

Fonction de Wallis

1 Calcul de $\sigma(1)$

1 ▷ On note D l'ensemble de définition de σ .

Méthode 1 : Soit $x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$, on a par croissance comparée : $\left| \frac{x^k}{k^2} \right| \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} +\infty$

donc la série $\sum_{k \geq 1} \frac{x^k}{k^2}$ diverge grossièrement d'où $D \subset [-1, 1]$.

Par ailleurs, pour $k \in \mathbb{N}^*$ la fonction $x \mapsto \frac{x^k}{k^2}$ est continue sur l'intervalle $[-1, 1]$ (i).

De plus $\forall x \in [-1, 1]$, $\left| \frac{x^k}{k^2} \right| \leq \frac{1}{k^2}$ et la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2}$ converge selon ce cher Georges.

Ainsi la série de fonctions $\sum_{k \geq 1} \left(x \mapsto \frac{x^k}{k^2} \right)$ converge normalement donc uniformément sur $[-1, 1]$.

Méthode 2 : σ est la somme d'une série entière de la forme $\sum k^p x^k$ avec $p = -2 \in \mathbb{R}$. Le rayon de convergence vaut donc 1. On a donc

$$]-1, 1[\subset D \subset [-1, 1]$$

et σ est continue sur l'intervalle ouvert de convergence $]-1, 1[$ car $\mathcal{C}^\infty$ sur icelui. Comme $2 > 1$,

les séries $\sum_{k \geq 1} \frac{1^k}{k^2} = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2}$ et $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^k}{k^2}$ convergent absolument selon Riemann donc convergent.

Ainsi $D = [-1, 1]$ et selon le lemme d'Abel radial, on a alors

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sigma(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1^k}{k^2} = \sigma(1)$$

Ainsi σ est continue en 1 et c'est analogue en -1 .

Conclusion : le domaine de définition de σ est $[-1, 1]$ et σ est continue sur icelui

2 ▷ Soit α et $\beta \in \mathbb{R}$. On note $P = \alpha X^2 + \beta X$. Ainsi $P' = 2\alpha X + \beta$ et $P'' = 2\alpha$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par intégrations par parties successives (avec des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$), on a

$$\int_0^\pi P(t) \cos(nt) dt = \left[P(t) \frac{\sin(nt)}{n} \right]_{t=0}^{t=\pi} - \int_0^\pi P'(t) \frac{\sin(nt)}{n} dt = 0 + \left[P'(t) \frac{\cos(nt)}{n^2} \right]_{t=0}^{t=\pi} - \int_0^\pi P''(t) \frac{\cos(nt)}{n^2} dt$$

$$\text{or } \int_0^\pi P''(t) \frac{\cos(nt)}{n^2} dt = \left[2\alpha \frac{\sin(nt)}{n^2} \right]_{t=0}^{t=\pi} = 0 \text{ et } \left[P'(t) \frac{\cos(nt)}{n^2} \right]_{t=0}^{t=\pi} = \frac{(-1)^n P'(\pi) - P'(0)}{n^2} \text{ donc}$$

$$\int_0^\pi (\alpha t^2 + \beta t) \cos(nt) dt = \frac{(-1)^n (2\pi\alpha + \beta) - \beta}{n^2}$$

En prenant $\beta = -1$ et $\alpha = \frac{1}{2\pi}$, on a $(-1)^n (2\pi\alpha + \beta) - \beta = 1$. Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \cos(nt) dt = \frac{1}{n^2}$$

Soit $t \in]0, \pi]$. On a donc $t/2 \in]0, \pi/2]$ et ainsi $\sin\left(\frac{t}{2}\right) \neq 0$ et les termes de l'égalité existent bien. Montrons l'égalité par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

L'initialisation est triviale car $\sum_{k=1}^0 \cos(kt) = 0 = \frac{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2}$.

Pour l'hérédité, on considère $n \in \mathbb{N}$ tel que l'égalité soit vraie au rang n . On a donc :

$$\sum_{k=1}^{n+1} \cos(kt) = \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2} + \cos((n+1)t) = \frac{\sin\left((n+1)t - \frac{t}{2}\right) + 2 \sin\left(\frac{t}{2}\right) \cos((n+1)t)}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2}$$

Or $\sin\left((n+1)t - \frac{t}{2}\right) = \sin((n+1)t) \cos\left(\frac{t}{2}\right) - \cos((n+1)t) \sin\left(\frac{t}{2}\right)$ donc

$$\sin\left((n+1)t - \frac{t}{2}\right) + 2 \sin\left(\frac{t}{2}\right) \cos((n+1)t) = \sin((n+1)t) \cos\left(\frac{t}{2}\right) + \sin\left(\frac{t}{2}\right) \cos((n+1)t) = \sin\left((n+1)t + \frac{t}{2}\right)$$

On a donc l'égalité au rang $n+1$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \cos(kt) = \frac{\sin\left(\frac{(2n+3)t}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2}$$

On peut donc conclure que la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ et comme $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N}$, on a bien

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n \cos(kt) = \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2}$$

Comme $\cos(kt) = \operatorname{Re}(e^{ikt})$, on aurait pu utiliser une somme géométrique de raison $e^{it} \neq 1$ car $t \in]0, \pi]$.

3 ▷ On effectue une intégration par parties avec les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$: φ et $t \mapsto \frac{-\cos(xt)}{x}$:

$$\int_0^\pi \varphi(t) \sin(xt) dt = \left[\varphi(t) \frac{-\cos(xt)}{x} \right]_{t=0}^{t=\pi} + \int_0^\pi \varphi'(t) \frac{\cos(xt)}{x} dt = \frac{\varphi(0) - \varphi(\pi) \cos(\pi x) + \int_0^\pi \varphi'(t) \cos(xt) dt}{x}$$

$$\text{Ainsi } \left| \int_0^\pi \varphi(t) \sin(xt) dt \right| \leq \frac{|\varphi(0)| + |\varphi(\pi) \cos(\pi x)| + \left| \int_0^\pi \varphi'(t) \cos(xt) dt \right|}{x} \text{ donc}$$

$$\left| \int_0^\pi \varphi(t) \sin(xt) dt \right| \leq \frac{|\varphi(0)| + |\varphi(\pi)| \cdot |\cos(\pi x)| + \int_0^\pi |\varphi'(t)| \cdot |\cos(xt)| dt}{x} \leq \frac{|\varphi(0)| + |\varphi(\pi)| + \int_0^\pi |\varphi'(t)| dt}{x}$$

$$\text{or } \frac{|\varphi(0)| + |\varphi(\pi)| + \int_0^\pi |\varphi'(t)| dt}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0,$$

alors selon le théorème des gendarmes, on a montré le lemme de Riemann-Lebesgue pour φ de classe $\mathcal{C}^1$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \varphi(t) \sin(xt) dt = 0$$

On a $\sigma(1) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ donc selon la première égalité de la question 2 :

$$\sigma(1) = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \cos(kt) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \cos(kt) dt$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{(2n+1)t}{2 \frac{t}{2}} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 2n+1$$

Comme $t \mapsto \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)}$ se prolonge par continuité en 0, avec la deuxième égalité de la question 2 on a :

$$\sum_{k=1}^n \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \cos(kt) dt = \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \left(\frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2} \right) dt$$

On pose $g : t \mapsto \frac{t^2 - 2\pi t}{4\pi \sin\left(\frac{t}{2}\right)}$ qui se prolonge par continuité sur $[0, \pi]$ car $g(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{-2\pi t}{2\pi t} = -1$.

En notant φ le prolongement continu de g sur $[0, \pi]$, on a

$$\sum_{k=1}^n \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \cos(kt) dt = \int_0^\pi \sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right) \varphi(t) dt - \int_0^\pi \left(\frac{t^2 - 2\pi t}{4\pi} \right) dt$$

On a φ continue sur $[0, \pi]$ (i) et φ est dérivable sur $]0, \pi]$ (ii) et

$$\forall t \in]0, \pi], \varphi'(t) = \frac{(2t - 2\pi) \sin(t/2) - (1/2)(t^2 - 2\pi t) \cos(t/2)}{4\pi \sin^2(t/2)} = \frac{4(t - \pi) \sin(t/2) - (t^2 - 2\pi t) \cos(t/2)}{8\pi \sin^2(t/2)}$$

Quand $t \rightarrow 0$, on a

$$4(t - \pi) \sin(t/2) - (t^2 - 2\pi t) \cos(t/2) = 4t(t/2 + o(t^2)) - 4\pi(t/2 + o(t^2)) - t^2(1 + o(t)) + 2\pi t(1 + o(t))$$

Ainsi $4(t - \pi) \sin(t/2) - (t^2 - 2\pi t) \cos(t/2) = t^2 + o(t^2) \sim t^2$ d'où $\varphi'(t) \sim \frac{t^2}{8\pi(t/2)^2}$

On a donc $\varphi'(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi}$ (iii)

Avec (i), (ii) et (iii), le théorème du prolongement de la dérivée s'applique :

$$\varphi \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } \varphi'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \varphi'(t)$$

donc φ' est continue en 0 or φ' est continue sur $]0, \pi]$.

Ainsi φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$ et le lemme de Riemann-Lebesgue s'applique :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \varphi(t) \sin((2n+1)t) dt = 0$$

donc $\sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \cos(kt) dt = 0 - \int_0^\pi \left(\frac{t^2 - 2\pi t}{4\pi} \right) dt$. Ainsi

$$\sigma(1) = \int_0^\pi \left(\frac{2\pi t - t^2}{4\pi} \right) dt = \left[\frac{3\pi t^2 - t^3}{12\pi} \right]_{t=0}^{t=\pi} = \frac{3\pi^3 - \pi^3}{12\pi} = 0$$

On a bien $\boxed{\sigma(1) = \frac{\pi^2}{6}}$

2 Équivalents

4 ▷ Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto (\sin(t))^x = \exp(x \ln(\sin(t)))$ est continue sur $]0, \pi/2]$. Or

$$(\sin(t))^x \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} t^x = \frac{1}{t^{-x}}$$

Par équivalence, la fonction $t \mapsto (\sin(t))^x$ est intégrable en 0 si et seulement si $t \mapsto \frac{1}{t^{-x}}$ l'est.

Ainsi $t \mapsto (\sin(t))^x$ est intégrable sur $]0, \pi/2]$ si et seulement si $-x < 1$.

Comme $t \mapsto (\sin(t))^x$ est positive sur $]0, \pi/2]$, le domaine de définition de f est I

Soit $x \in I$. On a $x + 2 \in I$.

On effectue alors une intégration par parties, sous réserve de convergence du bloc tout intégré :

$$f(x+2) = \int_0^{\pi/2} (\sin(t))^{x+1} \sin(t) dt = \left[-(\sin(t))^{x+1} \cos(t) \right]_{t=0}^{t=\pi/2} + \int_0^{\pi/2} (x+1)(\sin(t))^x \cos^2(t) dt$$

Comme $x+1 > 0$, on a $\left[-(\sin(t))^{x+1} \cos(t) \right]_{t=0}^{t=\pi/2} = 0$ ce qui valide l'intégration par parties.

Comme $\cos^2 = 1 - \sin^2$ et que $f(x) = \int_0^{\pi/2} (\sin(t))^x \cos^2(t) dt$ converge, alors on a

$$f(x+2) = (x+1) \left(\int_0^{\pi/2} (x+1)(\sin(t))^x dt - \int_0^{\pi/2} (\sin(t))^{x+2} dt \right) = (x+1)f(x) - (x+1)f(x+2)$$

On a bien $(x+1)f(x) = (x+2)f(x+2)$ (1)

5 ▷ On pose $g : \begin{cases} I \times]0, \pi/2] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) & \longmapsto (\sin(t))^x \end{cases}$

(i) Soit $t \in]0, \pi/2]$. La fonction $g(\cdot, t) : x \mapsto \exp(x \ln(\sin(t)))$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I de dérivées successives :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(\cdot, t) : x \mapsto \ln(\sin(t)) \exp(x \ln(\sin(t))) = \ln(\sin(t)) (\sin(t))^x \text{ et } \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(\cdot, t) : x \mapsto \ln^2(\sin(t)) (\sin(t))^x$$

(ii) Soit $x \in I$. Les fonctions $g(x, \cdot)$, $\frac{\partial g}{\partial x}(x, \cdot)$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, \cdot)$ sont continues sur $]0, \pi/2]$ (argument inutile !)

La fonction $g(x, \cdot)$ est intégrable sur $]0, \pi/2]$ selon la question précédente.

Quand $t \rightarrow 0^+$, on a $\ln(\sin(t)) (\sin(t))^x = \ln(\sin(t)) (\sin(t))^{\frac{x+1}{2}} (\sin(t))^{\frac{x-1}{2}}$

On a $\frac{x+1}{2} > 0$ donc par croissance comparée et par composition $\ln(\sin(t)) (\sin(t))^{\frac{x+1}{2}} \rightarrow 0$

Ainsi $\frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = o\left((\sin(t))^{\frac{x-1}{2}}\right)$

Comme $\frac{x-1}{2} > -1$, la fonction $t \mapsto (\sin(t))^{\frac{x-1}{2}}$ est intégrable sur $]0, \pi/2]$ comme en question 3.

Par comparaison la fonction $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ est intégrable sur $]0, \pi/2]$.

(iii) Soit $a < b$ dans I . On a alors l'hypothèse de domination :

$$\forall x \in [a, b], \forall t \in]0, \pi/2], \left| \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, t) \right| = \ln^2(\sin(t)) (\sin(t))^x \leq \ln^2(\sin(t)) (\sin(t))^a$$

avec la fonction $t \mapsto \ln^2(\sin(t)) (\sin(t))^a$ intégrable sur $]0, \pi/2]$, comme en (ii).

Avec (i), (ii) et (iii), le théorème de la classe $\mathcal{C}^2$ pour les intégrales s'applique : f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I

De plus pour tout $x \in I$, on a

$$f'(x) = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t)) (\sin(t))^x dt \leq 0 \text{ et } f''(x) = \int_0^{\pi/2} \ln^2(\sin(t)) (\sin(t))^x dt \geq 0$$

ainsi f est décroissante et convexe sur I

6 ▷ Quand $x \rightarrow -1$, $f(x) = \frac{(x+2)f(x+2)}{x+1}$ selon 4 et $(x+2)f(x+2) \rightarrow 1 \times f(1)$ car f continue sur I et $1 \in I$.

Par ailleurs $f(1) = [-\cos(t)]_{t \rightarrow 0}^{t=\pi/2} = 1 \neq 0$, on peut conclure que $\boxed{f(x) \underset{x \rightarrow -1}{\sim} \frac{1}{x+1}}$

7 ▷ Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a $n \in I$ et en multipliant par $f(n+1)$, on a : $(n+1)f(n)f(n+1) = (n+2)f(n+1)f(n+2)$

Ainsi la suite $((n+1)f(n)f(n+1))_{n \in \mathbb{N}}$ est constante.

Comme $f(0) = \int_0^{\pi/2} dt = \frac{\pi}{2}$ ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)f(n)f(n+1) = 1f(0)f(1) = \frac{\pi}{2}$.

On peut conclure que $\boxed{f(n)f(n+1) = \frac{\pi}{2(n+1)}}$

Comme f est décroissante et positive, on a donc $f(n+1)^2 \leq \frac{\pi}{2(n+1)} \leq f(n)^2$

d'où $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{\pi}{2(n+1)} \leq f(n)^2 \leq \frac{\pi}{2n}$ ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{\frac{\pi}{2(n+1)}} \leq f(n) \leq \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$

Soit $x \geq 1$. On note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x . On a donc $1 \leq \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lfloor x \rfloor + 1$. Ainsi

$$\sqrt{\frac{\pi}{2(\lfloor x \rfloor + 2)}} \leq f(\lfloor x \rfloor + 1) \leq f(x) \leq f(\lfloor x \rfloor) \leq \sqrt{\frac{\pi}{2\lfloor x \rfloor}}$$

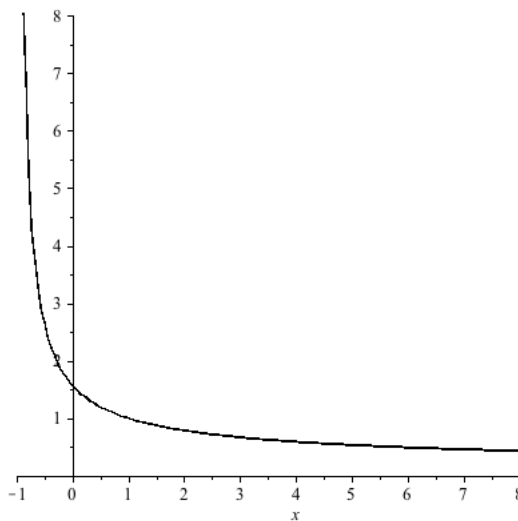
Or $x - 1 \leq \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lfloor x \rfloor + 2 \leq x + 2$

Quand $x \rightarrow +\infty$, on a $x - 1 \sim x \sim x + 2$, d'où par encadrement d'équivalents, on a $\lfloor x \rfloor \sim x$ et $\lfloor x \rfloor + 2 \sim x$.

À nouveau par encadrement d'équivalents, on a bien $\boxed{f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2x}}}$

8 ▷ Sur le graphique doivent apparaître les points $(0, f(0)) = (0, \pi/2)$, $(1, f(1)) = (1, 1)$, les asymptotes d'équations $x = -1$ et $y = 0$.

On observera que f est décroissante et convexe.



Il n'est pas aisé de faire apparaître les équivalents sur un graphique surtout à main levée.

3 Développement en série entière

9 ▷ Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $t \mapsto (\ln(\sin(t)))^n$ est continue sur $]0, \pi/2]$.

Quand $t \rightarrow 0^+$, on a $\sqrt{\sin(t)}(\ln(\sin(t)))^n \rightarrow 0$ par croissance comparée.

or $\sin(t) \sim t$, donc $\sqrt{t}(\ln(\sin(t)))^n \rightarrow 0$

D'où $(\ln(\sin(t)))^n = o\left(\frac{1}{t^{1/2}}\right)$ or $t \mapsto \frac{1}{t^{1/2}}$ est intégrable en 0.

Par comparaison à une fonction intégrable, $t \mapsto (\ln(\sin(t)))^n$ est intégrable sur $]0, \pi/2]$.

Ainsi l'intégrale généralisée D_n converge absolument donc converge

Le changement de variable $t = \frac{\pi}{2} - u$; $dt = -du$ nous donne : $D_1 = - \int_{\pi/2}^0 \ln(\sin(\pi/2 - u)) du$

On a bien $D_1 = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos(t)) dt$

10 ▷ En utilisant 5, on a $f'(0) = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t)) dt = D_1$ et $f'(1) = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t)) \sin(t) dt$.

Avec 9 et en effectuant le changement de variable $u = 2t$; $du = 2dt$, on a

$$2D_1 = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t) \cos(t)) dt = \int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{\sin(2t)}{2}\right) dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \ln(\sin(u)) du - \frac{\ln(2)\pi}{2}$$

En effectuant le changement de variable $u = \pi - t$, $du = -dt$, on a :

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin(u)) du = - \int_{\pi/2}^0 \ln(\sin(\pi - t)) dt = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t)) dt = D_1$$

donc $2D_1 = \frac{2}{2}D_1 - \frac{\ln(2)\pi}{2}$. Ainsi $f'(0) = D_1 = -\frac{\ln(2)\pi}{2}$

On effectue une intégration par parties sous réserve :

$$f'(1) = [(1 - \cos(t)) \ln(\sin(t))]_{t \rightarrow 0}^{t=\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \frac{(1 - \cos(t)) \cos(t)}{\sin(t)} dt$$

On a vu en 9 que $\ln(\sin(t)) \underset{t \rightarrow 0^+}{=} o(1/\sqrt{t})$ or $1 - \cos(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} t^2/2$

d'où $(1 - \cos(t)) \ln(\sin(t)) \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{\quad} 0$ et $[(1 - \cos(t)) \ln(\sin(t))]_{t \rightarrow 0}^{t=\pi/2} = 0$; ce qui valide l'intégration par parties.

On avait choisi la seule primitive qui pouvait convenir.

On a donc avec le changement de variable $u = \cos(t)$; $du = -\sin(t)dt$:

$$f'(1) = - \int_0^{\pi/2} \frac{(1 - \cos(t)) \cos(t)}{1 - \cos(t)^2} \sin(t) dt = - \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(t)}{1 + \cos(t)} \sin(t) dt = + \int_1^0 \frac{u}{1 + u} du = \int_0^1 \left(\frac{1}{u+1} - 1 \right) du$$

Ainsi $f'(1) = [\ln|u+1| - u]_{u=0}^{u=1} = \ln(2) - 1 - \ln(1) + 0$

On peut conclure que $f'(1) = \ln(2) - 1$

11 ▷ Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

La fonction $t \mapsto -\ln(\sin(t))$ est strictement décroissante (par composition) et $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \pi/2[$

Par ailleurs, on a : $-\ln(\sin(\pi/2)) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow 0^+} (-\ln(\sin(t))) = +\infty$.

Ainsi cette application induit une bijection de $]0, \pi/2[$ vers $[0, +\infty[$.

On effectue le changement de variable $u = -\ln(\sin(t))$; $du = \frac{-\cos(t)}{\sin(t)} dt$

Or pour $t \in]0, \pi/2[$, on a $\cos(t) > 0$ et donc

$$\frac{\sin(t)}{-\cos(t)} = -\frac{\sin(t)}{\sqrt{1-\sin^2(t)}} = \frac{-e^{-u}}{\sqrt{1-e^{-2u}}} = \frac{-1}{\sqrt{e^{2u}-1}}$$

$$\text{d'où } D_n = \int_{+\infty}^0 (-u)^n \frac{-du}{\sqrt{e^{2u}-1}} = (-1)^n \int_0^{+\infty} \frac{u^n}{\sqrt{e^{2u}-1}} du$$

$$\text{ce qui donne } \boxed{(-1)^n D_n = \int_0^{+\infty} \frac{u^n}{\sqrt{e^{2u}-1}} du}$$

La fonction $u \mapsto u^{n+1}e^{-u}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et intégrable en $+\infty$ car $u^{n+1}e^{-u} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o(1/u^2)$ par croissance comparée.

Donc $u \mapsto u^{n+1}e^{-u}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et par intégration par parties :

$$\int_0^{+\infty} u^{n+1}e^{-u} du = [(n+1)u^n e^{-u}]_{u=0}^{u \rightarrow +\infty} + (n+1) \int_0^{+\infty} u^n e^{-u} du = (n+1) \int_0^{+\infty} u^n e^{-u} du$$

Ainsi par récurrence immédiate

$$\int_0^{+\infty} u^n e^{-u} du = n! \int_0^{+\infty} e^{-u} du = n! [-e^{-u}]_{u=0}^{u \rightarrow +\infty} = n!$$

$$\text{Or } (-1)^n D_n - \int_0^{+\infty} u^n e^{-u} du = \int_0^{+\infty} u^n \left(\frac{1}{\sqrt{e^{2u}-1}} - \frac{1}{e^u} \right) du. \text{ Ainsi}$$

$$(-1)^n D_n - n! = \int_0^{+\infty} u^n \left(\frac{e^u - \sqrt{e^{2u}-1}}{e^u \sqrt{e^{2u}-1}} \right) du = \int_0^{+\infty} \frac{u^n}{e^u \sqrt{e^{2u}-1} (e^u + \sqrt{e^{2u}-1})} du$$

Le calcul est licite car la quantité conjuguée : $e^u + \sqrt{e^{2u}-1} \geq \sqrt{e^{2u}-1} > 0$, pour $u > 0$.

Par calcul dans $[0, +\infty]$ car les intégrandes sont positives, on a

$$|(-1)^n D_n - n!| \leq \int_0^{+\infty} \frac{u^n}{e^u (e^{2u}-1)} du \leq \int_0^{+\infty} \frac{u^n}{e^u (2u)} du = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} u^{n-1} e^{-u} du = \frac{(n-1)!}{2} < +\infty$$

On a utilisé l'inégalité de convexité $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $e^t - 1 \geq t > 0$ d'où

$$(-1)^n D_n - n! = \underset{n \rightarrow +\infty}{O}((n-1)!)$$

or $(n-1)! = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(n!)$ ainsi

$$(-1)^n D_n = n! + \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(n!)$$

On conclut : $\boxed{D_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (-1)^n n!}$

12 ▷ Soit $x \in]-1, 1[$. En utilisant le développement en série entière de l'exponentielle, on a

$$f(x) = \int_0^{\pi/2} \exp(x \ln(\sin(t))) dt = \int_0^{\pi/2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\ln(\sin(t))^n}{n!} x^n dt$$

(i) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a vu en 9 que $t \mapsto \frac{\ln(\sin(t))^n}{n!}$ est continue et intégrable sur $]0, \pi/2]$.

Il en est donc de même pour $t \mapsto \frac{\ln(\sin(t))^n}{n!} x^n$ est continue et intégrable sur $]0, \pi/2]$.

(ii) La série de fonctions $\sum_{n \geq 0} \left(t \mapsto \frac{\ln(\sin(t))^n}{n!} x^n \right)$ converge simplement sur $]0, \pi/2]$ de somme $t \mapsto \exp(x \ln(\sin(t)))$ et $t \mapsto \exp(x \ln(\sin(t)))$ continue sur $]0, \pi/2]$ (argument inutile)

(iii) Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $t \mapsto \frac{\ln(\sin(t))^n}{n!} x^n$ est de signe constant sur $]0, \pi/2]$ (celui de $(-x)^n$). Ainsi

$$\int_0^{\pi/2} \left| \frac{\ln(\sin(t))^n}{n!} x^n \right| dt = \left| \int_0^{\pi/2} \frac{\ln(\sin(t))^n}{n!} x^n dt \right| = \frac{\left| \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t))^n dt \right|}{n!} \cdot |x^n| = \frac{|D_n|}{n!} \cdot |x|^n$$

Selon 11, on a $\frac{|D_n|}{n!} \cdot |x|^n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} |x|^n$ et la série géométrique $\sum_n |x|^n$ converge absolument donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\pi/2} \left| \frac{\ln(\sin(t))^n}{n!} x^n \right| dt < +\infty$$

Avec (i), (ii) et (iii), le théorème d'intégration terme à terme s'applique ce qui nous donne l'existence des membres dans $\mathbb{R}$ et l'égalité

$$\forall x \in]-1, 1[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{\ln(\sin(t))^n}{n!} x^n dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{D_n}{n!} x^n$$

Ainsi f est bien développable en série entière sur $] -1, 1[$

4 Convergence de suite de fonctions

13 ▷ On a $\forall x \in \mathbb{R}, a^2 \cos^2(x) + b^2 \sin^2(x) > 0$ car $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1, a^2 > 0$ et $b^2 > 0$.

Ainsi par composition Ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}$. D'une part on a

$$\Psi'(x) = \frac{2(b^2 - a^2) \cos(x) \sin(x)}{a^2 \cos^2(x) + b^2 \sin^2(x)} = \frac{(b^2 - a^2) \sin(2x)}{a^2 + (b^2 - a^2) \sin^2(x)}$$

D'autre part, comme $a > 0$ et $b > 0$, on a $b - a < a + b$ et $a - b < a + b$ d'où ρ est bien défini et

$$|\rho e^{2ix}| = \left| \frac{b-a}{b+a} \right| \cdot |e^{2ix}| = \max \left\{ \frac{b-a}{b+a}, \frac{a-b}{b+a} \right\} < 1$$

Ainsi la série géométrique $\sum_{k \geq 0} (\rho e^{2ix})^k$ converge et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \rho^k e^{2ikx} = \sum_{k=0}^{+\infty} (\rho e^{2ix})^k = \frac{1}{1 - \rho e^{2ix}} = \frac{1 - \rho e^{-2ix}}{(1 - \rho e^{2ix})(1 - \rho e^{-2ix})}$$

En prenant les parties imaginaires puis en multipliant par $(b+a)^2 / (b+a)^2$, on a

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \rho^k \sin(2kx) = \frac{-\rho \sin(-2x)}{1 - \rho(e^{i2x} + e^{-i2x}) + \rho^2} = \frac{\rho \sin(2x)}{1 - 2\cos(2x)\rho + \rho^2} = \frac{(b-a)(b+a)\sin(2x)}{(b+a)^2 - 2\cos(2x)(b-a)(b+a) + (b-a)^2}$$

Comme $\sin(0) = 0$, on a

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \rho^k \sin(2kx) = \frac{(b^2 - a^2)\sin(2x)}{2a^2 + 2b^2 - 2(b^2 - a^2)(1 - 2\sin^2(x))} = \frac{1}{4} \cdot \frac{(b^2 - a^2)\sin(2x)}{a^2 + (b^2 - a^2)\sin^2(x)}$$

On a bien $\boxed{\Psi'(x) = 4 \sum_{k=1}^{+\infty} \rho^k \sin(2kx)}$

14 ▷ Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme Ψ' est continue sur $\mathbb{R}$, on a alors par le théorème fondamental de l'analyse :

$$\Psi(x) - \Psi(0) = \int_0^x \Psi'(t) dt = \int_0^x \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \rho^k 4 \sin(2kt) \right) dt = \int_0^x \left(\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(t) \right) dt$$

en ayant posé pour $k \in \mathbb{N}^*$, $f_k : t \mapsto 4\rho^k \sin(2kt)$.

Or les f_k sont continues sur $\mathbb{R}$ (i)

de plus, $\forall t \in \mathbb{R}$, $|f_k(t)| \leq 4\rho^k$ et la série géométrique $\sum \rho^k$ converge car $\rho \in]-1, 1[$.

donc la série $\sum_{k \geq 1} f_k$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}$ (ii).

Avec (i) et (ii), on peut intervertir somme de série et intégrale sur tout segment de $\mathbb{R}$ par théorème de cours. Ainsi

$$\Psi(x) = \Psi(0) + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\int_0^x f_k(t) dt \right) = \ln(a^2) + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\frac{-4\rho^k \cos(2kt)}{2k} \right]_{t=0}^{t=x} = 2\ln(a) - 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{\rho^k \cos(2kx)}{k} - \frac{\rho^k}{k} \right)$$

Or avec le développement en série entière de $t \mapsto \ln(1+t)$ sur $] -1, 1[$, on a

$$\ln(1 - \rho) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1} (-\rho)^k}{k} = - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\rho^k}{k}$$

Ainsi

$$\Psi(x) = 2\ln(a) - 2\ln(1 - \rho) - 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\rho^k \cos(2kx)}{k} = 2\ln\left(\frac{a}{1 - \rho}\right) - 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\rho^k \cos(2kx)}{k}$$

Or $\frac{a}{1 - \rho} = \frac{a}{1 - \frac{b-a}{a+b}} = \frac{a(a+b)}{(a+b) - (b-a)} = \frac{a+b}{2}$ d'où

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \Psi(x) = 2\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) - 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(2kx)}{k} \rho^k}$$

15 ▷ On a donc $\forall x \in [0, \pi]$, $\Psi^2(x) = 2 \ln \left(\frac{a+b}{2} \right) \Psi(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} (-2) \frac{\cos(2kx)}{k} \rho^k \Psi(x)$

Or les fonctions $u_0 : x \mapsto 2 \ln \left(\frac{a+b}{2} \right) \Psi(x)$ et $u_k : x \mapsto (-2) \frac{\cos(2kx)}{k} \rho^k \Psi(x)$ ($k \in \mathbb{N}^*$) sont continues sur $[0, \pi]$.

De plus comme Ψ est bornée sur $[0, \pi]$ car continue sur ce segment, on peut montrer que la série de fonctions $\sum_{k \geq 0} u_k$ converge normalement donc uniformément sur le segment $[0, \pi]$ de somme Ψ^2 .

Ainsi par théorème de cours :

$$\int_0^\pi \Psi(x)^2 dx = \int_0^\pi 2 \ln \left(\frac{a+b}{2} \right) \Psi(x) dx + \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^\pi (-2) \frac{\cos(2kx)}{k} \rho^k \Psi(x) dx$$

Ainsi

$$\int_0^\pi \Psi(x)^2 dx = 2 \ln \left(\frac{a+b}{2} \right) \int_0^\pi \Psi(x) dx - 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\rho^k}{k} \int_0^\pi \cos(2kx) \Psi(x) dx \quad (\star)$$

À l'aide d'une nouvelle convergence uniforme de série de fonctions, on a

$$\int_0^\pi \Psi(x) dx = \int_0^\pi 2 \ln \left(\frac{a+b}{2} \right) dx - 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\rho^k}{k} \int_0^\pi \cos(2kx) dx = 2\pi \ln \left(\frac{a+b}{2} \right)$$

On s'est servi de $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^\pi \cos(2px) dx = 0$ (fonction π -périodique de moyenne nulle)

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a à l'aide d'une autre convergence uniforme :

$$\int_0^\pi \cos(2kx) \Psi(x) dx = 2 \ln \left(\frac{a+b}{2} \right) \int_0^\pi \cos(2kx) dx - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\rho^n}{n} \int_0^\pi \cos(2kx) \cos(2nx) dx$$

or $\int_0^\pi \cos(2kx) dx = 0$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$.

$$2 \int_0^\pi \cos(2kx) \cos(2nx) dx = \int_0^\pi \cos(2(k+n)x) dx + \int_0^\pi \cos(2(k-n)x) dx$$

Ainsi si $n \neq k$ on a $\int_0^\pi \cos(2kx) \cos(2nx) dx = 0$ et

$$2 \int_0^\pi \cos(2kx) \cos(2kx) dx = \int_0^\pi \cos(4kx) dx + \int_0^\pi 1 dx = \pi$$

donc $\int_0^\pi \cos(2kx) \Psi(x) dx = -\pi \frac{\rho^k}{k}$ puis en reprenant $(\star)$

$$\int_0^\pi \Psi(x)^2 dx = 2 \ln \left(\frac{a+b}{2} \right) \times 2\pi \ln \left(\frac{a+b}{2} \right) - 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\rho^k}{k} \left(-\pi \frac{\rho^k}{k} \right) = 4\pi \left(\ln \left(\frac{a+b}{2} \right) \right)^2 + 2\pi \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\rho^{2k}}{k^2}$$

On conclut enfin que

$$\boxed{\int_0^\pi \Psi(x)^2 dx = 4\pi \left(\ln \left(\frac{a+b}{2} \right) \right)^2 + 2\pi \sigma(\rho^2)}$$

16 ▷ Soit $t \in]0, \frac{\pi}{2}]$. On a : $a_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ et $b_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$.

On a donc $a_n^2 \cos^2(t) + b_n^2 \sin^2(t) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \sin^2(t) > 0$

Comme $\ln$ est continue, on a $\Psi_n(t) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ln(\sin^2(t))$

On a établi la convergence simple de la suite d'applications $(\Psi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ vers $t \mapsto 2 \ln(\sin(t))$

L'énoncé original parle de convergence uniforme sur $]0, \pi]$, il s'agit d'une erreur d'énoncé.

(i) Les fonctions Ψ_n^2 ($n \in \mathbb{N}^*$) sont continue sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ (argument inutile !)

(ii) La suite d'applications $(\Psi_n^2)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergence simplement sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ vers $t \mapsto 4 \ln^2(\sin(t))$.

(iii) La fonction $t \mapsto 4 \ln^2(\sin(t))$ est continue sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ (argument inutile !)

(iv) La suite (a_n) est décroissante et positive de limite nulle et alors que la suite $(b_n) = (1 - a_n)$ est croissante et positive de limite 1.

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq a_n^2 \leq a_1^2 = \frac{1}{4}$ et $b_1^2 = \frac{1}{4} \leq b_n^2 \leq 1$.

Soit $t \in]0, \frac{\pi}{2}]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a alors

$$\frac{1}{4} \sin^2(t) \leq a_n^2 \cos^2(t) + b_n^2 \sin^2(t) \leq \frac{1}{4} \cos^2(t) + \sin^2(t) \leq \cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$$

D'où par croissance de $\ln$, on a

$$2 \ln(\sin(t)) - 2 \ln(2) \leq \Psi_n(t) \leq \ln(1) = 0$$

Ainsi on a l'hypothèse de domination :

$$\forall t \in]0, \frac{\pi}{2}], \quad |\Psi_n^2(t)| \leq 4 \ln(2)^2 - 8 \ln(2) \ln(\sin(t)) + 4 \ln(\sin(t))^2$$

car $t \mapsto 4 \ln(2)^2 - 8 \ln(2) \ln(\sin(t)) + 4 \ln(\sin(t))^2$ est continue et intégrable sur $]0, \frac{\pi}{2}]$, selon 9

Avec (i), (ii), (iii) et (iv), le théorème de convergence dominée s'applique. Cela donne l'existence des membres et l'égalité :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/2} \Psi_n(x)^2 dx = \int_0^{\pi/2} 4 \ln^2(\sin(t)) dx = 4D_2$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $\forall x \in [0, \pi]$, $\Psi_n(\pi - x) = \Psi_n(x)$, on a en effectuant le changement de variable :
 $u = \pi - x$; $du = -dx$

$$\int_0^\pi \Psi_n(x)^2 dx = \int_0^{\pi/2} \Psi_n(x)^2 dx + \int_{\pi/2}^\pi \Psi_n(x)^2 dx = 2 \int_0^{\pi/2} \Psi_n(x)^2 dx$$

Ainsi avec 15, on a

$$\int_0^{\pi/2} \Psi_n(x)^2 dx = 2\pi \left(\ln \left(\frac{a_n + b_n}{2} \right) \right)^2 + \pi \sigma(\rho_n^2) = 2\pi \ln(2)^2 + \pi \sigma((b_n - a_n)^2)$$

car $a_n + b_n = 1$ en ayant posé $\rho_n = \frac{b_n - a_n}{b_n + a_n} = b_n - a_n$ (on a bien $b_n > 0$ et $a_n > 0$).

Comme σ est continue sur $[-1, 1]$ et $\sigma(1) = \frac{\pi^2}{6}$ selon la partie 3, on a $\sigma((b_n - a_n)^2) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{\pi^2}{6}$.

D'où $4D_2 = 2\pi \ln(2)^2 + \frac{\pi^3}{6}$.

Avec la partie 2, on en déduit $f''(0) = D_2 = \frac{\pi \ln(2)^2}{2} + \frac{\pi^3}{24}$

5 Convexité logarithmique

17 ▷ Soit $x > -1$.

La fonction $t \mapsto (\sin(t))^x$ est continue et positive sur $]0, \pi/2]$ et non identiquement nulle car $(\sin(\pi/2))^x = 1$.

$$\text{Ainsi } f(x) = \int_0^{\pi/2} (\sin(t))^x dt > 0.$$

Donc f est définie sur l'intervalle non trivial I à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

Alors $\ln \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I car f l'est, selon 5.

$$\text{Ainsi } (\ln \circ f)' = \frac{f'}{f} \text{ et } (\ln \circ f)'' = \frac{f''f - (f')^2}{f^2}.$$

Pour établir que f est $\ln$ -convexe sur I , il suffit alors de montrer que : $0 \leq \frac{f''f - (f')^2}{f^2}$

Soit $\varepsilon \in]0, \pi/2[$. Les fonctions $t \mapsto (\sin(t))^{x/2}$ et $t \mapsto \ln(\sin(t)) (\sin(t))^{x/2}$ sont continues sur le segment $[\varepsilon, \pi/2]$.

Par inégalité de Cauchy-Schwarz, pour le produit scalaire usuel sur $\mathcal{C}([\varepsilon, \pi/2], \mathbb{R})$, on a

$$\left(\int_{\varepsilon}^{\pi/2} \ln(\sin(t)) (\sin(t))^x dt \right)^2 \leq \left(\int_{\varepsilon}^{\pi/2} (\sin(t))^x dt \right) \times \left(\int_{\varepsilon}^{\pi/2} \ln(\sin(t))^2 (\sin(t))^x dt \right)$$

Comme les intégrales convergent sur $]0, \pi/2]$, on peut faire tendre ε vers 0 pour obtenir :

$$\left(\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t)) (\sin(t))^x dt \right)^2 \leq \left(\int_0^{\pi/2} (\sin(t))^x dt \right) \times \left(\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t))^2 (\sin(t))^x dt \right)$$

$$\text{Ainsi } (f'(x))^2 \leq f''(x)f(x)$$

On a montré que $(\ln \circ f)'' \geq 0$ sur I d'où f est une application de I dans $\mathbb{R}$ $\ln$ -convexe

18 ▷ Soit $x \geq 0$. Comme $2x+2 > 2x+1 > 2x \geq 0$, selon (1), on a

$$\tilde{f}(x+1) = \ln(f(2x+2)) = \ln((2x+2)f(2x+2)) - \ln(2x+2) = \ln((2x+1)f(2x)) - \ln(2x+2) = \tilde{f}(x) + \ln\left(\frac{2x+1}{2x+2}\right)$$

Ainsi $\forall k \in \mathbb{N}$, $\tilde{f}(x+k+1) - \tilde{f}(x+k) = \ln\left(\frac{2x+2k+1}{2x+2k+2}\right)$. Par télescopage, on a alors

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \tilde{f}(x+p) - \tilde{f}(x) = \sum_{k=0}^{p-1} (\tilde{f}(x+k+1) - \tilde{f}(x+k)) = \sum_{k=0}^{p-1} \ln\left(\frac{2x+2k+1}{2x+2k+2}\right)$$

On peut conclure que $\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+, \tilde{f}(x+p) = \tilde{f}(x) + \sum_{k=0}^{p-1} \ln\left(\frac{2x+2k+1}{2x+2k+2}\right)$

19 ▷ Par composition $\tilde{f}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\left] \frac{-1}{2}, +\infty \right[$ et

$$\forall x \in \left] \frac{-1}{2}, +\infty \right[, \left(\tilde{f} \right)'(x) = 2(\ln \circ f)'(x) \text{ et } \left(\tilde{f} \right)''(x) = 4(\ln \circ f)''(x) \geq 0$$

donc $\tilde{f}$ est convexe sur $\left] \frac{-1}{2}, +\infty \right[$.

En appliquant la croissance des pentes avec $n-1 \leq n+x \leq n+p$ et n dans $\left] \frac{-1}{2}, +\infty \right[$, on a $\frac{\tilde{f}(n) - \tilde{f}(n-1)}{n - (n-1)} \leq$

$$\frac{\tilde{f}(n+x) - \tilde{f}(n)}{n+x-n} \leq \frac{\tilde{f}(n+p) - \tilde{f}(n)}{n+p-n}$$

ce qui permet de conclure que $\tilde{f}(n) - \tilde{f}(n-1) \leq \frac{\tilde{f}(n+x) - \tilde{f}(n)}{x} \leq \frac{\tilde{f}(n+p) - \tilde{f}(n)}{p}$

D'après 18 avec $n - 1 \geq 0$, on a $\tilde{f}(n) - \tilde{f}(n - 1) = \ln \left(\frac{2(n - 1) + 1}{2(n - 1) + 2} \right) = \ln \left(\frac{2n - 1}{2n + 1} \right)$

Or $\ln \left(\frac{2n - 1}{2n + 1} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ par composition et donc $\tilde{f}(n) - \tilde{f}(n - 1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Toujours selon 18, on a par somme finie

$$\tilde{f}(n + p) - \tilde{f}(n) = \sum_{k=0}^{p-1} \ln \left(\frac{2n + 2k + 1}{2n + 2k + 2} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Or

$$x \left(\tilde{f}(n) - \tilde{f}(n - 1) \right) \leq \tilde{f}(n + x) - \tilde{f}(n) \leq \frac{x}{p} \left(\tilde{f}(n + p) - \tilde{f}(n) \right)$$

Ainsi par produit et selon les gendarmes $\boxed{(\tilde{f}(n + x) - \tilde{f}(n)) \text{ tend vers } 0 \text{ lorsque } n \text{ tend vers } +\infty}$

À x fixé dans $\mathbb{R}_+^*$, ce résultat dépend de l'existence $p \in \mathbb{N}$ tel que $x \leq p$.

Choisir $p = 1 + \lfloor x \rfloor$ valide ce résultat indépendamment de p .

20 ▷ On sait déjà que f est une application de I dans $\mathbb{R}$ (Q4), ln-convexe (Q17), qui vérifie (1) (Q4) et telle que $f(0) = \frac{\pi}{2}$ (Q7).

Pour l'unicité, on considère h une application de I dans $\mathbb{R}$, ln-convexe, qui vérifie (1) et telle que $h(0) = \frac{\pi}{2}$.

On pose $\tilde{h} : x \mapsto \ln(h(2x))$.

Comme h vérifie (1), on peut établir comme en 18 que

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+, \tilde{h}(x + p) = \tilde{h}(x) + \sum_{k=0}^{p-1} \ln \left(\frac{2x + 2k + 1}{2x + 2k + 2} \right) \quad (2)$$

Comme $\tilde{h}(0) = \ln(\pi/2) = \tilde{f}(0)$, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}, \tilde{h}(n) = \tilde{f}(n) \quad (3)$$

Pour montrer que $\tilde{h}$ est convexe, on considère x et $y \in]-1/2, +\infty[$ et $\lambda \in [0, 1]$.

Comme $2x$ et $2y \in I$ et que $\ln \circ h$ est convexe sur I , on a

$$\tilde{h}(\lambda x + (1 - \lambda)y) = \ln \circ h(\lambda 2x + (1 - \lambda)2y) \leq \lambda \ln \circ h(2x) + (1 - \lambda) \ln \circ h(2y) = \lambda \tilde{h}(x) + (1 - \lambda) \tilde{h}(y)$$

Ainsi $\tilde{h}$ est convexe sur $] -1/2, +\infty[$.

Soit $x > 0$, en faisant comme en 19, on peut alors montrer que $\tilde{h}(n + x) - \tilde{h}(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

En utilisant (3) et la question 19, on obtient :

$$\tilde{h}(n + x) - \tilde{f}(n + x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Puis à l'aide de (2) et la question 18, on a

$$\tilde{h}(x) - \tilde{f}(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Ainsi $\forall x > 0$, $\tilde{h}(x) = \tilde{f}(x)$. D'où $\forall x > 0$, $h(x) = \exp(\tilde{h}(x/2)) = \exp(\tilde{f}(x/2)) = f(x)$

Puis à l'aide de l'identité (1), on obtient

$$\forall x \in I, h(x) = \frac{x+2}{x+1} h(x+2) = \frac{x+2}{x+1} f(x+2) = f(x)$$

Ainsi $h = f$ ce qui donne l'unicité :

$\boxed{f \text{ est la seule application de } I \text{ dans } \mathbb{R}, \text{ qui soit ln-convexe, qui vérifie (1) et telle que } f(0) = \frac{\pi}{2}}$

21 ▷ Soit g de $] -T, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, ln-convexe et vérifiant $\forall t \in] -T, +\infty[, (t+T)g(t) = (t+2T)g(t+2T)$

On pose $h : x \mapsto \frac{\pi g(Tx)}{2g(0)}$. Comme ci-dessus, on montre facilement que

h est une application de $\mathbf{I}$ dans $\mathbf{R}$, qui soit ln-convexe, qui vérifie (1) et telle que $h(0) = \frac{\pi}{2}$

Donc $h = f$ puis $g : t \mapsto \frac{2g(0)f(t/T)}{\pi}$

Réciproquement, on montre facilement que pour $k > 0$, l'application $g : t \mapsto kf(t/T)$ est une application de $] -T, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, ln-convexes et vérifiant $\forall t \in] -T, +\infty[, (t+T)g(t) = (t+2T)g(t+2T)$.

On conclut pour $T \in \mathbb{R}_+^*$:

les applications $g :] -T, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, ln-convexes et vérifiant

$$\forall t \in] -T, +\infty[, (t+T)g(t) = (t+2T)g(t+2T)$$

$$\text{sont les applications } g : \begin{cases}] -T, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & kf\left(\frac{t}{T}\right) \end{cases} \text{ avec } k > 0.$$

22 ▷ On rappelle que $T > 0!!!!$

Par l'absurde, on suppose qu'il existe une application h , de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et ln-convexe, vérifiant

$$\forall t \in \mathbb{R}, (t+T)h(t) = (t+2T)h(t+2T)$$

On évalue cette égalité en $-T$ pour trouver $h(T) = 0$ car $T \neq 0$ ce qui absurde car $\forall t \in \mathbb{R}, h(t) > 0$.

En conclusion :

il n'existe pas d'application h , de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ et ln-convexe, vérifiant $\forall t \in \mathbf{R}, (t+T)h(t) = (t+2T)h(t+2T)$