I.A.1) $N(A)$ existe et réel, si $(A,B)\in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda\in\mathbb{K}$

* $N(A)=0 \Rightarrow \forall i\in[\![1,n]\!]\ \sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|=0$

$\Rightarrow$ ———, $\forall j\in[\![1,n]\!]\ a_{ij}=0$

$\Rightarrow A=(0)$

* $\forall i\in[\![1,n]\!]\quad \sum_{j=1}^{n}|\lambda a_{ij}|=|\lambda|\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\leq|\lambda|N(A)$

donc $N(\lambda A)\leq|\lambda|N(A)$

si $\lambda\neq 0$ $N(A)=N(\frac{1}{\lambda}\lambda A)\leq|\frac{1}{\lambda}|N(\lambda A)$

donc $|\lambda|N(A)\leq N(\lambda A)$

d'où l'égalité (et valable si $\lambda=0$)

* $\forall i\in[\![1,n]\!]\quad \sum_{j=1}^{n}|a_{ij}+b_{ij}|\leq N(A)+N(B)$

donc $N(A+B)\leq N(A)+N(B)$

* Notons $C=AB$

(Σ finies)

$\forall i\in[\![1,n]\!]\quad \sum_{j=1}^{n}|c_{ij}|=\sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{\alpha=1}^{n}a_{i\alpha}b_{\alpha j}\right|\leq\sum_{j=1}^{n}\sum_{\alpha=1}^{n}|a_{i\alpha}||b_{\alpha j}|$

$\leq\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{i\alpha}||b_{\alpha,j}|\leq\sum_{\alpha=1}^{n}|a_{i,\alpha}|N(B)$

$\leq N(A).N(B)$

cqs $N(AB) \leqslant N(A)N(B)$

d'où $\boxed{N \text{ norme sous-multiplicative sur } \mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$

I.A.2) Avec les mêmes notations qu'au I.A.1), $\|A\| \in \mathbb{R}$

- $\|A\| = 0 \Rightarrow Q^{-1}AQ = (0) \Rightarrow A = Q \times (0) \times Q^{-1} = (0)$
- $\|\lambda A\| = N(Q^{-1}\lambda AQ) = |\lambda| \, \|A\|$
- $\|A+B\| = N(Q^{-1}(A+B)Q) = N(Q^{-1}AQ + Q^{-1}BQ) \leqslant \|A\| + \|B\|$
- $\|AB\| = N(Q^{-1}ABQ) = N(Q^{-1}AQQ^{-1}BQ) \leqslant \|A\| \cdot \|B\|$

d'où $\boxed{\|\ \| \text{ norme sous-mult.}}$

I.B.1)

$$T\left(\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & & \\ \vdots & 0 & \ddots & \\ 0 & \vdots & & t_{nn} \end{pmatrix}\right) \quad \left(\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \delta & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \delta^{n-1} \end{pmatrix}\right)\Delta$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1/\delta & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1/\delta^{n-1} \end{pmatrix}}_{\Delta^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ 0 & t_{22}/\delta & \cdots & t_{2,n}/\delta \\ & 0 & \ddots & \\ & & & t_{n,n}/\delta^{n-1} \end{pmatrix}}_{\Delta^{-1}T} \underbrace{\begin{pmatrix} t_{11} & \delta t_{12} & \delta^2 t_{13} & \cdots & \delta^{n-1} t_{1n} \\ 0 & t_{22} & \delta t_{23} & \cdots & \delta^{n-2} t_{2,n} \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \delta t_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & & t_{n,n} \end{pmatrix}}_{\Delta^{-1}T\Delta}$$

cqs $\Delta^{-1}T\Delta$ triangulaire supérieure

$$N(\hat{T}) = \max\left(|t_{11} + \delta t_{12} + \cdots + \delta^{n-1} t_{1n}|, |t_{22} + \delta t_{23} + \cdots + \delta^{n-2} t_{2,n}|, \ldots, |t_{n-1,n-1} + \delta t_{n-1,n}|, |t_{n,n}|\right)$$

On $sp(A) = sp(T) = \{ t_{1,1}, \dots, t_{n,n} \}$

donc $\rho(A) = \rho(T) = \max\{ |t_{i,i}|, i \in [\![1,n]\!] \} < 1$.

$\forall i \in [\![1,n]\!]$ $\lim\limits_{t \to 0} |t_{ii} + \delta t_{i,i+1} \dots + \delta^{n-i} t_{i,n}| = |t_{ii}| < 1$

donc $\exists \alpha_i > 0 \mid \forall |\delta| \leq \alpha_i$, $|t_{ii} + \dots + \delta^{n-i} t_{i,n}| \leq \underbrace{1 - |t_{ii}|}_{<1}$

Posons $\boxed{\delta = \min(\alpha_1, \dots, \alpha_n) > 0 ; N(\hat{T}) < 1}$

I.B.2) $\|A\| = N(Q^{-1}AQ) = N(\Delta^{-1} \underbrace{P^{-1}AP}_{T} \Delta) = N(\hat{T}) < 1$

Cqs $\forall m \geq 1$, $0 \leq \|A^m\| \leq \|A\|^m \xrightarrow[m \to \infty]{} 0$

Par thm d'encadrement, $\boxed{\lim\limits_{m \to \infty} A^m = (0)}$

II.A) Exemple de chemin pour $n = 4$;

$i = i_0 = 2$, $i_1 = 1$, $i_3 = 4$, $i_4 = 1$, $i_5 = 2$, $i_6 = 3$, $i_7 = 4 = j$

Donc $a_{2,1}$; $a_{1,4}$; $a_{4,1}$; $a_{1,2}$; $a_{2,3}$; $a_{3,4} > 0$

$i'_0 = i = 2$, $i'_1 = 3$, $i'_2 = j = 4$

ou $i'_0 = i = 2$, $i'_1 = 1$, $i'_2 = j = 4$

L'idée c'est que s'il y a 2 indices égaux, on "coupe" entre les 2

Précisons

Soit $X = \{ m \in \mathbb{N}^* \mid$ il existe un chemin de i vers j et de longueur $m \}$

$X \neq \emptyset$ par hypothèse et $X \subset \mathbb{N}^*$, donc X possède un plus petit élt $\underline{l}$ et donc un chemin :

$i_0 = i \to i_1 \to i_2 \cdots \to i_l = j$

Si $i_0, i_1, \dots, i_l$ ne sont pas 2 à 2 distincts,

$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{N} \mid i_\alpha = i_\beta$ et $0 \leq \alpha < \beta \leq l$

donc $i_0 = i \to i_1 \cdots \to i_\alpha \to i_{\alpha+1} \cdots \to i_\beta \to \cdots \to i_l = j$

dans ce cas $i_0 \to i_1 \cdots \to i_\alpha \to i_{\beta+1} \to \cdots \to i_l = j$

ou $i_0 \to i_1 \cdots \to i_{\alpha-1} \to i_\beta \to \cdots \to i_l = j$

(selon que $\alpha = 0$ ou $\beta = l$)

sont des chemins de longueur $m < l$: absurde

d'où $\boxed{\text{il existe un chemin élémentaire de } i \text{ vers } j \text{ de longueur } l \leq n-1 \text{ (car les } i_k \text{ sont dans } [\![1, n]\!])}$

Soit $\mathcal{C}$ un circuit de longueur m et passant par i,

si $m = 1$, $i_0 = i_m = i$: $\mathcal{C}$ élémentaire et $m \leq n$, si $m \geq 2$ et $\mathcal{C} : i_0 = i \to i_1 \cdots \to i_{m-1} \to i_m = i$

il existe un chemin élémentaire de i_0 à i_{m-1} et de longueur $l_1 \leq n-1$, si on rajoute à ce chemin $i'_{l_1} = i$, on obtient un circuit élémentaire passant par i.

d'$\boxed{\text{il existe un circuit élémentaire passant par } i \text{ et de longueur } l = l_1 + 1 \leq n}$

II. 3) si $m = 1$, $i_0 = i$ et $i_1 = j$ donc $a_{i_j} = a_{i,j}^{(1)} > 0$

et si $a_{i,j} > 0$, $i_0 = i$, $i_1 = j$ donne un circuit de i à j de longueur 1.

si $m = 2$ (pour voir !) $i_0 \to i_1 \to i_2 = j$

$$a_{i,j}^{(2)} = \sum_{\alpha=1}^{n} a_{i,\alpha} a_{\alpha,j} = \underbrace{a_{i,i_1} a_{i_1,j}}_{>0} + \underbrace{\sum_{\alpha \neq i_1} a_{i\alpha} a_{\alpha,j}}_{\geq 0}$$

car $\underline{A \geq 0}$

supposons vraie l'équivalence pour $m-1$

s'il existe un chemin $\mathcal{C} : i_0 = i \to \cdots \to i_{m-1} \to i_m = j$,

on a donc $a_{i,i_{m-1}}^{(m-1)} > 0$ et $a_{i,j}^{(m)} = \sum_{\alpha=1}^{n} a_{i,\alpha}^{(m-1)} a_{\alpha,j}$

donc $$a_{i,j}^{(m)} = \underbrace{a_{i,i_{m-1}}^{(m-1)}}_{\substack{>0 \\ \text{hyp. de} \\ \text{réc.}}} \underbrace{a_{i_{m-1},j}}_{\substack{>0 \\ (\mathscr{C})}} + \underbrace{\sum_{\alpha \neq i_{m-1}} a_{i,\alpha}^{(m-1)} a_{\alpha j}}_{\geq 0}$$

donc $a_{i,j}^{(m)} > 0$

récip. si $a_{i,j}^{(m)} = \sum_{\alpha=1}^{n} a_{i,\alpha}^{(m-1)} a_{\alpha j} > 0$

il existe $\alpha \in [\![1, n]\!] \setminus a_{i,\alpha}^{(m-1)} a_{\alpha,j} > 0$,

donc il existe un chemin de longueur $m-1$ de i à α et en rajoutant à ce chemin, j ($a_{\alpha j} > 0$) on a un chemin de longueur m de i à j.

cl $\boxed{\text{l'équivalence est vraie pour tout } m \geq 1}$

II.c) s'il existe un chemin dans A^m de i à j de longueur l, comme $(A^m)^l = A^{ml}$, avec le II B, $a_{ij}^{(ml)} > 0$ donc (tjs II B) il existe un chemin dans A de i à j de longueur ml. Réciproquement s'il existe un chemin dans A de i à j de longueur ml, $a_{ij}^{(ml)} > 0$ et comme

$a_{ij}^{(ml)} = (a^{(m)})^{l}_{i,j} > 0$, il existe un chemin ds A^m (7)

de i à j de longueur l.

d'o $\boxed{\text{On a l'équivalence}}$

III. A) $\exists m \geq 1 \mid A^m > 0$ donc $a_{i,j}^{(m)} > 0$ d'où il existe un chemin de i à j dans A de longueur m (II. B) et avec II. A), il existe un chemin élémentaire ds A de i à j et de longueur $l \leq n-1$.

On fait de même avec $a_{i,i}^{(m)} > 0$ pour le circuit.

d'o $\boxed{\text{On a les existences voulues.}}$

III. B.1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \geq 0 \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} > 0$

d' $\boxed{A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ convient}}$

III. B.2) Si $Bx = 0$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$ $b_{i,1} x_1 + \cdots + b_{i,n} x_n = 0$.

Comme $b_{ij} > 0$ et $x_j \geq 0$, on a $b_{i,1} x_1 = \cdots = b_{i,n} x_n = 0$

puis $x_1 = \cdots = x_n = 0$: Absurde d' $\boxed{Bx > 0}$

III B.3) Si l'une des colonne c_j de A est nulle

$$A^2 = A\begin{pmatrix} c_1 \cdots & c_j & \cdots c_n \\ & 0 & \end{pmatrix}$$ et par récurrence la j-ème colonne de A^k est nul pour tout k : absurde $A^m > 0$.

Comme $A^{p+1} = A^p(c_1|\cdots|c_n) = (A^p c_1|\cdots|A^p c_n) > 0$ avec la III.B.2), par récurrence : d'où $\boxed{\forall p \geq n \quad A^p > 0}$

III.B.4) si $A^m > 0$, $m \geq 1$, $\forall k \geq 1$ $mk \geq m$ et donc $A^{mk} = (A^k)^m > 0$ d'où $\boxed{A^k \text{ primitive}}$

III B.5) Si $\rho(A) = 0$, $sp(A) = \{0\}$ (dans $\mathbb{C}$) et comme χ_A est scindé dans $\mathbb{C}$, $\chi_A(x) = x^n$ d'où avec Cayley-Hamilton $A^n = (0)$ et donc $\forall p \geq n$ $A^p = (0)$. Or $\exists m \geq 1 \mid A^m > 0$ et $\forall p \geq m$ $A^p > 0$: absurde pour $p = \max(n, m)$ d'où $\boxed{sp(A) > 0}$

III.C.1)

$$\chi_{W_n}(x) = \begin{vmatrix} x & -1 & & 0 \\ & x & \ddots & \\ & & x & -1 \\ -1 & -1 & & x \end{vmatrix} \underset{\text{dev } 1^{\text{ère}} \text{ ligne}}{=} x\begin{vmatrix} x & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 \\ -1 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -1 & & 0 \\ 0 & x & \ddots & \\ \vdots & & x & -1 \\ -1 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix}$$

dev. $1^{\text{ère}}$ col.

$$= x\left[x\begin{vmatrix} x & * \\ 0 & x \end{vmatrix} + (-1)^{n-1+1}(-1)\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ * & -1 \end{vmatrix}\right] + (-1)^{n-1+1}(-1)(-1)^{n-2}$$

$= x \times n \times n^{n-2} - n - 1$

cl $\boxed{\chi_{W_n}(n) = n^n - n - 1}$

rem: comme pour les matrices compagnons, on pouvait aussi faire une super op. Gaussienne ;

$C_1 \leftarrow C_1 + n C_2 + \dots + n^{n-1} C_n$ d'où $\chi_{W_n}(n) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ & 0 & & n-1 \\ 0 & & & \\ x^n - n - 1 & 0 & \cdots & 0 \; n \end{vmatrix}$

Avec Cayley Hamilton, on a $W_n^n = W_n + I_n$ et comme W_n et I_n commutent, on applique Newton ;

$$(W_n^n)^{n-2} = \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} W_n^k$$

cdv $k = k-1$

donc $W_n^{n^2-2n+1} = \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} W_n^{k+1} = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-2}{k-1} W_n^k$

d'où $W_n^{n^2-2n+2} = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-2}{k-1} W_n^{k+1} = \underbrace{W_n^n}_{k=n-1} + \sum_{k=1}^{n-2} \binom{n-2}{k-1} W_n^{k+1}$

$$= \underbrace{I_n + W_n}_{(CH)} + \sum_{k=2}^{n-1} \binom{n-2}{k-2} W_n^k$$

cl° $\boxed{\text{On a les égalités demandées}}$

III, C, 2) $a_{1,2} > 0$, $a_{2,3} > 0$, $\dots$, $a_{n-1,n} > 0$, $a_{n,1} > 0$

donc $1 \to 2 \to 3 \to \dots \to n \to 1$ est un circuit qui passe par 1 et de longueur n ($i_0 = 1 = i_n$)

Supposons qu'il existe un circuit passant par 1 et de longueur $m \leq n-1$. D'après la II B, on aurait $w_{11}^{m} > 0$.

Si on note $e_1, \dots, e_n$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$,

$w_n(e_1) = e_n$

$w_n^2(e_1) = e_{n-1} \rightsquigarrow w_n^2 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots \\ \vdots & \\ 0 & \\ 1 & \\ 0 & \cdots \end{pmatrix}$

$w_n^3(e_1) = e_{n-2}$

$\vdots$

$w_n^{n-1}(e_1) = e_2 \longrightarrow w_n^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots \\ 1 & \\ 0 & \\ \vdots & \\ 0 & \cdots \end{pmatrix}$

donc $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$ $w_n^{(k)}{}_{ij} = 0$: absurde

cl $\boxed{\text{$1 \to 2 \dots \to n \to 1$ est le plus court circuit passant par 1, il est de longueur n}}$

On a donc $\left(w_n^{n^2-2n+1}\right)_{1,1} = \sum_{k=1}^{n-1} 0 = 0$

cl $\boxed{w_n^{n^2-2n+1} \text{ non st. positive}}$

III.C.3) • si $1 \notin \{i, j\}$ sans perte de généralité, on suppose $i < j$ et le chemin extrait du circuit ci-dessus,
$i \to i+1 \to \dots \to j$ est de longueur $j - i \leq n-1$

* si $i=1$ et $j\neq 1$ $1\to 2\to \dots \to j$ est un chemin de 1 à j de longueur $j-1\leq n-1$

d'où $\boxed{\forall i\neq j \text{ il existe un chemin de } i \text{ à } j \text{ dans } W_n \text{ de longueur } l\leq n-1}$

Cqs * $\forall i\neq j$ $\exists k\in [\![1,n-1]\!] \mid (W_n^k)_{i,j}>0$ d'où avec III.C.1) comme I_n, W_n^i sont positives ($\forall i$), on a $(W_n^{n^2-2n+2})_{i,j}\geq \binom{n-2}{k-2}(W_n^k)_{i,j}>0$

* $\forall i$ $(W_n^{n^2-2n+2})_{i,i}\geq (I_n)_{i,i}=1>0$

d'où $\boxed{W_n^{n^2-2n+2}>0 \text{ et donc l'indice vaut } n^2-2n+2}$

III.D.1) * Soit $i_0\to i_1\to i_2\to \dots \to i_n=i_0$ un circuit élémentaire. Ce circuit est unique au sens que si $i_0\to j$ alors $j=i_1$, sinon $\exists k \mid j=i_k$ et $i_0\to i_k\to i_{k+1}\dots\to i_n=i_0$ est un circuit élémentaire de longueur $l<n$. De même $\forall k$ $\exists! j=i_{k+1}$ $i_k\to i_{k+1}$.

Si $j_0 \to j_1 \to \dots \to \underline{j_m = j_0}$ est un circuit de $\underline{\text{longueur } m}$

Soit $k \in [\![0, n-1]\!] \setminus j_0 = i_k$ alors $j_1 = i_{k+1}$, $j_2 = i_{k+2}$ et

par récurrence finie, $\forall \alpha \in [\![0, m]\!]$ $j_\alpha = i_{k+\alpha \bmod n}$

d'où $k+m \equiv k \bmod n$ soit $\cancel{k}+m = \cancel{k}+nd$: $m = nd$

d' $\boxed{m \text{ multiple de } n.}$

* Si $a^{(kn+1)}_{i,i} > 0$, alors (. II B), il existe un chemin de i à i donc un circuit de longueur $kn+1$: qui n'est pas divisible par n, donc A^{kn+1} de diagonale nulle.

Or $\exists m > 0 \setminus A^m > 0$ car A est primitive et avec le III.B 3), $\forall p \geq m$: $A^p > 0$. Il suffit de choisir un $p \geq m$ de la forme $k_0 n + 1$ (possible car $kn+1 \xrightarrow[k \to \infty]{} +\infty$). Or $A^{k_0 n+1} > 0$ est contradictoire avec $A^{k_0 n+1}$ de diagonale nulle. d' $\boxed{\ell \leq n-1}$

III, D, 2, a) $\underbrace{1^{\text{er}} \text{ cas}}$ $i \in [\![1, \ell]\!]$

$1 \to 2 \to \dots \to \underset{i_0}{i} \to \underset{i_1}{\underline{i+1}} \to \dots \ell \to 1 \to 2 \to 3 \dots \to \ell \to \dots \to \overset{i_{n-\ell}}{k}$

(on tourne ds le circuit $\mathcal{C}$ jusqu'à avoir $n-\ell$ elt.

2ème cas $i \notin [\![1, \ell]\!]$

Comme A est primitive, $\exists m \geq 1 \mid A^m > 0$, donc $a^{(m)}_{i,1} > 0$ et donc d'après le II B puis le II A, il existe un chemin élémentaire de i à j de longueur $\ell' \leq n-1$:

$$i_0 = i \to i_1 \to i_2 \to \cdots \to i_{\ell'} = 1$$

si $i_0, i_1, \dots, i_{\ell'-1}$ sont tous dans $[\![\ell+1, n]\!]$ alors comme ils sont 2 à 2 distincts, $\ell' \leq n-\ell$ et dans ce cas on complète le circuit comme au 1er cas pour arriver à une longueur $n-\ell$.

sinon soit i_α le 1er indice tel que $i_\alpha \in [\![1, \ell]\!]$

idem : $i_0 \to i_1 \to \cdots \to i_\alpha = \beta \to \beta+1 \to \cdots \to \ell \to 1 \cdots \to \gamma$

$\longleftrightarrow$ $\leq n-\ell$

$\longleftrightarrow$ $= n-\ell$

d'où $\boxed{\forall i \in [\![1, n]\!], \text{ il existe un chemin d'origine } i, \text{ de longueur } n-\ell \text{ et d'extrémité } k \in [\![1, \ell]\!]}$

b) Comme $i \to i+1 \to i+2 \cdots \to \ell \to 1 \cdots \to i$,

d'où $\boxed{a_{i,i}^{(\ell)} > 0 \quad \forall i \in [\![1, \ell]\!]}$

A^ℓ est aussi primitive d'après le III B 3), donc avec le III A, il existe un chemin élémentaire dans A^ℓ de k vers j et de longueur $\ell' \leq n-1$:

$$k \to i_1 \to i_2 \to \cdots \to j$$

Comme $a_{k,k}^{(m)} > 0$, on a $k \to k$ d'où on rajoute des k :

$$\underbrace{k \to k \cdots \to k \to i_1 \to \cdots \to j}_{n-1}$$

pour avoir une longueur $n-1$. On conclut avec le II C :

d'où $\boxed{\text{il existe un chemin dans } A \text{ de } k \text{ vers } j \text{ de longueur } \ell(n-1)}$

c) En concaténant le chemin du a) de i vers k et celui du b) de k vers j, on a un chemin dans A de i vers j de longueur $n-\ell+\ell(n-1) = n+\ell(n-2)$

ceci étant vrai $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2$, d'où $\boxed{A^{n+\ell(n-2)} > 0}$

comme $n-1 \geqslant \ell$, $\underbrace{n+(n-1)(n-2)}_{=n^2-2n+2} \geqslant n+\ell(n-2)$

avec le III B 3), d'où $\boxed{A^{n^2-2n+2} > 0}$

IV. A.1) On a $A^T y = r y$

Soit $v \in H$, $\exists u \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus v = Au - ru$

$y^T v = y^T A u - r y^T u = (A^T y)^T u - r y^T u$

$= (ry)^T u - r y^T u = r y^T u - r y^T u = 0$

cqs $H \perp \Delta$ donc $H \subset \Delta^\perp$ et avec l'égalité des

dimensions : $\boxed{H = \Delta^\perp}$

IV. A.2) $L^2 = x \underbrace{y^T x}_{=1} y^T = L$: L matrice de projection

notons $p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \setminus \underline{\mathcal{M}_{b_0}(p) = L}$

$Lx = x y^T x = x$ donc $\underline{D \subset \operatorname{Im} p}$

$\forall v \in H \quad Lv = x y^T v = x \times 0 = 0$ donc $H \subset \operatorname{Ker} p$

Comme $x \in \operatorname{Im} p$, $\operatorname{Im} p \neq \{0\}$ donc $\operatorname{Ker} p \neq \mathbb{R}^n$ d'où $H = \operatorname{Ker} p$

car même dim. Avec le théorème du rang :

d' $\boxed{\operatorname{Im} p = D,\ \operatorname{Ker} p = H \text{ et } L \text{ matrice de la proj. sur } D \parallel^{\text{t}} H}$

IV.A 3) Si on note $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$* \ \mathrm{rg}\, L = \dim \mathrm{Im}\, p = \dim \Delta = 1$ donc $\mathrm{rg}\, L = 1$

$* \ L = xy^T = \begin{pmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 & \cdots & x_1 y_n \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \\ x_n y_1 & x_n y_2 & \cdots & x_n y_n \end{pmatrix} > 0$ (hyp. sur x et y)

$* \ L^T y = y x^T y = y \cdot \underbrace{(x|y)}_{=1} = y$

d' $\boxed{\mathrm{rg}\, L = 1, \ L > 0 \text{ et } L^T y = y}$

IV.A.4) $AL = Axy^T = (rx)y^T = rL$

$LA = xy^T A = x(A^T y)^T = x(ry^T) = rL$

d' $\boxed{AL = LA = rL}$

Par récurrence sur m : $m = 1$, oui !, si c'est vrai pour m, $(A - rL)^{m+1} = (A^m - r^m L)(A - rL)$

$= A^{m+1} - rA^m L - r^m L^m A + r^{m+1} L^2$

Comme $L^2 = L$, $L^m = L$ et $L^m A = LA = rL$

et $A^m L = A^m L^m \underset{AL = LA}{=} (AL)^m = (rL)^m = r^m L$

cqs $(A - rL)^{m+1} = A^{m+1} - r^{m+1} L - \cancel{r^{m+1} L} + \cancel{r^{m+1}} L$

$= A^{m+1} - r^{m+1} L$

d $\boxed{\forall m \geq 1 : (A - rL)^m = A^m - r^m L}$

IV.B.1) Si $Az - rLz = \lambda z$, $LAz - rL^2 z = \lambda L z$ $(\times L)$

avec les relations $\left| \begin{array}{l} LA = rL \\ L^2 = L \end{array} \right.$, on a $\underbrace{rLz - rLz}_{=0} = \underbrace{\lambda}_{\lambda \neq 0} Lz$

d'où $Az - 0 = \lambda z$ d' $\boxed{Lz = 0 \text{ et } Az = \lambda z}$

Comme $z \neq 0$ (∇p), $\lambda \in sp(A)$ et donc $|\lambda| \leq \rho(A) = r$.

Comme $|0| = 0 \leq r$ d' $\boxed{\rho(B) \leq r}$

IV.B 2) D'après le résultat admis au début du IV, r est une val. propre dominante (c'est l'α de la mente!)

donc comme $\lambda \in sp(A)$, $|\lambda| < r$ ou $\lambda = r$

cqs $\boxed{\lambda = r}$

Donc $Az = rz$ donc $z \in D = \mathrm{Im}\, p$ donc $\boxed{Lz = z}$

cqs $Lz = z = 0$ $\rightarrow\!\leftarrow$ d' $\boxed{\rho(B) < r}$

IV.B.3) $\left(\frac{1}{r} A\right)^m = L + \left(\frac{1}{r} B\right)^m$ d'après IV.A.4)

Or $sp\left(\frac{1}{r} B\right) = \left\{ \frac{\lambda}{r}, \lambda \in sp(B) \right\}$ donc $\rho\left(\frac{1}{r} B\right) = \frac{\rho(B)}{r} < 1$

On conclut avec le I : $\lim\limits_{m \to \infty} \left(\frac{1}{r} B\right)^m = (0)$ d $\boxed{\lim\limits_{m \to \infty} \left(\frac{1}{r} A\right)^m = L}$

IV.c) $T = \begin{pmatrix} r & & & & * \\ & \ddots & & & \\ & & r & & \\ & & & \lambda_2 & \\ 0 & & & & \ddots \lambda_p \end{pmatrix}$ $\frac{1}{r} T = \begin{pmatrix} 1 & & & & * \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \lambda_2/r & \\ 0 & & & & \ddots \lambda_p/r \end{pmatrix}$ (18)

d'autre par $\left(\frac{1}{r}T\right)^m = \left(\frac{1}{r} PAP^{-1}\right)^m = P\left(\frac{1}{r}A\right)^m P^{-1}$

$\xrightarrow[m\to\infty]{TG} PLP^{-1}$

d'où $PLP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & * \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ 0 & & & & \ddots 0 \end{pmatrix}$ $\left(\frac{\lambda_i}{r}\right)^m \xrightarrow[\infty]{} 0$ car $\left|\frac{\lambda_i}{r}\right| < 1$

Or $\operatorname{rg} PLP^{-1} = \operatorname{rg} L = 1$ qui n'est possible que s'il n'y a qu'un seul 1 dans $\begin{pmatrix} 1 & & & & * \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ 0 & & & & \ddots 0 \end{pmatrix}$

d $\boxed{t = 1}$

V.A.1) $\boxed{\text{A est irréductible ssi } \forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2 \text{ il existe un chemin de A de } i \text{ à } j \text{ (de longueur m dépendant de } i, j)}$

V.A 2) c'est la II.A) si $i \neq j$ et pour $i = j$ $a_{i,i}^{(0)} = 1 > 0$

d $\boxed{\forall i,j \ \exists m \in [\![0, n-1]\!] \setminus a_{i,j}^{(m)} > 0}$

IV.A.3) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc $a_{i,j}^{(m)} > 0$; $\forall i,j$ avec $m = 1$ ou 2

donc $A^{2n+1} = A \geq 0$ et $A^{2n} = I_2 \geq 0$

d'o $\boxed{A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} \text{ irréductible mais non primitive}}$ (19)

V.A.4) Si A^2 irréductible, alors $\forall i,j,\ \exists m\in\mathbb{N} \backslash (A^{2m})_{i,j}=a_{i,j}^{(2m)}>0$

comme $2m\in\mathbb{N}$, A irréductible, on conclut par

contraposée : $\boxed{A \text{ non irréductible} \Rightarrow A^2 \text{ non irréductible}}$

La matrice $A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ convient car $A^2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ et

$\forall n\in\mathbb{N}\ (A^2)^n \not> 0$ d'o $\boxed{A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} \text{ convient}}$

V.A.5) Si $\rho(A)=0$ alors $sp(A)=\{0\}$ et $\exists P\in GL_n(\mathbb{C}) \backslash$
$A=P\begin{pmatrix}0&&*\\&\ddots&\\0&&0\end{pmatrix}P^{-1}$ d'où $\operatorname{tr}A=0=\sum_{i=1}^{n}a_{i,i}=0$. Comme

$A\geq 0$, $\forall i\in[\![1,n]\!]\ a_{i,i}=0$, de m $\forall m\in\mathbb{N}: A^m=P\begin{pmatrix}0&&*\\&\ddots&\\0&&0\end{pmatrix}P^{-1}$

donc $\forall m\geq 1,\ \forall i\in[\![1,n]\!]\ a_{i,i}^{(m)}=0$

$\overline{\overline{\text{I}}}$ attention : $a_{i,i}^{(0)}=1>0$

Or $\exists m_1\geq 0 \backslash a_{1,2}^{(m_1)}>0$ et comme $a_{1,2}^{(0)}=0$, $m_1\geq 1$

de m $\exists m_2\geq 1 \backslash a_{2,1}^{(m_2)}>0$ d'où $a_{1,1}^{(m_1+m_2)}=\underbrace{a_{1,2}^{(m_1)}\times a_{2,1}^{(m_2)}+\dots}_{>0}$

absurde car $\left|a_{1,1}^{(m)}=0\right.$ $\forall m\geq 1$ d'o $\boxed{\rho(A)>0}$

V.B.1) Notons i, ii, iii, les 3 lignes.

<u>i ⟹ ii</u> : $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2 \quad \exists m \in [\![0, n-1]\!] \setminus$

$$a_{i,j}^{(m)} > 0 \text{ (VA2) donc } b_{i,j} \geqslant a_{i,j}^{(m)} > 0$$

donc $\underline{B > 0}$

<u>ii → iii</u> : Comme I_n et A commutent, $C = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} A^k$

d'où $\forall i,j \quad c_{i,j} \geqslant b_{i,j} > 0$ donc $\underline{C > 0}$

<u>iii ⟹ i</u> : $\forall i,j \quad c_{i,j} = \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a_{i,j}^{(m)} > 0$, donc $\exists m \in [\![0, n-1]\!] \setminus$

$a_{i,j}^{(m)} > 0$ donc A irréductible

d'où $\boxed{\text{les 3 conditions sont équivalentes}}$

V.B.2) * Si la i-ème ligne de A est nulle alors par récurrence $\forall j \quad a_{i,j}^{(m+1)} = \sum_{\alpha=1}^{n} \underbrace{a_{i,\alpha}^{(m)}}_{=0} \times a_{\alpha,j} = 0$

cqs $\forall m \geqslant 0 \quad a_{i,1}^{(m)} = 0$: absurde

* Comme A irréductible ⟹ A^T irréductible, on conclut : d'où $\boxed{\text{aucune ligne (et colonne) de A n'est nulle}}$

V.C.1) $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2, \exists m \in [\![0, n-1]\!] \setminus a_{i,j}^{(m)} > 0$ donc il existe un chemin $i_0 = i \to i_1 \to \cdots \to i_m = j \to j \to \cdots \to j$

$\uparrow$ car $a_{jj} > 0$

$\longleftarrow$ longueur $n-1$ $\longrightarrow$

cqs $a_{ij}^{(n-1)} > 0$ d'où $\boxed{A^{n-1} > 0}$

V.C.2) Soit $j = i_0 \to i_1 \to \cdots \to i_p = i$ et $i = j_0 \to \cdots \to h$, on les concatène en un chemin $j \to \cdots \to i \to \cdots \to h$ de longueur $m_{j,h}$. Soit $m = \max\{m_{j,h}, (j,h) \in [\![1,n]\!]^2\}$

$\forall (j,h) \in [\![1,n]\!]^2$, on a le chemin de j à h de longueur m :

$$j \to \cdots \to \underbrace{i \to i \to i \cdots}_{\text{on rajoute des } i \text{ pour avoir}} \to i \to j_1 \to \cdots \to h$$

une longueur m. ($\geqslant m_{j,h}$)

cqs $a_{j,h}^{(m)} > 0$ d'où $\boxed{A \text{ primitive}}$