathbb{R}_n[X]}\right\}$ donc $\deg(L) \leqslant n$.
Par l'absurde, <u>si $\deg(L) < n$</u>. Alors $L \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $L \in \mathbb{R}_{n-1}[X]^\perp$ donc, comme ces sous-espaces sont supplémentaires, L est nul ce qui est impossible car on a pris L non nul. Ainsi $\boxed{L \text{ est de degré } n}$

(b) .

i. On écrit $L = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et on a $a_n \neq 0$. Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \to L(t)t^x$ est donc la fonction $t \to \sum_{k=0}^{n} a_k t^{k+x}$ qui est continue sur $]0,1]$ et intégrable si $x > -1$.

De plus $\varphi(x) = \int_0^1 L(t)t^x\,dt = \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 a_k t^{k+x} = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+x+1}$.

Ainsi $\boxed{\varphi \text{ est une fonction rationnelle}}$. On identifiera dans la suite la fonction rationnelle et la fraction rationnelle

ii. Les pôles de φ sont parmi les $-(k+1)$ pour $k \in [\![0,n]\!]$, et ils sont au plus d'ordre 1 car $\left(\prod_{k=0}^{n}(X+k+1)\right)\varphi$ est polynomiale.
L étant orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, les éléments de $[\![0,n-1]\!]$ sont au moins des zéros de φ d'ordre au moins 1.
En écrivant φ sous forme irréductible $\varphi = \frac{P}{Q}$ alors on a $\deg(P) \geqslant n$ et $\deg(Q) \leqslant n+1$. Donc φ est de degré supérieur ou égal à -1 avec égalité si et seulement si P est de degré n et Q de degré $n+1$
Or φ est la somme de fractions de la forme $\frac{a_k}{X+k+1}$ qui sont de degré -1 ou $-\infty$, correspondent à des poles différents et dans laquelle au moins un des termes est non nul $\frac{a_n}{X+n+1}$, donc la somme est de degré -1 . Ainsi P est degré n et Q de degré $n+1$

et donc $\boxed{\text{les poles de } \varphi \text{ sont les } -(k+1) \text{ pour } k \in [\![0,n]\!] \text{ et ils sont d'ordre 1}}$ et $\boxed{\text{les zéros de } \varphi \text{ sont les } k \text{ pour } k \in [\![0,n-1]\!] \text{ et ils sont d'ordre 1}}$

iii. Plus précisément, on écrit P sous la forme $P = \lambda \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(X-k)$ et $Q = \beta \displaystyle\prod_{k=0}^{n}(X+k+1)$ avec λ et β non nuls. Ainsi il existe $\alpha \neq 0$ tel que $\boxed{\varphi = \alpha \dfrac{\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(X-k)}{\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(X+k+1)}}$

(c) On décompose en éléments simples la fraction : $\dfrac{\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(X-k)}{\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(X+k+1)}$. On a : $\dfrac{\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(X-k)}{\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(X+k+1)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{X+k+1}$ avec $b_k = \dfrac{\displaystyle\prod_{j=0}^{n-1}(-k-1-j)}{\displaystyle\prod_{j=0}^{k-1}(-k+j)\prod_{j=k+1}^{n}(-k+j)}$

en convenant que le produit sur une partie vide vaut 1.

Ainsi $b_k = (-1)^{n-k}\dfrac{(n+k)!}{k!\,k!\,(n-k)!}$.

Donc par unicité de la décomposition en éléments simples de φ, on a :

$\forall k \in [\![0,n]\!]\,, a_k = \alpha b_k = \alpha(-1)^{n-k}\dfrac{(n+k)!}{k!\,k!\,(n-k)!}$.

Donc le polynome L vaut : $L = \alpha \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}(n+k)!}{k!\,k!\,(n-k)!} X^k$. Ainsi, comme on sait que $\mathbb{R}_{n-1}[X]^{\perp}$ est de dimension 1, on a :

$$\boxed{\mathbb{R}_{n-1}[X]^{\perp} = \mathrm{Vect}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}(n+k)!}{(k!)^2\,(n-k)!} X^k\right)}$$

Dm 11 : Corrigé

Corrigé exercice 2

1°) A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ car χ_A est scindé dans $\mathbb{C}$, d'où $\exists P \in GL_p(\mathbb{C})$,

$$\exists(\lambda_1, \cdots, \lambda_p) \in \mathbb{C}^p \backslash \quad A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_p \end{pmatrix} P^{-1} \text{ donc } \quad A^n = P \begin{pmatrix} \lambda_1^n & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_p^n \end{pmatrix} P^{-1}.$$

__Conclusion__: $\boxed{Tr(A^n) = \lambda_1^n + \cdots + \lambda_p^n \quad \text{et} \quad \text{sp}(A) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_p\}}$

(valeurs propres répétées selon les ordres de multiplicité)

2°)

__Premier cas__ : $\boxed{\rho(A) = 0}$.

On a alors $A = (0)$, donc $Tr(A^n) = 0$ pour tout $n \geqslant 1$ d'où $\boxed{R = +\infty}$.

__Second cas__ : $\boxed{\rho(A) > 0}$.

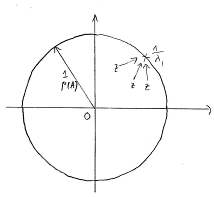
$\forall z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \dfrac{1}{\rho(A)}$, on a donc $\forall i \in [\![1, p]\!]$: $|\lambda_i z| < 1$.

D'où $S(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^n z^n = \sum_{i=1}^{p} \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_i z)^n$.

C'est la linéarité des séries (somme finies de séries convergentes).

On en déduit que $\boxed{\forall z \in \mathbb{C} \ \ / \ |z| < \dfrac{1}{\rho(A)}, \ S(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} Tr(A^n) z^n = \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{1 - \lambda_i z}} \qquad (*).$

Ceci prouve que $\underline{R \geqslant \dfrac{1}{\rho(A)}}$. $\quad$ $\underline{\textbf{Supposons que } R > \dfrac{1}{\rho(A)}}$, l'idée est "d'aller voir" du côté de $\dfrac{1}{\lambda_i}$ avec $\rho(A) = \left|\dfrac{1}{\lambda_i}\right|$.



"SNALG", on peut supposer que $|\lambda_1| = \dfrac{1}{\rho(A)}$, notons k l'ordre de multiplicité de λ_1 dans χ_A, on a donc $S(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} Tr(A^n)z^n = \frac{k}{1-\lambda_1 z} + \sum_{i=k+1}^{p} \frac{1}{1-\lambda_i z}$ (éventuellement le sigma est nul si $k = p$).

Comme cette égalité est vrai sur le disque $D_o(0, \dfrac{1}{\rho(A)})$ et que $R > \dfrac{1}{\rho(A)}$, on fait tendre z vers $\dfrac{1}{\lambda_1}$ avec $z \in D_o(0, \dfrac{1}{\rho(A)})$.

On a alors $\displaystyle\lim_{z \to \frac{1}{\lambda_1}} \sum_{n=0}^{+\infty} Tr(A^n)z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} Tr(A^n)(\frac{1}{\lambda_1})^n = \ell_1 \in \mathbb{C}$.

D'autre part $\displaystyle\lim_{z \to \frac{1}{\lambda_1}} \left|\frac{k}{1-\lambda_1 z}\right| = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{z \to \frac{1}{\lambda_1}} \sum_{i=k+1}^{p} \frac{1}{1-\lambda_i z} = \sum_{i=k+1}^{p} \frac{1}{1-\lambda_i \frac{1}{\lambda_1}} = \ell_2 \in \mathbb{C}$.

Avec la relation $(*)$, on devrait avoir $|\ell_1 - \ell_2| = +\infty$: absurde.

<u>Conclusion</u>: $\boxed{R = \dfrac{1}{\rho(A)}}$

3°) On rappelle que $(f_1 \times \cdots \times f_p)' = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} f_1 \times \cdots \times f_i' \times \cdots \times f_p$, d'où l'on a :

$$\frac{\chi_A'(X)}{\chi_A(X)} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \prod_{\substack{j=1 \\ i \neq i}}^{n} (X-\lambda_j)}{\displaystyle\prod_{j=1}^{p} (X-\lambda_j)} = \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{X-\lambda_i} = \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{X(1-\lambda_i \frac{1}{X})}.$$

<u>Conclusion</u>: $\boxed{\forall z \in \mathbb{C}^* \ / \ |z| < \dfrac{1}{\rho(A)} \quad , \quad S(z) = \dfrac{\chi_A'(\frac{1}{z})}{\chi_A(\frac{1}{z})} \times \dfrac{1}{z}}$

Exercice 3 :

a) Injectons $y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ formellement dans l'équation (E) :

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + 4\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+4} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{———} \quad + 4\sum_{n=4}^{\infty} a_{n-4} x^n - \text{———} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n=0 : -a_0 = 0 \\ n=1 : a_1 - a_1 = 0 \\ n=2 : 2a_2 + 2a_2 - a_2 = 0 \\ n=3 : 6a_3 + 3a_3 - a_3 = 0 \\ n \geq 4 : n(n-1)a_n + n a_n + 4a_{n-4} - a_n = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = a_2 = a_3 = 0 \\ \forall n \geq 4 \quad a_n = \dfrac{-4a_{n-4}}{n(n-1)+n-1} = \dfrac{-4}{(n-1)(n+1)} a_{n-4} \end{cases}$$

Par réc. immédiate $\forall p \in \mathbb{N}$: $a_{4p} = a_{4p+2} = a_{4p+3} = 0$

et $a_{4p+1} = \dfrac{-4}{4p(4p+2)} a_{4p-3} = \dfrac{-1}{2p(2p+1)} a_{4(p-1)+1}$

$$= \frac{-1}{(2p+1)(2p)} \times \frac{-1}{(2p-1)(2p-2)} \times \cdots \times \frac{-1}{3\times 2} a_1$$

$$= \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} a_1$$

Posons $y_0(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} x^{4p+1}$

Par d'Alembert, pour $x \neq 0$, $u_p = \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} x^{4p+1}$,

$\frac{u_{p+1}}{u_p} = -\frac{x^4}{(2p+3)(2p+2)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, donc $R = +\infty$

et $\boxed{y_0 \text{ solution de } (E) \text{ avec } y_0'(0) = 1}$

b) Si $x \neq 0$, $y_0(x) = \frac{1}{x} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} (x^2)^{2p+1} = \frac{\sin(x^2)}{x}$

cl° : $\boxed{y_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{\sin x^2}{x} & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \end{cases}}$

c) On essaye $y_1(x) = \frac{\cos x^2}{x}$ si $x \in \mathbb{R}^{+*}$

$y_1'(x) = -2\sin x^2 - \frac{\cos x^2}{x^2}$

$y_1''(x) = -4x\cos x^2 + \frac{2\sin(x^2)}{x} + \frac{2\cos x^2}{x^3}$

d'où $x^2 y_1''(x) + x\, y_1'(x) + (4x^4 - 1) y_1(x) = 0$ tout s'élimine !

cqs $\boxed{y_1 \text{ solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R}^{+*}}$

Montrons enfin que (y_0, y_1) libre :

$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \mid \lambda y_0 + \mu y_1 = 0$, on a donc

$$\forall x > 0 \quad \lambda \frac{\sin x^2}{x} + \mu \frac{\cos x^2}{x} = 0$$

pour $x = \sqrt{2\pi}$; $\lambda \times 0 + \mu \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = 0$; $\mu = 0$

$x = \sqrt{\pi/2}$: $\lambda = 0$

d'où $\boxed{(y_0, y_1) \text{ libre}}$

<u>Remarque</u> : Quand on saura que l'ensemble des sol. de (E) sur $\underline{\underline{\mathbb{R}^{+*}}}$ sera de dimension 2, on pourra conclure que <u>(y_0, y_1) base de solution</u>

CCP 2016 - Filière MP
Corrigé de l'épreuve Mathématiques I : exercice 2 et probème

D'après le corrigé de Nicolas Basbois & Damien Broizat (UPS)

EXERCICE 4

On utilisera dans cet exercice les relations :

$$\forall x \in]-1;1[, \qquad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \qquad \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1},$$

la seconde étant obtenue par dérivation de la somme d'une série entière sur son intervalle ouvert de convergence.
De ces relations, on déduit (en évaluant en $x = \frac{1}{2}$) :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 2, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{2^{n-1}} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^{n-1}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} = 2.$$

1. Notons $u_{i,j} = \frac{i+j}{2^{i+j}}$ pour tout couple $(i,j) \in \mathbb{N}^2$.
On a :

- $u_{i,j} = u_{j,i} \geqslant 0$ pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$;
- pour tout $i \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{j \geqslant 0} u_{i,j}$ converge. En effet, on a (sous réserve de convergence de chacune des séries utilisées) :

$$\sum_{j=0}^{+\infty} u_{i,j} = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{i}{2^{i+j}} + \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{j}{2^{i+j}} = \frac{i}{2^i}\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{2^j} + \frac{1}{2^i}\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{j}{2^j}$$

  et on reconnaît là des séries convergentes. Au passage, on obtient $\sum_{j=0}^{+\infty} u_{i,j} = \frac{i+1}{2^{i-1}} = 4u_{i,1}$ (en utilisant les calculs du préambule) ;
- la série $\sum_{i \geqslant 0}\left(\sum_{j=0}^{+\infty} u_{i,j}\right)$ converge, car pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\sum_{j=0}^{+\infty} u_{i,j} = 4u_{i,1}$ par ce qui précède et parce que $\sum_{i \geqslant 0} u_{i,1}$ converge (et elle a même somme que $\sum_{i \geqslant 0} u_{1,i}$ par symétrie). On obtient concrètement : $\sum_{i=0}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{+\infty} u_{i,j}\right) = \sum_{i=0}^{+\infty} 4u_{i,1} = 4\sum_{i=0}^{+\infty} u_{1,i} = 4 \times 4 \times u_{1,1} = 16u_{1,1}$.

On en déduit, par le théorème de sommation par paquets pour les familles à termes positifs, que

$$\boxed{\text{la famille } (u_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} \text{ est sommable, et sa somme vaut : } \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} u_{i,j} = \sum_{i=0}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{+\infty} u_{i,j}\right) = 16 \times u_{1,1} = \frac{16 \times 2}{2^2} = 8.}$$

II.2.

2.a. Les relations données définissent bien une loi de probabilité sur l'univers dénombrable $\mathbb{N}^2$, puisque :

- $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2$, $\frac{i+j}{2^{i+j+3}} = \frac{u_{i,j}}{8} \geqslant 0$;
- $\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} \frac{i+j}{2^{i+j+3}} = \frac{1}{8} \underbrace{\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} u_{i,j}}_{=8} = 1.$

$\boxed{\text{On a donc bien une loi conjointe}}$.

2.b. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a la décomposition d'événement :

$$(X = i) = \bigcup_{j=0}^{+\infty} ((X = i) \cap (Y = j)),$$

et cette réunion est disjointe, donc par la formule des probablités totale et avec le S.C.E. ci-dessus :

$$P(X=i)=\sum_{j=0}^{+\infty}P\big((X=i)\cap(Y=j)\big)=\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{u_{i,j}}{8}.$$

De même, on a

$$P(Y=i)=\sum_{j=0}^{+\infty}P\big((X=j)\cap(Y=i)\big)=\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{u_{j,i}}{8}=P(X=i),$$

puisque $u_{i,j}=u_{j,i}$. Les variables aléatoires X et Y suivent donc la même loi, donnée par

$$\boxed{\forall k\in\mathbb{N},\qquad P(X=k)=P(Y=k)=\sum_{l=0}^{+\infty}\frac{u_{k,l}}{8}=\frac{4u_{k,1}}{8}=\frac{1}{2}u_{k,1}=\frac{k+1}{2^{k+2}}}.$$

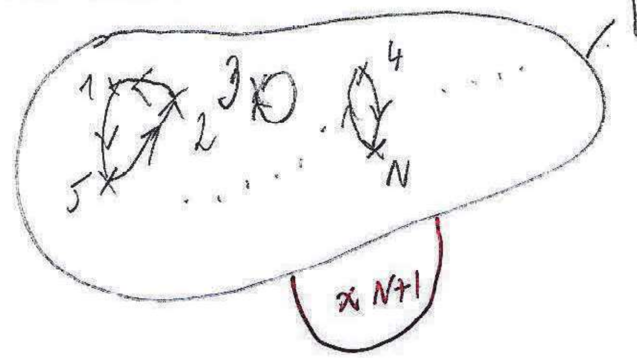
2.c. On a d'après l'énoncé :

$$P\big((X=0)\cap(Y=0)\big)=\frac{0+0}{2^{0+0+3}}=0.$$

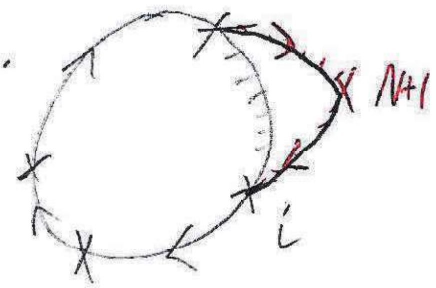
Pourtant $P(X=0)\times P(Y=0)=\dfrac{0+1}{2^{0+2}}\times\dfrac{0+1}{2^{0+2}}=\dfrac{1}{16}\neq P\big((X=0)\cap(Y=0)\big)$, donc $\boxed{\text{les variables } X \text{ et } Y \text{ ne sont pas indépendantes}}$.

Exercice 5

a)



Si on "rajoute" $N+1$ à $[\![1, N]\!]$; 2 solutions : <u>soit</u> $\sigma(N+1) = N+1$, il est alors un cycle à lui tout seul.
<u>soit</u> $\sigma(N+1) = i \leq N$, il va donc se "greffer" à un cycle déjà existant de $[\![1, N]\!]$.



Considérons
$$A_i = \{\sigma \in \Omega_{N+1} \mid \sigma(N+1) = i\}$$
$$C_{N,k} = \{\sigma \in \Omega_N \text{ qui ont } k \text{ cycles}\}$$

On a $\mathbb{P}_N(X_N = k) = \mathbb{P}_N(C_{N,k})$ et $(A_i)_{i \in [1, N+1]}$ S.C.E. de Ω_{N+1}. Donc
$$\mathbb{P}_{N+1}(X_{N+1} = k) = \sum_{i=1}^{N+1} \mathbb{P}_{N+1}((X_{N+1} = k) \cap A_i).$$

$(X_{N+1} = k) \cap A_{N+1}$ est en bijection avec $C_{N,k-1}$ avec
$$\phi : (X_{N+1} = k) \cap A_{N+1} \longrightarrow C_{N,k-1}$$
$$\sigma \longmapsto \hat{\sigma} \text{ restriction de } \sigma \text{ à } [\![1, N]\!]$$
est bijective.

donc $|(X_{N+1}=k)\cap A_{N+1}| = |C_{N,k-1}|$

d'où $\dfrac{|(X_{N+1}=k)\cap A_{N+1}|}{(N+1)!} = \dfrac{|C_{N,k-1}|}{(N+1)!}$ (proba. uniformes)

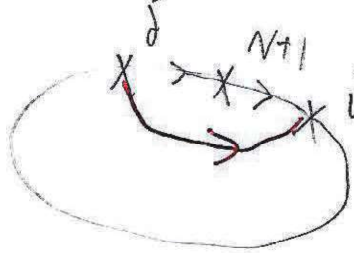
soit $\underline{\mathbb{P}_{N+1}\big((X_{N+1}=k)\cap A_{N+1}\big) = \dfrac{1}{N+1}\,\mathbb{P}_N(X_N=k-1)}$

De même, $(X_{N+1}=k)\cap A_i$, $i\leq N$, est en bijection avec $C_{N,k}$ avec

$$\phi : (X_{N+1}=k)\cap A_i \longrightarrow C_{N,k} \quad \text{est bijective}$$

$$\sigma \longmapsto \tilde{\sigma} : [\![1,N]\!] \longrightarrow [\![1,N]\!]$$

$$x \longmapsto \begin{cases} \sigma(x) & \text{si } x\neq j=\sigma^{-1}(N+1) \\ i & \text{si } i=j \end{cases}$$



On a donc $\underline{\mathbb{P}_{N+1}\big((X_{N+1}=k)\cap A_i\big) = \dfrac{1}{N+1}\,\mathbb{P}_N(X_N=k)}$

On en déduit $\mathbb{P}_{N+1}(X_{N+1}=k) = \dfrac{1}{N+1}\mathbb{P}_N(X_N=k-1) + \displaystyle\sum_{k=1}^{N}\dfrac{1}{N+1}\mathbb{P}_N(X_N=k)$

d'où : $\boxed{\mathbb{P}_{N+1}(X_{N+1}=k) = \dfrac{1}{N+1}\,\mathbb{P}_N(X_N=k-1) + \dfrac{N}{N+1}\,\mathbb{P}_N(X_N=k)}$

b) $\forall N \geq 1$, $X_N(\Omega) = [\![1, N]\!]$ et

$$G_{N+1}(t) = \sum_{k=1}^{N+1} P_{N+1}(X_{N+1} = k)\, t^k$$

$$= \frac{1}{N+1} \sum_{k=1}^{N+1} P_N(X_N = k-1)\, t^k + \frac{N}{N+1} \sum_{k=1}^{N+1} P_N(X_N = k)\, t^k$$

Comme $P_N(X_N = 0) = P_N(X_N = N+1) = 0$, on a :

$$\boxed{G_{N+1}(t) = \frac{t+N}{N+1}\, G_N(t)}$$

Donc $G_N(t) = \frac{t+N-1}{N} \times \frac{t+N-2}{N-1} \times \cdots \times \frac{t+1}{2}\, G_1(t)$

Or $G_1(t) = 1 \times t = t$ d'où : $\boxed{G_N(t) = \frac{t(t+1)\cdots(t+N-1)}{N!}}$

c) Comme on veut $G'_N(1)$ et $G''_N(1)$ (pour E & V), effectuons le DL en 1 de G_N : $t = 1+u$

$$G_N(1+u) = \frac{1}{N!}(1+u)(2+u)\cdots(N+u)$$

$$= (1+u)\left(1+\frac{u}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{u}{n}\right)$$

$$= 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N}\right)u + \sum_{i<j} \frac{1}{ij}\, u^2 + o(u^2)$$

cqs $\underline{E(X_N) = G'_N(1) = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N}}$

Ensuite, comme $\underline{G_N \text{ est } C^\infty}$ sur $\mathbb{R}$, par Taylor Young, (4)

$$G_N''(1) = 2\sum_{i<j} \frac{1}{ij} = E(X(X-1)), \text{ posons } \begin{cases} \underline{H_N = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{N}} \\ \underline{S_N = \sum_{1\leq i<j\leq N} 1/ij} \end{cases}$$

d'où : $\boxed{E(X_N) = H_n \text{ et } V(X_N) = 2S_N + H_N - H_N^2}$

d) Posons $Y_N = \frac{X_N}{\ln N}$, on a grâce à Bienaymé-Tchebychev,

$$\mathbb{P}_N(|Y_N - E(Y_N)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(Y_N)}{\varepsilon^2}$$

Etudions $\alpha_N = V(Y_N) = \frac{1}{(\ln N)^2}(2S_N + H_N - H_N^2)$

$$H_N^2 = \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{N}\right)^2 = \sum_{i=1}^N \frac{1}{i^2} + 2\sum_{i<j}\frac{1}{ij}$$

$H_n^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2} - 2S_n$

donc $\alpha_N = \frac{1}{(\ln(N))^2}\left(H_N - \sum_{i=1}^N \frac{1}{i^2}\right) \sim \frac{H_N}{(\ln N)^2} \quad \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{i^2} \to \frac{\pi^2}{6}\right)$

Or on a vu (à revoir !) $H_N \sim \ln N$ (Comp. Σ-$\int$)

donc $\underline{\alpha_N \xrightarrow[N\to\infty]{} 0}$

Enfin, on a : $\underbrace{\left|\frac{X_N}{\ln N} - 1\right|}_{a} \leq \underbrace{\left|\frac{X_N}{\ln N} - \frac{H_N}{\ln N}\right|}_{b} + \underbrace{\left|\frac{H_N}{\ln N} - 1\right|}_{c}$

d'où si $b < \varepsilon/2$ et $c < \varepsilon/2$ alors $a < \varepsilon$ et par contraposée : $a \geq \varepsilon \implies b \geq \varepsilon/2$ ou $c \geq \varepsilon/2$ donc :

$$\mathbb{P}_N\left(\left|\frac{X_N}{\ln N} - 1\right| \geq \varepsilon\right) \leq \mathbb{P}_N\left(\left[\left|\frac{X_N}{\ln N} - \frac{H_N}{\ln N}\right| \geq \varepsilon/2\right] \cup \left[\left|\frac{H_N}{\ln N} - 1\right| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right]\right)$$

$$\leq \frac{\alpha_N}{\varepsilon^2} + \mathbb{P}\left(\left|\frac{H_N}{\ln N} - 1\right| \geq \varepsilon/2\right)$$

$$\left(\mathbb{P}(A \cup B) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)\right)$$

Or $\exists N_0 \in \mathbb{N} \mid \forall N \geq N_0 \ \left(\left|\frac{H_N}{\ln N} - 1\right| \geq \varepsilon/2\right) = \emptyset$

donc $\forall N \geq N_0$: $0 \leq \mathbb{P}_N\left(\left|\frac{X_N}{\ln N} - 1\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\alpha_N}{\varepsilon^2}$

$N \to \infty$

0

Par thm d'encadrement :

d'où : $\boxed{\forall \varepsilon > 0, \ \lim \mathbb{P}_N\left(\left|\frac{X_N}{\ln N} - 1\right| \geq \varepsilon\right) = 0}$

Rem. on dit que la suite de V.A. $\left(\frac{X_N}{\ln N}\right)$ converge en probabilité.

Sujet 0 (Mines) : 1. Soit $t \in \mathbb{R}$, posons $f(x) = e^{ix}$ on a ①

par la formule du transfert : $Y = f(X)$ est d'espérance finie si $(f(n)P(X=n)) = (e^{itn}P(X=n))$ est sommable, ce qui est le cas ;

$\sum_{n=0}^{\infty} |e^{itn}P(X=n)| = 1$, on a donc $\underline{\phi_X(t) = E(Y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} e^{itn} P(X=n)}$,

donc : $\phi_X(t) = G_X(e^{it})$ où G_X est la fonction génératrice de X.

On sait que G_X est définie et continue sur $[-1, 1]$, par composée (TG), on a : ϕ_X continue sur $\mathbb{R}$

De même $\phi_X(t + 2\pi) = \phi_X(t)$

cl $\boxed{\phi_X \text{ est continue et } 2\pi\text{-périodique}}$

2. Soit $k \in \mathbb{N}$, calculons I_k : posons $u_n(t) = e^{itn} P(X=n) e^{-itk}$

On a : i) $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [-\pi, \pi], |u_n(t)| \leq P(X=n) = \alpha_n$

Comme $(\sum \alpha_n)$ cvg (et $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = 1$!), $(\sum u_n)$ CN$/_{[-\pi, \pi]}$.

ii) $\forall n \in \mathbb{N}$ u_n est $C^0/[-\pi, \pi]$ par TG.

Par th. d'intégration (c.v.), on a ;

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} u_n \text{ soit } I_k = \sum_{n=0}^{\infty} P(X=n)\,\gamma_n$$ ②

$$\text{avec } \gamma_n = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it(n-k)}\,dt = \begin{cases} \frac{1}{i(n-k)}\left[e^{it(n-k)}\right]_{-\pi}^{\pi} & \text{si } n \neq k \\ 2\pi & \text{si } n = k \end{cases}$$

donc $\gamma_n = 0$ si $n \neq k$ et $\gamma_n = 2\pi$ si $n = k$

d'où $\underline{I_k = 2\pi P(X=k)}$

si $\phi_X = \phi_Y$, on a donc $\forall k \in \mathbb{N} : \cancel{2\pi} P(X=k) = \cancel{2\pi} P(Y=k)$

$\underline{cl}$: $\boxed{X \sim Y}$

3) Posons $u_n(t) = P(X=n)e^{int}$ et utilisons le thm de dérivation :

* $\forall n \in \mathbb{N}$ u_n C^1 sur $\mathbb{R}$ par TG
* $(\sum u_n)$ c.s. vers ϕ_X sur $\mathbb{R}$
* $\forall t \in \mathbb{R}$ $|u_n'(t)| = |in|\,P(X=n)\,|e^{int}|$

$$= n P(X=n) = \alpha_n$$

Comme X admet une espérance, $(\sum \alpha_n)$ cvg et donc $(\sum u_n')$ CN/$\mathbb{R}$

$\underline{cl}$: $\boxed{\phi_X \text{ est dérivable sur } \mathbb{R},\ \phi_X'(0) = \sum_{n=0}^{\infty} in P(X=n) = i E(X)}$

③

4) $Y \sim \mathcal{G}(p)$, $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$, donc $Z(\Omega) = [\![0, +\infty[\![$

$$\phi_Z(t) = \sum_{n=0}^{\infty} P(Z=n) e^{int} = \sum_{n=0}^{\infty} P(Y-1=n) \ e^{int}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(Y=n+1) e^{int}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P(Y=n) e^{i(n+1)t - it} e^{-it} = e^{-it} G_Y(e^{it})$$

On $G_Y(x) = \dfrac{px}{1-qx} = \dfrac{px}{1-(1-p)x}$ d'où :

cl° ; $\boxed{\phi_Z(t) = \dfrac{p}{1-(1-p)e^{it}}}$

5) * Pour $n=1$, $X_1 = A_1$ (car $X_0 = 0$) qui est bien le nb de clients qui sont arrivés pendant que le client n° 1 se fait servir.

* Le client n° 2 est le 1^er des "A_1" s'il y en a, sinon $X_2 = A_2$., pendant qu'il se fait servir, il en arrive A_2. Quand ce 2ème client part, il y a donc $A_1 - 1 + A_2 = X_1 - 1 + A_2 = X_2$

c'est le client n° 2 !

Posons ; H_n : X_n est le nb de clients au départ du client n.

On vient donc de voir que H_1 et H_2 sont vraies. (4)

si H_n est vraie, si $X_n = 0$, c'est qu'il n'y a personne quand le client n part. Le client $n+1$ arrive, se fait servir et lorsqu'il part, il en est arrivé A_{n+1}, comme $X_n = 0$, on a bien $X_{n+1} = A_{n+1}$

sinon $X_n > 0$, quand le client n part, il y a X_n client qui attendent. Le premier de ces X_n se fait servir : c'est le client $n+1$. Quand celui-ci part, il en est arrivé A_{n+1}. Il en reste donc :

$X_n - 1 + A_{n+1}$ donc X_{n+1} (par définition de X_{n+1})

d' : $\boxed{X_n \text{ représente le nombre de clients au départ de "}n\text{"}}$

b') $\forall n \in \mathbb{N}$ $X_{n+1} = \begin{cases} A_{n+1} & \geq A_{n+1} \text{ si } X_n = 0 \\ X_n - 1 + A_{n+1} & \geq A_{n+1} \text{ si } X_n \geq 1 \end{cases}$

donc $\underline{\forall n \geq 1 : X_n \geq A_n}$

événements de Ω

d'où "$X_n \leq m \Rightarrow A_n \leq m$" soit $(X_n \leq m) \subset (A_n \leq m)$

S'il existe $M > 0$ tel que $\forall n \geq 0$: $P(X_n \leq M) = 1$ ⑤

alors $\forall n \geq 0$, $\underline{P}(X_n \leq M) \leq \underline{P}(A_n \leq M) \leq 1$

$\uparrow \; P \nearrow \qquad \underline{P} \in (0,1)$

donc $\forall n \geq 0$; $P(A_n \leq M) = 1$

Or $A_n \sim A$ donc $P(A_n \leq M) = P(A \leq M)$

$\underline{\text{cqs}}$ $\forall n \geq 0$; $P(A \leq M) = 1$

Pour $n_0 = \lfloor M \rfloor + 1$, on a $(A \leq M) \subset (A \leq n_0)$

d'où (idem) $P(A \leq n_0) = 1$. Or les hypothèses

donne $\underline{P}(A \geq n_0+1) > 0$ donc $P(\overline{(A \geq n_0+1)}) < 1$

or $\overline{(A \geq n_0+1)} = (A < n_0+1) = (A \leq n_0)$

$\uparrow$ car $A(\Omega) \subset \mathbb{N}$

d'où $P(A \leq n_0) = 1$ et $P(A \leq n_0) < 1$: <u>Absurde</u>

d'où : $\boxed{\nexists M > 0 \mid \forall n \geq 0 \quad P(X_n \leq M) = 1}$.

⑥

7) $\forall n \in \mathbb{N}$: $X_{n+1} = \begin{cases} A_{n+1} + X_n & \text{si } X_n = 0 \\ A_{n+1} - 1 + X_n & \text{si } X_n > 0 \end{cases}$

$\geqslant \begin{cases} 0 + X_n & \text{si } X_n = 0 \\ -1 + X_n & \text{si } X_n > 0 \end{cases}$, car $A_n \geqslant 0$ $(A_n(\Omega) \subset \mathbb{N})$

donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} ; X_{n+1} - X_n \geqslant -1}$

8) Par récurrence immédiate, X_n ne dépend que de $A_1, A_2, \ldots, A_n$, donc $X_n = g(A_1, \ldots, A_n)$ $\forall n \geqslant 1$

Le lemme des coalitions donne :
$X_n = g(A_1, \ldots, A_n)$ et A_{n+1} sont indép, car (A_n) est une famille indépendante.

Pour $n = 0$, $\mathbb{P}(X_0 = x \cap A_1 = y) = \begin{cases} P(\Omega \cap (A_1 = y)) & \text{si } x = 0 \\ P(\emptyset \cap A_1 = y) & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$

$= \begin{cases} P(A_1 = y) & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$

Or $P(X_0 = x) P(A_1 = y) = \begin{cases} P(A_1 = y) \times 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$

cqt X_0 et A_1 indép. d $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} ; X_n \text{ et } A_{n+1} \text{ indépendantes}}$

9°) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\underbrace{e^{itn} \mathbb{1}_{(X>0)}(n) \mathbb{P}(X=n)}_{u_n} = \begin{cases} 0 & \text{si } n=0 \\ e^{itn} \mathbb{P}(X=n) & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$ 7

donc $|u_n| = \mathbb{P}(X=n)$ et $(\sum |u_n|)$ cvg donc, cette espérance existe et l'on a :

$$\boxed{E\left(e^{itX} \mathbb{1}_{(X>0)}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{itn} \mathbb{P}(X=n) = \phi_X(t) - \mathbb{P}(X=0)}$$

rem : On pouvait aussi utiliser :

$\Omega = (X>0) \amalg (X=0)$, $\mathbb{1}_\Omega = \mathbb{1}_{(X>0)} + \mathbb{1}_{(X=0)}$ et $E(\mathbb{1}_A) = \mathbb{P}(A)$

10°) $\phi_{X_{n+1}}(t) = E\left(e^{itX_{n+1}}\right)$

On $e^{itX_{n+1}} = e^{itX_{n+1}} \cdot \mathbb{1}_{(X_n>0)} + e^{itX_{n+1}} \cdot \mathbb{1}_{(X_n=0)}$

$= e^{it(X_n - 1 + A_{n+1})} \mathbb{1}_{(X_n>0)} + e^{itA_{n+1}} \cdot \mathbb{1}_{(X_n=0)}$

d'après les relations de (1).

Comme l'espérance est linéaire, on a :

$\phi_{X_{n+1}}(t) = \underset{\in \mathbb{C}}{e^{-it}} E\left(e^{itX_n} \cdot \mathbb{1}_{(X_n>0)} \times e^{itA_{n+1}}\right) + E\left(e^{itA_{n+1}} \cdot \mathbb{1}_{(X_n=0)}\right)$

Posons $f(X_n) = e^{itX_n} \cdot \mathbb{1}_{(X_n>0)}$ et $g(A_{n+1}) = e^{itA_{n+1}}$

avec $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ $\quad \mathbb{N} = X_n(\Omega)$

$$k \longmapsto \begin{cases} e^{itk} & \text{si } k>0 \\ 0 & \text{si } k=0 \end{cases}$$

et $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$

$$k \longmapsto e^{itk}$$

8')

Comme X_n et A_{n+1} sont indépendants, $f(X_n)$ et $g(A_{n+1})$ le sont aussi, d'où $E(f(X_n)\, g(A_{n+1})) = E(f(X_n))\, E(g(A_{n+1}))$

Donc $E\left(e^{itX_n} \mathbb{1}_{(X_n>0)} \cdot e^{itA_{n+1}}\right) = E\left(e^{itX_n} \mathbb{1}_{(X_n>0)}\right) \times E\left(e^{itA_{n+1}}\right)$

Or $E\left(e^{itA_{n+1}}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{itk} \underbrace{P(A_{n+1}=k)}_{=P(A=k)}$ car $A_{n+1} \sim A$

$$= \phi_A(t)$$

Avec le 8'), on a donc :

$$E\left(e^{itX_n}\mathbb{1}_{(X_n>0)}\, e^{itA_{n+1}}\right) = \left(\phi_{X_n}(t) - P(X_n=0)\right) \times \phi_A(t)$$

D'autre part (en reprenant l'expression de $\phi_{n+1}(t)$ bas de page 7) :

$$E\left(e^{itA_{n+1}} \cdot \mathbb{1}_{(X_n=0)}\right) = E\left(e^{itA_{n+1}}\right) E\left(\mathbb{1}_{(X_n=0)}\right)$$

tjs l'indép. de $f_1(X_n)$ et $g_1(A_{n+1})$

donc $E\left(e^{itA_{n+1}} \cdot \mathbb{1}_{(X_n=0)}\right) = \phi_A(t)\, \mathbb{P}(X_n = 0)$

$\uparrow E(\mathbb{1}_A) = \mathbb{P}(A)$

On somme :

$$\phi_{X_{n+1}}(t) = e^{-it}\left(\phi_{X_n}(t) - \mathbb{P}(X_n=0)\right)\cdot\phi_A(t) + \phi_A(t)\,\mathbb{P}(X_n=0)$$

d : $$\boxed{\phi_{X_{n+1}}(t) = \phi_A(t)\left[e^{-it}\phi_{X_n}(t) + (1-e^{-it})\,\mathbb{P}(X_n=0)\right]}$$

FIN DU PROBLEME

~~1~~. D'après la 3), on a ϕ_A dérivable en 0 et

$\phi'_A(0) = i\,E(A) = ip$, comme $\phi_A(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(A=k) = 1$,

on conclut : $$\boxed{\phi_A(t) \underset{0}{=} 1 + ipt + o(t)}$$

~~2~~. Effectuons le DL à l'ordre 0 de θ :

$$\theta(t) = \alpha\, \frac{1 \times (1 - 1 + it + o(t))}{1 - (1+ipt)(1-it+o(t))} = \alpha\, \frac{it + o(t)}{(-ip+i)t + o(t)}$$

$$\underset{0}{\sim} \frac{\alpha i t}{-ip+i} \underset{0}{\sim} \frac{\alpha}{1-p}$$ (on a supposé $0<p<1$ donc $1-p \neq 0$)

d $$\boxed{\theta \text{ continue en } 0 \text{ ssi } \alpha = 1-p}$$

Saisissez du texte ici

CCP - PC 2006

I.0 $\boxed{p = p^*}$

I.1 si $x\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ et $y\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ $(x|y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

$X^T Y = (x_1 \cdots x_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ d'où $\boxed{(x|y) = {}^tX Y}$ $= {}^tY X$

car $(x|y) \in \mathbb{R}$

I.2 a) $\boxed{p(z) = \sum_{i=1}^{k} (e_i|z) e_i}$

b) i) $M(p) Z = \sum_{i=1}^{k} E_i^T Z E_i$

Or si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\alpha = (\alpha) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$,

$A(\alpha) = \begin{pmatrix} a_{11}\alpha & \cdots & a_{1n}\alpha \\ a_{n1}\alpha & \cdots & a_{nn}\alpha \end{pmatrix} = \alpha A$, On applique ceci avec

$A = E_i$ et $\alpha = E_i^T Z$: $E_i^T Z E_i = E_i E_i^T Z$

d. $\boxed{M(p) Z = \sum_{i=1}^{k} E_i E_i^T Z}$

ii) Soit $A = \sum_{i=1}^{k} E_i E_i^T = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ on a matriciellement

$\forall z \in F$ $p(z) = \varphi(z)$ donc $p = \varphi$ d'où $\boxed{M(p) = \sum_{i=1}^{k} E_i E_i^T}$

c) c'est la rel. fondam. $\|z\|^2 = \|p(z)\|^2 + d(z, H)^2$

d'; $\boxed{\|p(z)\| \leqslant \|z\|}$ (2)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

I 3 a) On calcul $M^2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

donc $M^2 = M$ et M symetrique donc si $M = M_{B_0}(p)$ avec B_0 base canonique de $\mathbb{R}^4$, $p^2 = p$ et p symétrique d'; $\boxed{p \text{ projecteur } \perp}$

b) * Si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, $MX = (0) \Leftrightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ y - t = 0 \\ -x + z = 0 \\ -y + t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x \\ t = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = x \\ t = y \end{cases}$

Posons $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, (u_1, u_2) famille OTN et génératrice de $\operatorname{Ker} u$ d'; $\boxed{(u_1, u_2) \text{ base OTN de } \operatorname{Ker} u}$

* $\operatorname{Im} p = \operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$. Posons $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

d'; $\boxed{(v_1, v_2) \text{ base OTN de } \operatorname{Im} u}$

I 4 a) $\lambda \neq 0$ donc $u = \frac{1}{\lambda} p \circ r(u) = p\left(r\left(\frac{1}{\lambda} u\right)\right) \in \operatorname{Im} p = H$

d'où $p(u) = u$ et donc

$$p(r(u) - \lambda u) = \lambda u - \lambda u = 0$$

d'; $\boxed{r(u) - \lambda u \in H^\perp}$

b) On a donc $(\overbrace{r(u)-\lambda u}^{H^\perp} \mid \overbrace{u}^{H}) = 0$ (avec le a))

donc $(r(u)\mid u) = \lambda(u\mid u) = \lambda\|u\|^2$

d'autre part $\|r(u)\|^2 = (r(u)\mid r(u)) = (r\circ r(u)\mid u)$ car r symétrique

$= (r^2(u)\mid u)$ or $r^2 = r$

$= (r(u)\mid u)$

d'. $\boxed{\|r(u)\|^2 = \lambda\|u\|^2}$

c) D'après le I 2 c) $\|r(u)\| \leq \|u\|$ donc $\lambda\|u\|^2 \leq \|u\|^2$

et comme $\|u\| \neq 0$, $\lambda \leq 1$ et comme $\lambda = \dfrac{\|r(u)\|^2}{\|u\|^2} \geq 0$,

d': $\boxed{sp(p\circ r) \subset [0,1]}$ (si $\lambda = 0$, $0 \in [0,1]$!)

I 5 a) $(p\circ r)^2 = p^2\circ r^2 = p\circ r$ et $\forall (x,y)\in E^2$ $(p\circ r(x)\mid y) = (r(x)\mid p(y))$

$= (x\mid r\circ p(y))$

$= (x\mid p\circ r(y))$

d' $\boxed{p\circ r \text{ projecteur } \perp}$

b) Le spectre d'un projecteur est inclus dans $\{0,1\}$.

Comme $p\circ r \neq 0$, 1 est valeur propre. Si 0 n'était pas val. propre, alors $p\circ r = id_F$ d'où p inversible et comme $p^2 = p$, on a $p = id_F$ → ← car $p = p_H$ et $\dim H < \dim F$

d': $\boxed{sp(p\circ r) = \{0;1\}}$

c) * Si $x \in \ker p$, $p\circ r(x) = r\circ p(x) = 0$; idem avec $\ker r \subset \ker p\circ r$

donc $\ker p + \ker r \subset \ker p\circ r$

* si $x \in \ker p\circ r$, $\exists (y,z) \in \ker p \times \operatorname{Im} p \mid x = y+z$

donc $p(x) = p(z) = z$ et $r\circ p(x) = 0 = r(z)$ donc

$z \in \ker r$: $x = y+z \in \ker p + \ker r$

d'où $\boxed{\ker p\circ r = \ker p + \ker r}$

* si $y \in \operatorname{Im} p\circ r$, $y = p\circ r(y) ~~= p(r(y))~~ \in \operatorname{Im} p$

$= r\circ p(y) = r(p(y)) \in \operatorname{Im} r$) $y \in \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} r$

* si $y \in \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} r$, $p\circ r(y) = p(y) = y \in \operatorname{Im} p\circ r$

d'où $\boxed{\operatorname{Im}(p\circ r) = \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} r}$

I 6 a) $\mathbf{R}^2 = \begin{pmatrix} A^2+BC & AB+BD \\ CA+DC & CB+D^2 \end{pmatrix} = \mathbf{R} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} A^2+BC = A \\ AB+BD = B \\ CB+D^2 = D \end{cases}}$

(B' la base OTN de l'énoncé)

$\mathbf{R}^T = M_{B'}(r) = \mathbf{R}$ car r symétrique d'où : $\begin{pmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$

d'où $\boxed{A^T = A,\ B^T = C \ \&\ D^T = D}$

b) <u>i ⇒ ii</u> $\mathbf{PR} = M_{B'}(p\circ r) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

et donc $P_{p\circ r}(x) = \det\begin{pmatrix} A - xI_k & B \\ 0 & -xI_{n-k} \end{pmatrix}$ ⑤

(P_A : +/- polynôme caractéristique)

$$= P_A(x)(-x)^{n-k}$$

Comme $sp(p\circ r) \subset \{0,1\}$, $sp(A) \subset \{0,1\}$. or $A^T = A$

donc A diagonalisable $A = P_o \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix} P_o^{-1}$ et $\alpha_i = 0$ ou 1

donc $\alpha_i^2 = \alpha_i$ et $A^2 = A$.

La relation $A^2 + BC = A$ donne $BC = 0$ or $B = {}^tC^T$

donc $\underline{C^T C = 0}$ (ou avec $Tr(C^TC)=||C||^2 = 0$)

<u>ii ⇒ iii)</u> $C = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \\ a_{n-k,1} & \cdots & a_{n-k,n-k} \end{pmatrix}$

d'où $C^T C = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n-k} a_{i,1}^2 & & * \\ & \sum_{i=1}^{n-k} a_{i,2} & \\ & & \ddots \\ * & & & \sum_{i=1}^{n-k} a_{i,k}^2 \end{pmatrix} = (0)$

$\Rightarrow \forall j \in [\![1,k]\!]\ \sum_{i=1}^{n-k} a_{i,j}^2 = 0 \Rightarrow \forall j \in [\![1,k]\!]\ \forall i \in [\![1,n-k]\!]\ a_{ij} = 0$

donc $\underline{C = 0}$

<u>iii ⇒ iv</u> si $C = 0$, alors $B = C^T = 0$, $R = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ et on

a alors $PR = RP = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\underline{p\circ r = r\circ p}$

$iv \Rightarrow i$ c'est le I, 5 b. et si $p_{or}=0$, $sp=\{0\}$

d' : $\boxed{i \Rightarrow ii \Rightarrow iii \Rightarrow iv \Rightarrow i \text{ ; les cond. sont } \sim}$

II 1. On se place dans F de dim. finie donc :

$d(v, \mathrm{Im} f) = \|v - y_0\|$ avec $y_0 = p_{\mathrm{Im} f}(v)$ et donc

$\exists x_0 \in E \mid y_0 = f(x_0)$ d' $\boxed{\|f(x_0) - v\| = d(v, \mathrm{Im} f) = \min_{y \in \mathrm{Im} f} \|v - y\| = \min_{x \in E} \|v - f(x)\|}$

II 2. Le y_0 du 1. est unique et si $y_0 = f(x_0) = f(x_1)$ alors $x_0 = x_1$

d' : $\boxed{\text{la pseudo-sol. est unique pour } f \text{ injective}}$

II 3. on a $v = f(x_0) + z$, $z \in \mathrm{Im} f^\perp$ et $f(x_0) = y_0 = p_{\mathrm{Im} f}(v)$

$\Rightarrow]$

$\forall x \in E \quad (f(x) \mid f(x_0) - v) = (\underbrace{f(x)}_{\mathrm{Im} f} \mid \underbrace{z}_{\mathrm{Im} f^\perp}) = 0$

$\Leftarrow]$ soit $x_0 \in E \mid \forall x \in E \ (f(x) \mid f(x_0) - v) = 0$; on en déduit que $z = f(x_0) - v \in \mathrm{Im} f^\perp$ d'où $v = f(x_0) - z$ et donc $p_{\mathrm{Im} f}(v) = f(x_0)$ d'où x_0 pseudo-sol.

d' : $\boxed{x_0 \text{ pseudo-sol} \Leftrightarrow \forall x \in E \ (f(x) \mid f(x_0) - v) = 0}$

II.4 $(f(x) \mid f(x_0) - v) = (AX)^T (AX_0 - V) = X^T A^T A X_0 - X^T A^T V$

$= X^T (A^T A X_0 - A^T V)$

$= (x \mid z_0)$

Soit $n = \dim E$, $p = \dim F$, on a $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ donc $X = \Pi_{\mathcal{B}}(x)$ et $A^T A X_0 - A^T V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ donc $A^T A X_0 - A^T V = \Pi_{\mathcal{B}_0}(z_0)$ et donc $\forall x \in E$ $(x \mid z_0) = 0$ d'où $z_0 = 0$, la réciproque est évidente cl : $\boxed{x_0 \text{ pseudo-sol} \iff A^T A X_0 = A^T V}$

II.5 $A^T A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 6 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ & $A^T V = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

d'où $A^T A X = A^T V \iff \begin{cases} 3x - 3z = 0 \\ 6y = 3 \\ -3x + 3z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = x \\ y = 1/2 \\ z = x \end{cases}$

cl : $\boxed{\text{les pseudo-sol. sont } x_0 \begin{pmatrix} \lambda \\ 1/2 \\ \lambda \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}}$

II 6 a) $S = \sum_{k=1}^{n} (\lambda a_k + \mu b_k - c_k)^2 = \| \lambda a + \mu b - c \|^2$ norme euclidienne canonique de $\mathbb{R}^n$. Posons $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$(\lambda, \mu) \longmapsto \lambda a + \mu b$

On a clairement $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^n)$ et si $x = (\lambda, \mu)$,

$S = \| f(x) - c \|^2$

d'où : $\boxed{\text{Le problème équivaut à la recherche des pseudo-solutions de } f(x) = c}$

$$\boxed{M_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_n}(f) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & b_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v = c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}}$$

b) $\operatorname{Ker} f = \{0\} \Leftrightarrow \operatorname{rg} f = 2 - 0 = 2 \Leftrightarrow \operatorname{rg}(a, b) = 2$

d'où : $\boxed{f \text{ injective} \Leftrightarrow (a, b) \text{ libre}}$

c) $^tA A = \begin{pmatrix} \|a\|^2 & (a|b) \\ (a|b) & \|b\|^2 \end{pmatrix}$ avec $(a|b)$ & $\|a\|$ P.S. et norme canoniques sur $\mathbb{R}^n$.

$A^T V = \begin{pmatrix} (a|c) \\ (b|c) \end{pmatrix}$

$A^T A X = A^T V \Leftrightarrow \begin{cases} \|a\|^2 x + (a|b) y = (a|c) \\ (a|b) x + \|b\|^2 y = (b|c) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} x = \dfrac{(a|c)\|b\|^2 - (b|c)(a|b)}{\|a\|^2\|b\|^2 - (a|b)^2} \\ y = \dfrac{\|a\|^2 (b|c) - (a|b)(a|c)}{\|a\|^2\|b\|^2 - (a|b)^2} \end{cases}}$$

(formule de Cramer)

On retrouve $\|a\|^2\|b\|^2 - (a|b)^2 \neq 0$ car (a, b) libre (cf cas d'égalité de C.S.)

III 1 a) $y \in F$ et $F = \operatorname{Im} f \overset{\perp}{\oplus} (\operatorname{Im} f)^\perp$

donc $\exists (z, y') \in \operatorname{Im} f \times (\operatorname{Im} f)^\perp \mid y = z + y'$

$z \in \mathrm{Im} f$ donc $\exists x_0 \in E \mid z = f(x_0)$ et comme
$E = \mathrm{Ker} f \overset{\perp}{\oplus} (\mathrm{Ker} f)^\perp$ $\exists (h, x) \in \mathrm{Ker} f \times (\mathrm{Ker} f)^\perp \mid x_0 = h + x$
d'où $\boxed{y = f(x) + y', \quad x \in (\mathrm{Ker} f)^\perp \ \& \ y' \in (\mathrm{Im} f)^\perp}$

b) Si $y = f(x_1) + y_1' = f(x_2) + y_2'$ avec $x_i \in (\mathrm{Ker} f)^\perp, y_i' \in (\mathrm{Im} f)^\perp$
alors $f(x_1 - x_2) = y_2' - y_1' \in \mathrm{Im} f \cap \mathrm{Im} f^\perp = \{0\}$
donc $\underline{y_1' = y_2'}$ d'où $x_1 - x_2 \in \mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Ker} f^\perp = \{0\}$
donc $\underline{x_1 = x_2}$

c) Soit $(y_1, y_2) \in F^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$
$y_1 = f(x_1) + y_1'$ notations du III 1 a)
$y_2 = f(x_2) + y_2'$ et $x_i = g(y_i)$

$\lambda y_1 + y_2 = f(\lambda x_1 + x_2) + \lambda y_1' + y_2'$
$\lambda x_1 + x_2 \in \mathrm{Ker} f^\perp$ et $\lambda y_1' + y_2' \in \mathrm{Im} f^\perp$, par unicité
$\lambda x_1 + x_2 = g(\lambda y_1 + y_2)$ d'où $\boxed{g(\lambda y_1 + y_2) = \lambda g(x_1) + g(x_2)}$

III 2 $* \ g(y) = 0 \iff y = y' \iff y \in \mathrm{Im} f^\perp$

$*$ On a $\mathrm{Im}\, g \subset \ker f^{\perp}$ réciproquement si $x \in \ker f^{\perp}$

soit $y = f(x) = f(x) + \underset{\in \mathrm{Im} f^{\perp}}{0}$, par unicité, $x = g(y) \in \mathrm{Im}\, g$

d' : $\boxed{\ker g = \mathrm{Im} f^{\perp} \ \& \ \mathrm{Im}\, g = \ker f^{\perp}}$

III 3a) Soit $x \in \ker f^{\perp}$. Posons $y = f(x) = f(x) + 0$

donc $x = g(y)$ donc $\underline{x = g \circ f(x)}$

Soit $x \in \ker f$; $g \circ f(x) = 0$ d'où $g \circ f$ invariant

sur $\ker f^{\perp}$ et nulle sur $\ker f$. d' $\boxed{g \circ f \text{ proj } \perp \text{ sur } \ker f^{\perp}}$

b) soit $y \in \mathrm{Im} f$, $y = f(x) + 0$ notation de III 1a)

donc $x = g(y)$ et $f(x) = \underline{f \circ g(y)} = f(x) = \underline{y}$

Soit $y' \in \mathrm{Im} f^{\perp}$ $y' = f(0) + y'$ not. de III 1a)

donc $0 = g(y')$ d'où $f \circ g(y') = 0$

idem a) ; d' $\boxed{f \circ g \text{ proj. } \perp \text{ sur } \mathrm{Im} f}$

III.4 $\mathrm{Im} f = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = \mathbb{R}^2$ donc $\mathrm{Im} f^{\perp} = \{0\}$

$\mathrm{Ker} f :\ \begin{cases} x+y=0 \\ y+z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=x \\ y=-x \\ z=x \end{cases}$ donc $\mathrm{Ker} f = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right)$ et

$\mathrm{Ker} f^{\perp} = P / x-y+z=0$

Soit $\vec{y} = \begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ on cherche $\vec{x}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathrm{Ker} f^{\perp}$ |

$\vec{y} = f(\vec{x}) + 0$ donc $\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+y\\y+z\end{pmatrix}$ et $x-y+z=0$

d'où le système $\begin{cases} x+y=X \\ y+z=Y \\ x-y+z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} y=x+z \\ 2x+z=X \\ x+2z=Y \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x = \frac{2}{3}X - \frac{1}{3}Y \\ y = \frac{1}{3}X + \frac{1}{3}Y \\ z = \frac{-1}{3}X + \frac{2}{3}Y \end{cases}$ d'où : $M_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_3}(g) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

III 5a) Voir page (14)

b) * Comme $\mathrm{Ker}\, g \underset{\text{III 2}}{=} \mathrm{Im} f^{\perp} = \mathrm{Ker} f$, on a

$f(x) = 0.x = 0 \iff g(x) = 0 = 0.x$

* si $f(x) = \lambda x$, $\lambda \neq 0$ et $x \neq 0$ (12)

donc $x = f\left(\frac{x}{\lambda}\right) \in \operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} g^{\perp}$

d'où $g(x) = g \circ f\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \frac{x}{\lambda}$ car $\frac{x}{\lambda} \in \operatorname{Ker} g^{\perp}$ et avec le III 3a)

donc $g(x) = \frac{1}{\lambda} x$: x $\vec{v}p$ de g.

cl' : $\boxed{x \ \vec{v}p \text{ de } f \Rightarrow x \ \vec{v}p \text{ de } g.}$

c) le théorème spectral assure qu'il existe une base OTN $\mathcal{B}'$ telle que $M_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \lambda_{p+1} & \\ 0 & & & & \ddots \ \lambda_n \end{pmatrix}$. Si on pose $\mathcal{B}' = (e_1, \dots, e_n)$, on a $\mathcal{B}'$ base OTN de $\vec{v}p$ de g et $\lambda_i \neq 0$, $p \geq 0$

$M_{\mathcal{B}'}(g) = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \frac{1}{\lambda_{p+1}} & \\ 0 & & & & \ddots \ \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix} = D$

comme $D^* = D$ et $\mathcal{B}'$ OTN, cl' : $\boxed{g \text{ symétrique}}$

III.6 f est symétrique réduisons-là

dev. selon 3° ligne

$P_f(x) = -\begin{vmatrix} 3-x & 2 & 2 \\ 2 & 2-x & 0 \\ 2 & 0 & 4-x \end{vmatrix} = -2\left(-2(2-x)\right) + (4-x)(x^2 - 5x + 2)$

donc $P_g(x) = -(-x^3 + 9x^2 - 18x)$

$= x(x^2 - \underbrace{9}_{3+6}x + \underbrace{18}_{3\times 6})$

donc $sp(g) = \{0, 3, 6\}$

$AX = 0 \iff X = z\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}$, $AX = 3X \iff X = x\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$

et $AX = 6X \iff X = y\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$

d'où $\mathcal{B}' = \left(\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}, \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\right)$ base OTN de E

constituée de $\vec{vp}$ de g.

$M_{\mathcal{B}'}(g) = \begin{pmatrix}0 & & 0\\ & 1/3 & \\ 0 & & 1/6\end{pmatrix}$ car $B = M_{\mathcal{B}_0}(g)$ vérifie :

$B = P\begin{pmatrix}0 & & 0\\ & 1/3 & \\ 0 & & 1/6\end{pmatrix}P^T = \begin{pmatrix}1/9 & 1/9 & 0\\ 1/9 & 1/6 & -1/9\\ 0 & -1/9 & 2/9\end{pmatrix}$

d $\boxed{M_{\mathcal{B}_0}(g) = \begin{pmatrix}1/9 & 1/9 & 0\\ 1/9 & 1/6 & -1/9\\ 0 & -1/9 & 2/9\end{pmatrix}}$

III 5 a) (14)

* $\forall x \in \mathrm{Ker} f$: $\forall y \in \mathrm{Im} f$, $\exists a \in E \mid y = f(a)$;

$$(x|y) = (x|f(a)) \underset{f \text{ sym.}}{=} (f(x)|a) = (0|a) = 0.$$

$$\dim \mathrm{Ker} f \underset{\text{th dim rg}}{=} \dim E - \dim \mathrm{Im} f = \dim (\mathrm{Im} f)^{\perp}$$

d'où $\boxed{\mathrm{Ker} f = (\mathrm{Im} f)^{\perp}}$

* On en déduit que $(\mathrm{Ker} f)^{\perp} = (\mathrm{Im} f^{\perp})^{\perp} \underset{\text{car } E \text{ dim. finie}}{=} \mathrm{Im} f$

d'où $\boxed{\mathrm{Im} f = (\mathrm{Ker} f)^{\perp}}$

Avec le cours ker f $=(\mathrm{Im}\, f^*)^{\perp} = (\mathrm{Imf}\, f)^{\perp}$.