

Première partie

1a. On calcule $\chi_{(-M_0)}(X) = \det(XI_n + M_0) = \det(M_X)$, polynôme caractéristique de $-M_0$, en commençant par les opérations élémentaires : $C_1 \leftarrow \sum_{i=1}^n C_i$ puis $L_i \leftarrow L_i - L_1$ ($2 \leq i \leq n$) :

$$\chi_{(-M_0)}(X) = \begin{vmatrix} X & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X+n-1 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & X-1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & X-1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & & \cdots & 0 & X-1 \end{vmatrix} = (X+n-1)(X-1)^{n-1}$$

La matrice $-M_0$ est symétrique réelle, ainsi selon le théorème spectral, M_0 est diagonalisable et on a : $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(-M_0)}^{\perp} E_{\lambda}(-M_0)$

D'où $\mathbb{R}^n = E_{1-n}(-M_0) \bigoplus^{\perp} E_1(-M_0)$

On remarque que $-M_0 \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = (1-n) \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ de plus $\dim(E_{1-n}(-M_0)) = 1$ (multiplicité de $1-n$)

Ainsi comme $E_1(-M_0) = E_{1-n}(-M_0)^{\perp}$, on conclut que

$$\text{Sp}(-M_0) = \{1, 1-n\}, E_{1-n}(-M_0) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ et } E_1(-M_0) \text{ est l'hyperplan d'équation } x_1 + \cdots + x_n = 1$$

1b. Pour une matrice A, on pose $[A]_{i,j}$ le coefficient en position (i, j) . On a alors

$$\det(M_X) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n [M_X]_{i, \sigma(i)}$$

On remarque que pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on a $\prod_{i=1}^n [M_X]_{i, \sigma(i)} = X^{\nu(\sigma)}$ car $\forall 1 \leq i, j \leq n, [M_X]_{i,j} = \begin{cases} X & \text{si } i = j \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$.

Ainsi avec 1a., on a :

$$(X+n-1)(X-1)^{n-1} = \det(M_X) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) X^{\nu(\sigma)}$$

On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) x^{\nu(\sigma)} = (x-1)^{n-1}(x+n-1)$

2. On pose la fonction polynomiale $P : x \mapsto (x+n-1)(x-1)^{n-1} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) x^{\nu(\sigma)}$.

Ainsi $\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) = P(1) = n \cdot 0^{n-1} = 0$ car $n-1 \geq 1$.

On remarque que $\forall x \in \mathbb{R}^*, P'(x) = (x-1)^{n-1} + (n-1)(x-1)^{n-2}(x+n-1) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \nu(\sigma) x^{\nu(\sigma)-1}$.

Ainsi $\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \nu(\sigma) = P'(1) = n(n-1) \cdot 0^{n-2} = \begin{cases} 2 & \text{si } n = 2 \\ 0 & \text{si } n \geq 3 \end{cases}$

D'un côté on a :

$$\int_0^1 P(x)dx = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \int_0^1 x^{\nu(\sigma)} dx = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \left[\frac{x^{\nu(\sigma)+1}}{\nu(\sigma)+1} \right]_{x=0}^{x=1} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \frac{\varepsilon(\sigma)}{\nu(\sigma)+1}$$

et d'un autre côté, on a, par intégration par parties :

$$\int_0^1 P(x)dx = \int_0^1 (x+n-1)(x-1)^{n-1} dx = \left[(x+n-1) \frac{(x-1)^n}{n} \right]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \frac{(x-1)^n}{n} dx = \frac{(-1)^n(1-n)}{n} - \left[\frac{(x-1)^{n+1}}{n(n+1)} \right]_{x=0}^{x=1}$$

$$\text{D'où } \int_0^1 P(x)dx = \frac{(-1)^n(1-n)}{n} + \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)} = (-1)^n \frac{(1-n)(1+n)-1}{n(n+1)} = (-1)^n \frac{-n^2}{n(n+1)}.$$

On peut alors conclure que $\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \frac{\varepsilon(\sigma)}{\nu(\sigma)+1} = (-1)^{n+1} \frac{n}{n+1}$

3. Je note $P_n = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n : \varepsilon(\sigma) = 1\}$. On remarque que $\mathfrak{S}_n \setminus P_n = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n : \varepsilon(\sigma) = -1\}$.

Selon 2., on a alors :

$$0 = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) = \sum_{\sigma \in P_n} \varepsilon(\sigma) + \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n \setminus P_n} \varepsilon(\sigma) = \text{Card}\{\sigma \in \mathfrak{S}_n : \varepsilon(\sigma) = 1\} - \text{Card}\{\sigma \in \mathfrak{S}_n : \varepsilon(\sigma) = -1\}$$

d'où $\text{Card}\{\sigma \in \mathfrak{S}_n : \varepsilon(\sigma) = 1\} = \text{Card}\{\sigma \in \mathfrak{S}_n : \varepsilon(\sigma) = -1\}$

Ainsi la probabilité qu'une permutation de $\mathfrak{S}_n$ tirée uniformément au hasard soit de signature prescrite vaut $1/2$

4. Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on a $\nu(\sigma) = 0$ si et seulement si $\sigma \in \mathfrak{D}_n$

En reprenant P de la question 2, on a alors

$$(n-1)(-1)^{n-1} = P(0) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) 0^{\nu(\sigma)} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{D}_n} \varepsilon(\sigma) = \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{D}_n \\ \varepsilon(\sigma)=1}} 1 - \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{D}_n \\ \varepsilon(\sigma)=-1}} 1$$

Ainsi $\text{Card}\{\sigma \in \mathfrak{D}_n : \varepsilon(\sigma) = 1\} = \text{Card}\{\sigma \in \mathfrak{D}_n : \varepsilon(\sigma) = -1\} + (-1)^{n-1}(n-1)$

5a. Les familles $(1, X, \dots, X^m)$ et $(1, (X-1), \dots, (X-1)^m)$ sont constitués de $m+1$ vecteurs de $\mathbb{R}_m[X] \setminus \{0\}$.

De plus elles sont libres car échelonnées en degrés. Comme $\dim(\mathbb{R}_m[X]) = m+1$,

on peut conclure que les familles $(1, X, \dots, X^m)$ et $(1, (X-1), \dots, (X-1)^m)$ sont des bases de $\mathbb{R}_m[X]$

5b. Soit $k \in \llbracket 0, m \rrbracket$. On a, selon la formule du binôme dans l'anneau commutatif $\mathbb{R}[X]$:

$$X^k = (X-1+1)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (X-1)^i = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (X-1)^i - \sum_{i=k+1}^m 0(X-1)^i$$

Ainsi la colonne de rang $k+1$ de la matrice de l'application linéaire identité dans les bases considérées est constituée de :

$$\binom{k}{0}, \dots, \binom{k}{k}, 0, \dots, 0$$

On reconnaît les coefficients de la ligne de rang $k+1$ de la matrice M dans le même ordre. Ainsi

M^T est la matrice de l'application linéaire identité de $(1, X, \dots, X^m)$ vers $(1, (X-1), \dots, (X-1)^m)$

5c. En remarquant que pour $k \in \llbracket 0, m \rrbracket$, on a : $(X-1)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} X^i (-1)^{k-i} = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} X^i - \sum_{i=k+1}^m 0X^i$

Ainsi les coefficients la $k+1$ -ième colonne ($0 \leq k \leq m$) de la matrice identité entre les bases $(1, (X-1), \dots, (X-1)^m)$ au départ vers $(1, X, \dots, X^m)$ à l'arrivée sont dans l'ordre : $(-1)^{k-i} \binom{k}{0}, \dots, (-1)^1 \binom{k}{k}, (-1)^0 \binom{k}{k}, 0, \dots, 0$.

Or cette matrice est l'inverse de $M^\top$, car il s'agit de la réciproque de l'application linéaire identité en échangeant les bases de départ est d'arrivée. Ainsi $M = (M^\top)^\top$ est inversible et $M^{-1} = \left((M^\top)^{-1} \right)^\top$.

$$\text{Ainsi } M \text{ est inversible et } M^{-1} = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -\binom{1}{0} & \binom{1}{1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{m-1} \binom{m-1}{0} & & & \binom{m-1}{m-1} & 0 \\ (-1)^m \binom{m}{0} & \cdots & \cdots & \cdots & \binom{m}{m} \end{pmatrix} = \left((-1)^{j-i} \binom{i-1}{j-1} \right)_{\substack{1 \leq i \leq m+1 \\ 1 \leq j \leq m+1}}$$

5d. On note $U = \begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} v_0 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m+1,1}(\mathbb{R})$ tels que $\forall k \in \llbracket 0, m \rrbracket$, $u_k = \sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} v_\ell$. Alors on a $MV = U$.

Comme M est inversible, on a $V = M^{-1}U$ puis : $\forall k \in \llbracket 0, m \rrbracket$, $v_k = \sum_{\ell=0}^k (-1)^{k-\ell} \binom{k}{\ell} u_\ell$ selon 5c.

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En posant $D_0 = 1$, on a alors avec un changement d'indice :

$$n! = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} D_{n-i} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{n-i} D_{n-i} = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} D_j$$

En effet, une permutation de $\llbracket 1, n \rrbracket$ peut être caractérisée par le nombre $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ des ses points fixes puis par le choix de la parties fixée par icelle ($\binom{n}{i}$ possibilités) et enfin du choix du dérangement sur les $n-i$ points restants (D_{n-i} possibilités) ce qui est compatible si $i = n$.

La formule reste valable pour $n = 0$.

On utilise alors la question précédente avec $m = n$, $u_j = j!$ et $v_j = D_j$ pour obtenir

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, D_k = v_k = \sum_{\ell=0}^k (-1)^{k-\ell} \binom{k}{\ell} u_\ell = \sum_{\ell=0}^k (-1)^{k-\ell} \binom{k}{\ell} \ell! = k! \sum_{\ell=0}^k \frac{(-1)^{k-\ell}}{(k-\ell)!}$$

À l'aide d'un changement d'indices, on a alors $D_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$

7a. Il est clair que $D_n \neq 0$ car tout cycle de longueur n est un dérangement.

Y_n est à valeurs dans $\{-1, 1\}$ si bien que $\mathbb{P}(Y_n = 1) + \mathbb{P}(Y_n = -1) = 1$.

De plus à l'aide de 4 et comme on a une probabilité uniforme, on a :

$$\mathbb{P}(Y_n = 1) - \mathbb{P}(Y_n = -1) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)}{D_n} \text{ puis } 2\mathbb{P}(Y_n = 1) = 1 + \frac{(-1)^{n-1}(n-1)}{D_n}$$

Ainsi la loi de Y_n est donnée par : $\mathbb{P}(Y_n = 1) = \frac{1}{2} + \frac{(-1)^{n-1}(n-1)}{2D_n}$ et $\mathbb{P}(Y_n = -1) = \frac{1}{2} - \frac{(-1)^{n-1}(n-1)}{2D_n}$

7b. En reconnaissant une série exponentielle, on a $D_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n!e^{-1}$

ainsi $\frac{(-1)^{n-1}(n-1)}{2D_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(-1)^{n-1}(n-1)e}{2n!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

D'où pour tout $\varepsilon \in \{-1, 1\}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(Y_n = \varepsilon) = \frac{1}{2}$

8a. Z_n est à valeurs dans $\llbracket 0, n \rrbracket$. Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. En reprenant 6, on a

$$\text{Card}(Z_n = k) = \text{Card}(\{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \nu(\sigma) = k\}) = \binom{n}{k} D_{n-k} = \frac{n! \cdot (n-k)!}{k! \cdot (n-k)!} \sum_{\ell=0}^{n-k} \frac{(-1)^\ell}{\ell!}$$

Ainsi $\boxed{\text{la loi de } Z_n \text{ est donnée par } \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \mathbb{P}(Z_n = k) = \frac{1}{k!} \sum_{\ell=0}^{n-k} \frac{(-1)^\ell}{\ell!}}$

8b. Pour tout entier naturel k , $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(Z_n = k) = \frac{1}{e \cdot k!}}$

La condition de l'énoncé « $k \leq n$ » est pour le moins étrange.

La « loi limite » est alors $\mathcal{P}(1)$ loi de Poisson de paramètre 1.

8c. On commence par la méthode qui semble prévue par l'énoncé.

On a $Z_n \in L^1$ car Z_n est finie.

Le nombre moyen de points fixes d'une permutation aléatoire vaut $\boxed{\mathbb{E}(Z_n) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{(k-1)!} \sum_{\ell=0}^{n-k} \frac{(-1)^\ell}{\ell!} \right)}$ car

$$\mathbb{E}(Z_n) = \sum_{k=0}^n k \mathbb{P}(Z_n = k) = 0 + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{(k-1)!} \sum_{\ell=0}^{n-k} \frac{(-1)^\ell}{\ell!} \right) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(n)$$

où on a posé pour $k \in \mathbb{N}^*$, $f_k : n \in \mathbb{N} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } k > n \\ \frac{1}{(k-1)!} \sum_{\ell=0}^{n-k} \frac{(-1)^\ell}{\ell!} & \text{sinon} \end{cases}$.

La suite $\left(\frac{1}{\ell!} \right)_{\ell \geq 0}$ est décroissante de limite nulle donc selon les séries alternées : $\forall p \in \mathbb{N}$, $0 \leq \sum_{\ell=0}^p \frac{(-1)^\ell}{\ell!} \leq \frac{(-1)^0}{0!} = 1$.

Ainsi on a

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}, |f_k(n)| \leq \frac{1}{(k-1)!}$$

Or la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{(k-1)!}$ converge donc la série de fonctions $\sum_{k \geq 1} f_k$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{N}$.

Par ailleurs, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $f_k(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e \cdot (k-1)!}$

D'où selon le théorème de la double limite, on a

$$\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{e \cdot (k-1)!} = \frac{1}{e} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!}$$

Ce qui permet de conclure que $\boxed{\mathbb{E}(Z_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1}$ Ce qui est conforme à l'intuition car 1 est l'espérance de $\mathcal{P}(1)$.

Voici une méthode plus simple.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ note F_i la variable aléatoire définie par $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n$, $F_i(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma(i) = i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

On a $\text{Card}(F_i = 1) = (n-1)!$ ainsi $\mathbb{P}(F_i = 1) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$ d'où $F_i \sim \mathcal{B}(1/n)$.

On remarque que $Z_n = \sum_{i=1}^n F_i$ (on compte les points fixes). Ainsi par linéarité : $\boxed{\mathbb{E}(Z_n) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} = 1}$

On retrouve bien la limite ci-dessus !

9. On a $\mathfrak{S}_2 = \{(12), \text{Id}\} = \{(12), (1)(2)\}$ donc $\boxed{\frac{1}{2!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_2} \omega(\sigma) = \frac{1}{2} (1 + 2) = \frac{3}{2}}$

On a $\mathfrak{S}_3 = \{(123), (132), (3)(12), (2)(13), (1)(23), (1)(2)(3)\}$ donc $\boxed{\frac{1}{3!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} \omega(\sigma) = \frac{1}{6} (2 \times 1 + 3 \times 2 + 3) = \frac{11}{6}}$

Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_4$, on a $\omega(\sigma) \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$.

L'identité est l'unique $\sigma \in \mathfrak{S}_4$ tel que $\omega(\sigma) = 4$.

On a $\omega(\sigma) = 3$ si et seulement si σ est une transposition, il y en a $\binom{4}{2} = 6$.

On a $\omega(\sigma) = 1$ si et seulement si σ est un cycle de longueur 4 $(1, \sigma(1), \sigma^2(1), \sigma^3(1))$ il y en a $3! = 6$.

Comme $4! = 24$, le nombre de $\sigma \in \mathfrak{S}_4$ tel que $\omega(\sigma) = 2$ est donc de $24 - 1 - 6 - 6 = 11$.

Donc $\boxed{\frac{1}{4!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_4} \omega(\sigma) = \frac{1}{24} (4 + 6 \times 3 + 6 \times 1 + 11 \times 2) = \frac{50}{24} = \frac{25}{12}}$

10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $\boxed{s(n, n) = 1}$ car il n'y a que l'identité

et $\boxed{s(n, 1) = (n-1)!}$ nombre des cycles de longueur n de la forme $(1, \sigma(1), \sigma^2(1), \dots, \sigma^{n-1}(1))$.

On suppose maintenant que n et k sont des entiers tels que $2 \leq k \leq n-1$.

On pose $I_1 = \{\sigma \in (X_n = k) \mid \sigma(1) = 1\}$ et $J_1 = \{\sigma \in (X_n = k) \mid \sigma(1) \neq 1\} = (X_n = k) \setminus I_1$ de sorte que

$$\text{Card}(I_1) + \text{Card}(J_1) = \text{Card}(X_n = k) = s(n, k)$$

À $\sigma \in I_1$, on peut associer la permutation de $\llbracket 2, n \rrbracket$, σ' telle que $\sigma'(j) = \sigma(j)$.

Ainsi construite, en identifiant à $(X_{n-1} = k-1)$ à l'ensemble des permutations de $\llbracket 2, n \rrbracket$ composées de $k-1$ cycles à supports disjoints, l'application $\sigma \in I_1 \mapsto \sigma' \in (X_{n-1} = k-1)$ est bijective. Ainsi

$$\text{Card}(I_1) = \text{Card}(X_{n-1} = k-1) = s(n-1, k-1)$$

À $\sigma \in J_1$, on peut associer $\gamma = (\sigma(1), \sigma')$ où $\sigma' : \llbracket 2, n \rrbracket \rightarrow \llbracket 2, n \rrbracket$ telle que

$$\forall j \in \llbracket 2, n \rrbracket, \sigma'(j) = \begin{cases} \sigma(1) & \text{si } \sigma(j) = 1 \\ \sigma(j) & \text{sinon} \end{cases}$$

L'application σ' alors une permutation de $\llbracket 2, n \rrbracket$ tel que le cycle de $\sigma : (1, \sigma(1), \dots, \sigma^{k-1}(1))$ de longueur $k \geq 2$ devient le cycle de $\sigma' : (\sigma(1), \dots, \sigma^{k-1}(1))$ de longueur $k-1$. Les autres cycles de σ' sont ceux de σ (cycles dont le support ne contient pas 1).

Ainsi construite l'application $\sigma \in J_1 \mapsto \gamma \in \llbracket 2, n \rrbracket \times (X_{n-1} = k)$ est bijective via une identification. Ainsi

$$\text{Card}(J_1) = \text{Card}(\llbracket 2, n \rrbracket \times (X_{n-1} = k)) = (n-1)s(n-1, k)$$

On peut alors conclure que $\boxed{s(n, k) = s(n-1, k-1) + (n-1)s(n-1, k)}$

11. Soit $x \in \mathbb{R}$. On va établir par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, que $\prod_{i=0}^{n-1} (x+i) = \sum_{k=1}^n s(n, k) x^k$.

On commence par remarquer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $s(n, k) = 0$ si $k > n$ ou $k \leq 0$.

De plus la relation de récurrence établie en 10 est valable pour tout $n \geq 2$ et $k \in \mathbb{N}$, il suffit de tester le cas $k \geq 2$ et $n = 2$ puis le cas $k = 1$ avec $n \geq 2$.

Pour l'initialisation (pour $n = 1$), on a

$$\prod_{i=0}^{1-1} (x+i) = x = s(1, 1) x^1 = \sum_{k=1}^1 s(1, k) x^k$$

Pour l'hérédité, soit l'entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que la propriété est vraie au rang n . On a alors :

$$\prod_{i=0}^n (x+i) = (x+n) \sum_{k=1}^n s(n, k) x^k = \sum_{k=1}^n s(n, k) x^{k+1} + n \sum_{k=1}^n s(n, k) x^k = s(n, n) x^{n+1} + \sum_{p=2}^n s(n, p-1) x^p + \sum_{k=2}^n n s(n, k) x^k + n s(n, 1) x^1$$

donc en utilisant 10, on a

$$\prod_{i=0}^n (x+i) = s(n+1, n+1) x^{n+1} + \sum_{k=2}^n (s(n, k-1) + n s(n, k)) x^k + n \cdot (n-1)! \cdot x^1 = \sum_{k=1}^{n+1} s(n+1, k) x^k$$

On peut alors conclure que la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\prod_{i=0}^{n-1} (x+i) = \sum_{k=1}^n s(n, k) x^k$

12 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Je pose $P = \prod_{i=0}^{n-1} (X+i)$ de sorte que $P = \sum_{k=1}^n s(n, k) X^k$ selon 11.

Ainsi $P' = \sum_{k=1}^n k s(n, k) X^{k-1}$ donc $P(1) = n!$ et $P'(1) = \sum_{k=1}^n k s(n, k)$.

X_n est à valeurs dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ donc $X_n \in L^2$ et comme la probabilité est uniforme :

$$\mathbb{E}[X_n] = \sum_{k=1}^n k \mathbb{P}(X_n = k) = \sum_{k=1}^n k \frac{\text{Card}(X_n = k)}{\text{Card}(\mathfrak{S}_n)} = \sum_{k=1}^n k \frac{s(n, k)}{n!} = \frac{P'(1)}{P(1)} = \frac{P'}{P}(1)$$

Comme P est scindé à racines simples, on a $\frac{P'}{P} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{X+i} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{X+k-1}$. Ainsi

$$\mathbb{E}[X_n] = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

Avec le résultat admis, on conclut : $\mathbb{E}[X_n] \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(n) + \gamma + O\left(\frac{1}{n}\right)$

13a. En reprenant le polynôme P ci-dessus, on a $P'' = \sum_{k=2}^n k(k-1) s(n, k) X^{k-2}$

d'où $P''(1) = \sum_{k=2}^n k(k-1) s(n, k) = \sum_{k=1}^n k(k-1) s(n, k)$. Ainsi

$$\frac{1}{n!} \sum_{k=1}^n k(k-1) s(n, k) = \frac{P''(1)}{P(1)} = \frac{P''}{P}(1)$$

Or $\left(\frac{P'}{P}\right)' = \frac{P''}{P} - \frac{(P')^2}{P^2} = \frac{P''}{P} - \left(\frac{P'}{P}\right)^2$ donc comme $\frac{P'}{P}(1) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ selon 12, on a

$$\frac{1}{n!} \sum_{k=1}^n k(k-1) s(n, k) = \left(\frac{P'}{P}\right)'(1) + \left(\frac{P'}{P}\right)^2(1) = \left(\frac{P'}{P}\right)'(1) + \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right)^2$$

or $\left(\frac{P'}{P}\right)' = \sum_{k=1}^n \frac{-1}{(X+k-1)^2}$ donc

$$\left(\frac{P'}{P}\right)'(1) = \sum_{i=1}^n \frac{-1}{i^2} \quad \text{et} \quad \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i}\right) \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{j}\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{ij}$$

On a bien $\frac{1}{n!} \sum_{k=1}^n k(k-1) s(n, k) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{ij} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2}$

13b. Comme $\mathbb{E}[X_n] = \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^n k s(n, k)$ (selon 12) et que $k(k-1) + k = k^2$,

$$\text{alors avec 13a, on a } \boxed{\frac{1}{n!} \sum_{k=1}^n k^2 s(n, k) = \mathbb{E}[X_n] + \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{ij} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2} \right)}$$

14a. En regroupant par paquets et selon 13, on a

$$\frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \omega(\sigma)^2 = \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_n \\ \omega(\sigma)=k}} k^2 = \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^n k^2 s(n, k) = \mathbb{E}[X_n] + \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{ij} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2} \right)$$

Quand $n \rightarrow +\infty$, on a $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2} = O(1)$ car la série $\sum_{i \geq 1} \frac{1}{i^2}$ converge et

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{ij} = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right)^2 = \left(\ln(n) + \gamma + O\left(\frac{1}{n}\right) \right)^2 = \ln(n)^2 + 2\gamma \ln(n) + \gamma^2 + O\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$$

Ainsi $\sum_{i=1}^n \frac{-1}{i^2} = O\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$ et selon 12, $\mathbb{E}[X_n] = \ln(n) + \gamma + O\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$

En sommant ces développements asymptotiques, on a donc en prenant $\boxed{c = \gamma^2 + \gamma}$

$$\frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \omega(\sigma)^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(n)^2 + (2\gamma + 1) \ln(n) + \gamma^2 + \gamma + O\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$$

14b. Par formule de l'espérance sur univers fini, on a

$$\frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (\omega(\sigma) - \ln(n))^2 = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (X_n(\sigma) - \ln(n))^2 \mathbb{P}(\{\sigma\}) = \mathbb{E}\left((X_n - \ln(n))^2\right) = \mathbb{E}(X_n^2) - 2\ln(n)\mathbb{E}(X_n) + \ln(n)^2$$

Selon la question précédente (et univers fini) et 12, on a

$$\mathbb{E}(X_n^2) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(n)^2 + (2\gamma + 1) \ln(n) + \gamma^2 + \gamma + O\left(\frac{\ln(n)}{n}\right) \quad \text{et} \quad \ln(n)\mathbb{E}(X_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(n)^2 + \gamma \ln(n) + O\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$$

Par combinaison développements asymptotiques, on a donc en prenant $\boxed{c = \gamma^2 + \gamma}$

$$\frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (\omega(\sigma) - \ln(n))^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(n) + \gamma^2 + \gamma + O\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$$

15. Soit $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$.

Comme $t \mapsto t^2$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, on a

$$(|X_n - \ln(n)| > \varepsilon \ln(n)) = \left((X_n - \ln(n))^2 > \varepsilon^2 \ln(n)^2 \right) \subset \left((X_n - \ln(n))^2 \geq \varepsilon^2 \ln(n)^2 \right)$$

Ainsi $(|X_n - \ln(n)| > \varepsilon \ln(n)) = \left((X_n - \ln(n))^2 > \varepsilon^2 \ln(n)^2 \right) \subset \left((X_n - \ln(n))^2 \geq \varepsilon^2 \ln(n)^2 \right)$.

De plus $\varepsilon^2 \ln(n)^2 > 0$ et $(X_n - \ln(n))^2 \geq 0$, ainsi selon Markov

$$\mathbb{P}(|X_n - \ln(n)| > \varepsilon \ln(n)) \leq \mathbb{P}\left((X_n - \ln(n))^2 \geq \varepsilon^2 \ln(n)^2\right) \leq \frac{\mathbb{E}\left((X_n - \ln(n))^2\right)}{\varepsilon^2 \ln(n)^2}$$

Or selon 14b, $\mathbb{E}\left((X_n - \ln(n))^2\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(n) + \gamma^2 + \gamma + O\left(\frac{\ln(n)}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$

d'où $\frac{\mathbb{E}\left((X_n - \ln(n))^2\right)}{\ln(n)^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ ce qui nous fournit $C > 0$ tel que $\forall n \geq 2, 0 \leq \frac{\mathbb{E}\left((X_n - \ln(n))^2\right)}{\ln(n)^2} \leq C$.

et on a bien pour tout réel $\varepsilon > 0$ et tout entier $n \geq 2$, $\boxed{\mathbb{P}(|X_n - \ln(n)| > \varepsilon \ln(n)) \leq \frac{C}{\varepsilon^2 \ln(n)}}$

Deuxième partie

16. On remarque que A est en escaliers sur tout segment. Ainsi $b'A$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ d'où l'existence de l'intégrale. On va procéder par récurrence sur $n \geq 2$.

Pour l'initialisation, on a $\sum_{k=2}^2 a_k b(k) = a_2 b(2)$ et $A(2)b(2) - \int_2^2 b'(t)A(t)dt = \left(\sum_{2 \leq k \leq 2} a_k\right) b(2) - 0$.

L'initialisation est bien vérifiée.

Pour l'hérédité : soit $n \geq 2$ tel que $\sum_{k=2}^n a_k b(k) = A(n)b(n) - \int_2^n b'(t)A(t)dt$.

On a $\sum_{k=2}^{n+1} a_k b(k) - \sum_{k=2}^n a_k b(k) = a_{n+1}b(n+1)$ et comme $A(n+1) = a_{n+1} + A(n)$, on a aussi

$$A(n+1)b(n+1) - \int_2^{n+1} b'(t)A(t)dt - \left(A(n)b(n) - \int_2^n b'(t)A(t)dt\right) = a_{n+1}b(n+1) + A(n)(b(n+1) - b(n)) - \int_n^{n+1} b'(t)A(t)dt$$

Or A est constante sur $[n, n+1[$ donc $\int_n^{n+1} b'(t)A(t)dt = \int_n^{n+1} b'(t)A(n)dt = A(n)(b(n+1) - b(n))$.

Ainsi

$$\sum_{k=2}^{n+1} a_k b(k) - \sum_{k=2}^n a_k b(k) = A(n+1)b(n+1) - \int_2^{n+1} b'(t)A(t)dt - \left(A(n)b(n) - \int_2^n b'(t)A(t)dt\right)$$

Ce qui conclut l'hérédité.

On peut conclure que pour tout entier $n \geq 2$, $\sum_{k=2}^n a_k b(k) = A(n)b(n) - \int_2^n b'(t)A(t)dt$

17a. On a $\prod_{\substack{p \leq 1 \\ p \text{ premier}}} p = 1 \leq 4 = 4^1$, $\prod_{\substack{p \leq 2 \\ p \text{ premier}}} p = 2 \leq 16 = 4^2$ et $\prod_{\substack{p \leq 3 \\ p \text{ premier}}} p = 6 \leq 16 \leq 4^3$. Ainsi $\forall n \in \{1, 2, 3\}$, $\prod_{\substack{p \leq n \\ p \text{ premier}}} p \leq 4^n$

17b. On suppose que n est pair ainsi on peut écrire $n = 2q$ avec $q \geq 2$.

Comme $2q$ n'est pas premier et que la propriété est supposée vraie au rang $2q-1$, on a

$$\prod_{\substack{p \leq n \\ p \text{ premier}}} p = \prod_{\substack{p \leq 2q \\ p \text{ premier}}} p = \prod_{\substack{p \leq 2q-1 \\ p \text{ premier}}} p \leq 4^{2q-1} \leq 4^n$$

D'où le résultat au rang n si n est pair

17c. Soit p premier dans $\llbracket m+2, 2m+1 \rrbracket$.

On a $p \mid (2m+1)! = \prod_{k=1}^{2m+1} k$ donc $\nu_p((2m+1)!) \geq 1$.

De plus $\forall k \in \llbracket 1, m+1 \rrbracket$, $p \wedge k = 1$ car p est premier $> m+1$. Ainsi $p \nmid (m! \cdot (m+1)!)$ donc $\nu_p(m! \cdot (m+1)!) = 0$.

Par conséquent $\nu_p\left(\binom{2m+1}{m}\right) = \nu_p\left(\frac{(2m+1)!}{m! \cdot (m+1)!}\right) = \nu_p((2m+1)!) - \nu_p(m! \cdot (m+1)!) > 0$.

Donc $p \mid \binom{2m+1}{m}$, valable pour chaque p premier tel que $m+1 < p \leq 2m+1$.

Ainsi $\prod_{\substack{m+1 < p \leq 2m+1 \\ p \text{ premier}}} p$ divise $\binom{2m+1}{m}$

On a $\binom{2m+1}{m} \leq \sum_{k=0}^{2m+1} \binom{2m+1}{k} = 2^{2m+1} = 2 \cdot 4^m$

On a bien $\binom{2m+1}{m} \leq 4^m$

17d. Il s'agit d'une preuve par récurrence forte. L'initialisation est faite en 17a.

Pour l'hérédité commencée en 17b, il reste à traiter le cas où n est impair.

On écrit $n = 2m + 1$ avec $m \geq 2$. On a $\prod_{\substack{p \leq n \\ p \text{ premier}}} p = \left(\prod_{\substack{p \leq m+1 \\ p \text{ premier}}} p \right) \times \left(\prod_{\substack{m+1 < p \leq 2m+1 \\ p \text{ premier}}} p \right)$

Comme $n - 1 - (m + 1) = m - 1 > 0$, on a $1 \leq m + 1 \leq n - 1$ ainsi par hypothèse de récurrence

$$0 \leq \prod_{\substack{p \leq m+1 \\ p \text{ premier}}} p \leq 4^{m+1}$$

Comme $\prod_{\substack{m+1 < p \leq 2m+1 \\ p \text{ premier}}} p$ et $\binom{2m+1}{m} \in \mathbb{N}^*$ alors selon 17c, on a

$$1 \leq \prod_{\substack{m+1 < p \leq 2m+1 \\ p \text{ premier}}} p \leq \binom{2m+1}{m} \leq 4^m$$

Par produit, on alors $\prod_{\substack{p \leq n \\ p \text{ premier}}} p \leq 4^{2m+1} = 4^n$

Ce qui termine la récurrence. On peut conclure que : si n est un entier naturel non nul, alors $\prod_{\substack{p \leq n \\ p \text{ premier}}} p \leq 4^n$

18. Dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, il y a $E(n/p^k)$ multiples de p^k et $E(n/p^{k+1})$ multiples de p^{k+1} . Il y a donc $E(n/p^k) - E(n/p^{k+1})$ éléments de valuation p -adique valant k . Remarquons que ce nombre est nul pour k assez grand.

Puisque ν_p est multiplicative ($\nu_p(ab) = \nu_p(a) + \nu_p(b)$), on a

$$\nu_p(n!) = \sum_{a=1}^n \nu_p(a)$$

Dans cette somme de termes positifs, il y a $E(n/p^k) - E(n/p^{k+1})$ entiers a qui apportent une contribution égale à k . On a donc (la somme est en fait finie)

$$\nu_p(n!) = \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(E\left(\frac{n}{p^k}\right) - E\left(\frac{n}{p^{k+1}}\right) \right)$$

Comme $E(n/p^k)$ est nul pour k assez grand, on peut effectuer un décalage d'indice dans la seconde :

$$\nu_p(n!) = \sum_{k=1}^{+\infty} k E\left(\frac{n}{p^k}\right) - \sum_{k=2}^{+\infty} (k-1) E\left(\frac{n}{p^k}\right)$$

les termes se simplifient et il reste $\nu_p(n!) = \sum_{k=1}^{+\infty} E\left(\frac{n}{p^k}\right)$

Comme $\forall x \in \mathbb{R}, x - 1 < E(x) \leq x$, on a alors dans $[0, +\infty]$ (termes positifs) :

$$\frac{n}{p} - 1 < E\left(\frac{n}{p^1}\right) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} E\left(\frac{n}{p^k}\right) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n}{p^k} = \frac{n}{p} \frac{1}{1 - 1/p} = \frac{n}{p-1}$$

De plus $\frac{n}{p} + \frac{n}{p(p-1)} = \frac{n(p-1+1)}{p(p-1)} = \frac{n}{p-1}$

Ainsi on a bien $\frac{n}{p} - 1 < \nu_p(n!) \leq \frac{n}{p} + \frac{n}{p(p-1)}$

19a. $\ln$ est croissante et continue sur $\mathbb{R}_+^*$ d'où $\forall k \geq 2$, $\int_{k-1}^k \ln(t)dt \leq \ln(k) \leq \int_k^{k+1} \ln(t)dt$ et $0 = \ln(1) \leq \int_1^2 \ln(t)dt$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a selon Chasles

$$\int_1^n \ln(t)dt \leq \sum_{k=1}^n \ln(k) \leq \int_1^{n+1} \ln(t)dt = \ln(n+1) + \int_1^n \ln(t)dt$$

Or par intégrations par parties, on a $\int_1^n \ln(t)dt = [t \ln(t)]_{t=1}^{t=n} - \int_1^n 1dt = n \ln(n) - n$.

Ainsi $0 \leq \sum_{k=1}^n \ln(k) - (n \ln(n) - n) \leq \ln(n+1) = \ln(n) + \ln(1+1/n)$.

Or quand $n \rightarrow +\infty$, alors $\ln(1+1/n) \rightarrow 0$, donc $\ln(1+1/n) = O(\ln(n))$ puis $\ln(n+1) = O(\ln(n))$

On a bien $\boxed{\sum_{k=1}^n \ln(k) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n \ln(n) - n + O(\ln(n))}$

19b. Par théorème de la décomposition en facteur premier, on a $n! = \prod_{\substack{p \leq n! \\ p \text{ premier}}} p^{\nu_p(n!)}$

Soit $p \in \llbracket n+1, n! \rrbracket$ premier. Alors p ne divise pas $n!$ et donc $\nu_p(n!) = 0$. Ainsi $\prod_{\substack{n < p \leq n! \\ p \text{ premier}}} p^{\nu_p(n!)} = 1$

On a bien $\boxed{n! = \prod_{\substack{p \leq n \\ p \text{ premier}}} p^{\nu_p(n!)} \times 1 = \prod_{\substack{p \leq n \\ p \text{ premier}}} p^{\nu_p(n!)}$

D'où $\ln(n!) = \sum_{\substack{p \leq n \\ p \text{ premier}}} \nu_p(n!) \ln(p)$ puis avec 18 on a

$$\sum_{\substack{p \leq n \\ p \text{ premier}}} \left(\frac{n}{p} - 1 \right) \ln(p) < \ln(n!) \leq \sum_{\substack{p \leq n \\ p \text{ premier}}} \left(\frac{n}{p} + \frac{n}{p(p-1)} \right) \ln(p)$$

or en utilisant 17, on a $\sum_{\substack{p \leq n \\ p \text{ premier}}} \ln(p) = \ln \left(\prod_{\substack{p \leq n \\ p \text{ premier}}} p \right) \leq \ln(4^n) = 4 \ln(n)$.

On en déduit que $\boxed{n \sum_{\substack{p \leq n \\ p \text{ premier}}} \frac{\ln(p)}{p} - n \ln(4) < \ln(n!) \leq n \sum_{\substack{p \leq n \\ p \text{ premier}}} \frac{\ln(p)}{p} + n \sum_{\substack{p \leq n \\ p \text{ premier}}} \frac{\ln(p)}{p(p-1)}}$

19c. Quand $k \rightarrow +\infty$, on a $k^{3/2} \frac{\ln(k)}{k(k-1)} \sim \frac{\ln(k)}{k^{1/2}} \rightarrow 0$ par croissance comparée.

donc $\frac{\ln(k)}{k(k-1)} = o(1/k^{3/2})$ or la série $\sum 1/k^{3/2}$ converge.

Ainsi par comparaison de séries à termes positifs, $\boxed{\text{la série } \sum_{k \geq 2} \frac{\ln(k)}{k(k-1)} \text{ converge}}$ car converge absolument.

19d. Soit $n \geq 2$. En posant $L = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{k(k-1)}$ ($\in \mathbb{R}$ selon 19c), on a

$$0 \leq \sum_{\substack{p \leq n \\ p \text{ premier}}} \frac{\ln(p)}{p(p-1)} \leq \sum_{k=2}^n \frac{\ln(k)}{k(k-1)} \leq \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{k(k-1)} = L$$

Ainsi selon 19b, on a
$$\sum_{\substack{p \leq n \\ p \text{ premier}}} \frac{\ln(p)}{p} - \ln(4) < \frac{\ln(n!)}{n} \leq \sum_{\substack{p \leq n \\ p \text{ premier}}} \frac{\ln(p)}{p} + L \text{ donc}$$

$$-L \leq \sum_{\substack{p \leq n \\ p \text{ premier}}} \frac{\ln(p)}{p} - \frac{\ln(n!)}{n} \leq \ln(4)$$

donc quand $n \rightarrow +\infty$, on a
$$\sum_{\substack{p \leq n \\ p \text{ premier}}} \frac{\ln(p)}{p} = \frac{\ln(n!)}{n} + O(1)$$

puis avec 19a, on a
$$\frac{\ln(n!)}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(k) = \ln(n) - 1 + O\left(\frac{\ln(n)}{n}\right) = \ln(n) + O(1).$$

Ainsi
$$\boxed{\sum_{\substack{p \leq n \\ p \text{ premier}}} \frac{\ln(p)}{p} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(n) + O(1)}$$

20a. On considère la suite $(a_k)_{k \geq 2}$ définie par $a_k = \begin{cases} \frac{\ln(k)}{k} & \text{si } k \text{ est premier} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$

Ainsi en posant A comme en 16, on a

$$\forall t \geq 2, A(t) = \sum_{2 \leq k \leq t} a_k = \sum_{\substack{p \leq t \\ p \text{ premier}}} \frac{\ln(p)}{p} = R(t) + \ln(t)$$

On pose également $b : t \mapsto \frac{1}{\ln(t)}$ qui est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[2, +\infty[$.

Avec 16, on a alors $\sum_{k=2}^n a_k b(k) = A(n)b(n) - \int_2^n b'(t)A(t)dt$ d'où

$$\sum_{\substack{p \leq n \\ p \text{ premier}}} \frac{\ln(p)}{p} b(p) = R(n)b(n) + \ln(n)b(n) - \int_2^n b'(t)R(t)dt - \int_2^n b'(t)\ln(t)dt$$

Comme $b' : t \mapsto \frac{-1}{t \ln(t)^2}$, on a alors

$$\sum_{\substack{p \leq n \\ p \text{ premier}}} \frac{1}{p} = \frac{R(n)}{\ln(n)} + 1 - \int_2^n \frac{-R(t)}{t \ln(t)^2} dt - \int_2^n \frac{1}{t \ln(t)} dt$$

On peut alors conclure que
$$\boxed{\sum_{\substack{p \leq n \\ p \text{ premier}}} \frac{1}{p} = 1 + \ln_2(n) - \ln_2(2) + \frac{R(n)}{\ln(n)} + \int_2^n \frac{R(t)}{t(\ln(t))^2} dt}$$

20b. Comme R est continue par morceaux sur $[2, +\infty[$, alors $t \mapsto \frac{R(t)}{t(\ln(t))^2}$ l'est.

Quand $t \rightarrow +\infty$, on note $n = E(t)$. On a $n \leq t < n+1$ et $-\ln(t) + \ln(n) \leq R(t) - R(n) \leq \frac{\ln(t)}{t}$.

Ainsi $-\ln(1 + 1/n) = -\ln(n+1) + \ln(n) \leq R(t) - R(n) \leq \frac{\ln(t)}{t}$

Or $n = E(t) \rightarrow +\infty$ donc $R(t) - R(n) \rightarrow 0$ d'où $R(t) - R(n) = O(1)$

De plus selon 19d, on a

$$R(n) = -\ln(n) + \sum_{\substack{p \leq n \\ p \text{ premier}}} \frac{\ln(p)}{p} = O(1)$$

Ainsi $R(t) = O(1)$ donc

$$\frac{R(t)}{t(\ln(t))^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{t(\ln(t))^2}\right)$$

Or par calcul dans $[0, +\infty]$, on

$$\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln(t))^2} = \left[\frac{-1}{\ln(t)} \right]_{t=2}^{t \rightarrow +\infty} = \frac{1}{\ln(2)} < +\infty$$

Ainsi la fonction continue $t \mapsto \frac{1}{t(\ln(t))^2}$ est intégrable sur $[2, +\infty[$.

donc par comparaison, la fonction $t \mapsto \frac{R(t)}{t(\ln(t))^2}$ est intégrable sur $[2, +\infty[$

20c. Je note $c_1 = 1 - \ln_2(2) + \int_2^{+\infty} \frac{R(t)}{t(\ln(t))^2} dt$ qui est bien défini selon 20b et pour $n \geq 2$, on a

$$\left(1 - \ln_2(2) + \frac{R(n)}{\ln(n)} + \int_2^n \frac{R(t)}{t(\ln(t))^2} dt\right) - c_1 \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{R(n)}{\ln(n)} - \int_n^{+\infty} \frac{R(t)}{t(\ln(t))^2} dt$$

Selon ce qui a été fait en 20b, on a $R(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O(1)$ donc $\frac{R(n)}{\ln(n)} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{\ln(n)}\right)$ et

$$\frac{R(t)}{t(\ln(t))^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{t(\ln(t))^2}\right)$$

où la fonction $t \mapsto \frac{1}{t(\ln(t))^2}$ est positive et intégrable sur $[2, +\infty[$.

Ainsi par intégration des relations de comparaison :

$$\int_n^{+\infty} \frac{R(t)}{t(\ln(t))^2} dt \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O\left(\int_n^{+\infty} \frac{1}{t(\ln(t))^2} dt\right)$$

Par un calcul analogue en 20b, on a $\int_n^{+\infty} \frac{1}{t(\ln(t))^2} dt = \frac{1}{\ln(n)}$.

Ce qui permet de conclure, avec 20a, que $\sum_{\substack{p \leq n \\ p \text{ premier}}} \frac{1}{p} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln_2(n) + c_1 + O\left(\frac{1}{\ln(n)}\right)$

21a. Soit $n \in \mathbb{N} \cap [1, x]$. On remarque que

$$\{n \in \mathbb{N} \cap [1, x] : n \equiv 0 \pmod{q}\} = \{bq : q \in \llbracket 1, E(x/q) \rrbracket\}$$

Comme l'application $b \mapsto bq$ est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, alors

$$\text{Card}\{n \in \mathbb{N} \cap [1, x] : n \equiv 0 \pmod{q}\} - \frac{x}{q} = \text{Card}(\llbracket 1, E(x/q) \rrbracket) - \frac{x}{q} = E\left(\frac{x}{q}\right) - \frac{x}{q}$$

donc $\text{Card}\{n \in \mathbb{N} \cap [1, x] : n \equiv 0 \pmod{q}\} - \frac{x}{q} \in [-1, 0]$ est bornée en valeur absolue par 1 indépendant de x et de q

21b. Quand $x \rightarrow +\infty$,

$$\sum_{n \leq x} \omega(n) = \sum_{n \leq x} \left(\sum_{\substack{p|n \\ p \text{ premier}}} 1 \right) = \sum_{\substack{n \leq x \\ p|n \\ p \text{ premier}}} 1 = \sum_{\substack{p \leq x \\ p \text{ premier} \\ qp \leq x}} 1 = \sum_{\substack{p \leq x \\ p \text{ premier}}} \left(\sum_{q=1}^{E(x/p)} 1 \right) = \sum_{\substack{p \leq x \\ p \text{ premier}}} E\left(\frac{x}{p}\right)$$

Ainsi avec 21a, on a

$$\left| \sum_{n \leq x} \omega(n) - \sum_{\substack{p \leq x \\ p \text{ premier}}} \frac{x}{p} \right| \leq \sum_{\substack{p \leq x \\ p \text{ premier}}} \left| E\left(\frac{x}{p}\right) - \frac{x}{p} \right| \leq \sum_{\substack{p \leq x \\ p \text{ premier}}} 1 \leq x + 1$$

Par conséquent, on a

$$\frac{1}{x} \sum_{n \leq x} \omega(n) = \sum_{\substack{p \leq x \\ p \text{ premier}}} \frac{1}{p} + O(1)$$

À l'aide de 20a, on peut conclure que

$$\boxed{\frac{1}{x} \sum_{n \leq x} \omega(n) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \ln_2(x) + O(1)}$$

22a. Quand $x \rightarrow +\infty$, on a

$$\frac{1}{x} \sum_{n \leq x} (\omega(n) - \ln_2(x))^2 = \frac{1}{x} \left(\sum_{n \leq x} \omega(n)^2 \right) - \frac{2 \ln_2(x)}{x} \sum_{n \leq x} \omega(n) + \sum_{n \leq x} \frac{\ln_2(x)^2}{x}$$

Selon 21b, on a $-\frac{2 \ln_2(x)}{x} \sum_{n \leq x} \omega(n) = -2 \ln_2(x)^2 + O(\ln_2(x))$ et

$$\sum_{n \leq x} \frac{\ln_2(x)^2}{x} = E(x) \frac{\ln_2(x)^2}{x} = \ln_2(x)^2 + \ln_2(x) \frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)} \frac{\ln(x)}{x} (E(x) - x)$$

Comme $\frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)} \frac{\ln(x)}{x} (E(x) - x) = O(1)$, alors $\sum_{n \leq x} \frac{\ln_2(x)^2}{x} = \ln_2(x)^2 + O(\ln_2(x))$

Par somme de développements asymptotiques :

$$\boxed{\frac{1}{x} \sum_{n \leq x} (\omega(n) - \ln_2(x))^2 \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{x} \left(\sum_{n \leq x} \omega(n)^2 \right) - \ln_2(x)^2 + O(\ln_2(x))}$$

22b. L'idée est la même qu'en 21b, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\omega(n)^2 = \left(\sum_{\substack{p_1|n \\ p_1 \text{ premier}}} 1 \right) \left(\sum_{\substack{p_2|n \\ p_2 \text{ premier}}} 1 \right) = \sum_{\substack{p_1|n \\ p_2|n \\ p_1, p_2 \text{ premiers}}} 1$. Ainsi

$$\sum_{n \leq x} \omega(n)^2 = \sum_{\substack{p_1 \leq x \\ p_2 \leq x \\ p_1, p_2 \text{ premiers}}} \sum_{\substack{n \leq x \\ p_1|n \\ p_2|n}} 1 = \sum_{\substack{p_1 \leq x \\ p_1 \text{ premier}}} \sum_{\substack{p_2 \leq x \\ p_2 \text{ premier}}} \sum_{\substack{n \leq x \\ p_1|n \\ p_2|n}} 1$$

C'est à dire $\sum_{n \leq x} \omega(n)^2 = \sum_{\substack{p_1 \leq x \\ p_1 \text{ premier}}} \sum_{\substack{p_2 \leq x \\ p_2 \text{ premier}}} \text{Card} \{n \in \mathbb{N}^* : n \leq x, p_1 | n \text{ et } p_2 | n\}$

22c. La somme proposée est le cardinal de l'ensemble des triplets (p_1, p_2, n) tels que p_1, p_2 sont des nombres premiers différents et $p_1 p_2 | n$ (ceci équivalent à $p_1 | n$ et $p_2 | n$ quand $p_1 \wedge p_2 = 1$). C'est donc aussi

$$\sum_{\substack{p_1, p_2 \leq x \\ p_1 \neq p_2 \text{ premiers}}} E\left(\frac{x}{p_1 p_2}\right) = \sum_{\substack{p_1, p_2 \leq x \\ p_1, p_2 \text{ premiers}}} E\left(\frac{x}{p_1 p_2}\right) - \sum_{\substack{p \leq x \\ p \text{ premier}}} E\left(\frac{x}{p^2}\right)$$

On a tout d'abord

$$0 \leq \sum_{\substack{p \leq x \\ p \text{ premier}}} E\left(\frac{x}{p^2}\right) \leq x \frac{\pi^2}{6} = O(x \ln_2(x))$$

Pour estimer l'autre terme, on remarque que

$$\sum_{\substack{p_1, p_2 \leq x \\ p_1, p_2 \text{ premiers}}} \left(\frac{x}{p_1 p_2} - 1\right) \leq \sum_{\substack{p_1, p_2 \leq x \\ p_1, p_2 \text{ premiers}}} E\left(\frac{x}{p_1 p_2}\right) \leq \sum_{\substack{p_1, p_2 \leq x \\ p_1, p_2 \text{ premiers}}} \frac{x}{p_1 p_2}$$

Avec 20c,

$$\sum_{\substack{p_1, p_2 \leq x \\ p_1, p_2 \text{ premiers}}} \frac{x}{p_1 p_2} = x \left(\sum_{\substack{p \leq x \\ p \text{ premier}}} \frac{1}{p} \right)^2 = x \ln_2(x)^2 + O(x \ln_2(x))$$

et ainsi

$$x \ln_2(x)^2 + O(x \ln_2(x)) - \alpha(x) \leq \sum_{\substack{p_1, p_2 \leq x \\ p_1, p_2 \text{ premiers}}} E\left(\frac{x}{p_1 p_2}\right) \leq x \ln_2(x)^2 + O(x \ln_2(x))$$

où $\alpha(x)$ est le nombre de couples (p_1, p_2) de nombres premiers tels que $p_1 p_2 \leq x$.

Pour conclure à l'égalité demandée, il nous suffit de montrer que $\alpha(x) = O(x \ln_2(x))$.

Pour un p_1 fixé, il y a au plus $E\left(\frac{x}{p_1}\right)$ valeurs de p_2 convenables. On a donc

$$0 \leq \alpha(x) \leq \sum_{\substack{p \leq x \\ p \text{ premier}}} E\left(\frac{x}{p}\right) \leq x \sum_{\substack{p \leq x \\ p \text{ premier}}} \frac{1}{p}$$

et la question 20c (ou ce qu'on a vu en 21b) donne en effet $\alpha(x) = O(x \ln_2(x))$. On a bien

$$\left(\sum_{\substack{p_1, p_2 \leq x \\ p_1 \neq p_2 \text{ premiers}}} \text{Card} \{n \in \mathbb{N}^* : n \leq x, p_1 \mid n \text{ et } p_2 \mid n\} \right) - x \ln_2(x)^2 \underset{x \rightarrow +\infty}{=} O(x \ln_2(x))$$

22d. Avec 22b et 22c, on obtient que

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} \omega(n)^2 &= x \ln_2(x)^2 + O(x \ln_2(x)) + \sum_{\substack{p \leq x \\ p \text{ premier}}} \text{Card} \{n \in \mathbb{N}^* : n \leq x, p \mid n\} \\ &= x \ln_2(x)^2 + O(x \ln_2(x)) + \sum_{\substack{p \leq x \\ p \text{ premier}}} E\left(\frac{x}{p}\right) \end{aligned}$$

On a vu en 21b que cette dernière somme vaut $x \ln_2(x) + O(x)$. On a ainsi

$$\frac{1}{x} \left(\sum_{n \leq x} \omega(n)^2 \right) = \ln_2(x)^2 + O(\ln_2(x))$$

et avec 22a, on conclut que

$$\frac{1}{x} \left(\sum_{n \leq x} (\omega(n) - \ln_2(x))^2 \right) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} O(\ln_2(x))$$

23. L'ensemble $\mathcal{S} \cap [1, \sqrt{x}[$ est de cardinal $\leq \sqrt{x}$ et ainsi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \text{Card}\{n < \sqrt{x} : n \in \mathcal{S}\} = 0$$

On s'intéresse désormais à l'ensemble

$$\mathcal{S}' = \mathcal{S} \cap [\sqrt{x}, x]$$

On remarque que

$$\forall n \in \mathcal{S}', \frac{(\omega(n) - \ln_2(n))^2}{\ln_2(n)} \geq \sqrt{\ln_2(n)}, \quad 0 \leq \ln_2(x) - \ln_2(n) \leq \ln(2), \quad \ln_2(n) \geq \ln_2(\sqrt{x})$$

Dans un premier temps, on écrit que

$$\sum_{n \in \mathcal{S}'} \frac{(\omega(n) - \ln_2(n))^2}{\ln_2(n)} \geq \sum_{n \in \mathcal{S}'} \sqrt{\ln_2(n)} \geq \text{Card}(\mathcal{S}') \sqrt{\ln_2(\sqrt{x})}$$

ou encore

$$\text{Card}(\mathcal{S}') \leq \frac{1}{\sqrt{\ln_2(\sqrt{x})}} \sum_{n \in \mathcal{S}'} \frac{(\omega(n) - \ln_2(n))^2}{\ln_2(n)}$$

On va désormais majorer ce terme. Comme $(a + b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$, on a (pour $n \in \mathcal{S}'$)

$$(\omega(n) - \ln_2(n))^2 \leq 2(\omega(n) - \ln_2(x))^2 + 2(\ln_2(x) - \ln_2(n))^2 \leq 2(\omega(n) - \ln_2(x))^2 + 2\ln(2)^2$$

On divise par $\ln_2(n)$ et on somme :

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathcal{S}'} \frac{(\omega(n) - \ln_2(n))^2}{\ln_2(n)} &\leq 2 \sum_{n \in \mathcal{S}'} \frac{(\omega(n) - \ln_2(x))^2}{\ln_2(n)} + 2\ln(2)^2 \sum_{n \in \mathcal{S}'} \frac{1}{\ln_2(n)} \\ &\leq \frac{2}{\ln_2(x)} \sum_{n \in \mathcal{S}} (\omega(n) - \ln_2(x))^2 + \frac{x \ln(2)^2}{\ln_2(\sqrt{x})} \\ &\leq \frac{2x}{\ln_2(x)} O(\ln_2(x)) + O\left(\frac{x}{\ln_2(\sqrt{x})}\right) \text{ avec 22(d)} \\ &= O(x) \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\text{Card}(\mathcal{S}') = O\left(\frac{x}{\sqrt{\ln_2(\sqrt{x})}}\right)$$

et ainsi

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \text{Card}\{n \leq x : n \in \mathcal{S}\} = 0}$$