Concours blanc 23-24 : corrigé d'après CCP PC 2016

1.a) On a immédiatement :

conclusion: $\boxed{p_{0,2}(t) = (1-t)^2 \ ,\ p_{1,2}(t) = 2t(1-t) \ ,\ p_{2,2}(t) = t^2}$

1.b) $A(t) = (1-t)\cdot(0,1) + t\cdot(1,1) = (t,1)$ on fait de même pour $B(t)$.

Enfin, $C(t) = (1-t)\cdot(t,1) + t\cdot(1,1-t) = (2t-t^2, 1-t^2)$.

conclusion: $\boxed{A(t) = (t,1) \ ,\ B(t) = (1,1-t) \text{ et } C(t) = (1-t)\cdot(t,1) + t\cdot(1,1-t) = (2t-t^2,1-t^2)}$

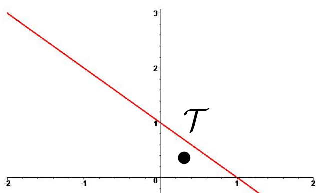
1.c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{2} p_{k,2}(t)A_k = (1-t)^2(0,1) + 2t(1-t)(1,1) + t^2(1,0) = (2t-t^2, 1-t^2) = C(t)$.

conclusion: $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{2} p_{k,2}(t)A_k = C(t)}$

1.d)

```
def p(k,n,t):
    q=1
    for i in range(k):
        q=q*t*(n-i)/(i+1)
    for i in range(n-k):
        q=q*(1-t)
    return q
```

2.)



$\forall (M(x,y), N(x',y')) \in \mathcal{T}^2$, $\forall t \in [0,1]$: $tM + (1-t)N = (x'',y'')$ avec $x'' = (1-t)x + tx'$ et $y'' = (1-t)y + ty'$.

On a donc $x'' + y'' = (1-t)x + tx' + (1-t)y + ty' = (1-t)(x+y) + t(x'+y') \geqslant (1-t)\cdot 1 + t\cdot 1 = 1$

Donc $tM + (1-t)N \in \mathcal{T}$ et $\mathcal{T}$ est un convexe de $\mathbb{R}^2$.

D'autre part $\mathcal{T} = f^{-1}([1,+\infty[) \ \cap \ [0,1]^2$, $f^{-1}([1,+\infty[)$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$ comme image réciproque du fermé de $\mathbb{R}$, $[1,+\infty[$ par la fonction f, continue (par T.G.) sur $\mathbb{R}^2$, $f : (x,y) \longmapsto x+y$. $[0,1]^2$ est un compact (produit de 2 compacts) donc fermé. Par intersection de deux fermés, on conclut : **conclusion**: $\boxed{\mathcal{T} \text{ est un convexe et un fermé de } \mathbb{R}^2}$

3.a) $\forall t \in [0,1] : 2t - t^2 + 1 - t^2 - 1 = -2t^2 + 2t = 2t(1-t) \geqslant 0$

conclusion: $\boxed{\forall t \in [0,1] : C(t) \in \mathcal{T}}$

3.b) f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et l'on a $\forall t \in [0,1]$:$f'(t) = (2-2t, -2t) = 2(1-t,-t)$.

Enfin $f'(t) = (0,0) \Longrightarrow 1 - t = t = 0$: impossible et donc $\forall t \in [0,1]$, $f'(t) \neq \overrightarrow{0}$.

conclusion: $\boxed{(1-t,-t) \text{ est un vecteur directeur de } \mathcal{D}_t \text{ à } \mathcal{C} \text{ en } C(t)}$

3.c) $\forall t \in [0,1]$, l'équation de la tangente $\mathcal{D}_t$ à $\mathcal{C}$ en $C(t)$ est : $\begin{vmatrix} x-(2t-t^2) & 1-t \\ y-(1-t^2) & -t \end{vmatrix} = 0$,

donc $\mathcal{D}_t / \ -tx+(t-1)y+t^2-t+1=0$

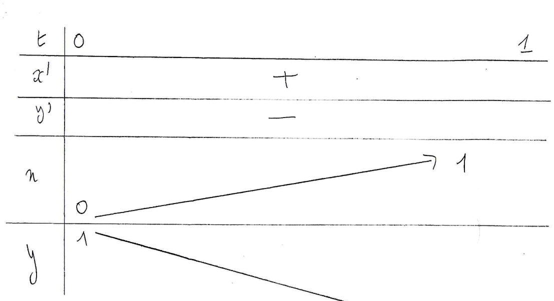
On vérifie que les coordonnées de $A(t)$ et $B(t)$ vérifient l'équation ci-dessus.

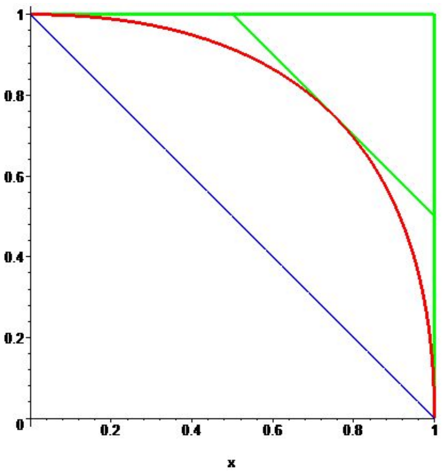
Donc $(A(t),B(t)) \in \mathcal{D}_t^2$ et comme la droite $\mathcal{D}_t$ est convexe, on conclut

conclusion: $\boxed{[A(t),B(t)] \text{ est inclus dans } \mathcal{D}_t}$

3.d) Posons $x(t)=2t-t^2$ et $y(t)=1-t^2$, on a $x'(t)=2-2t$ et $y'(t)=-2t$

d'où le tableau de variation :





La courbe rouge, c'est le support de l'arc $\mathcal{C}$, le trait bleu c'est la frontière de $\mathcal{T}$ et les 3 traits verts ce sont les 3 segments $[A(t),B(t)]$.

4.a) $\forall (P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\varphi_n(\lambda P+Q)(X) = nX(\lambda P+Q)(X)+X(1-X)(\lambda P+Q)'(X) = \lambda(nXP(X)+X(1-X)P'(X))+nXQ(X)+X(1-X)Q'(X) = \lambda\varphi_n(P)(X)+\varphi_n(Q)(X)$

De même , $B_n(\lambda P+Q)(X) = \lambda B_n(P)(X)+B_n(Q)(X)$

D'autre part $\mathrm{d}^o(B_n(P)) \leqslant n$, donc $B_n(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.

Enfin, si $P = a_nX^n+\cdots+a_0$, $\varphi_n(P)(X) = nX(a_nX^n+\cdots+a_0)+X(1-X)(na_nX^{n-1}+\cdots+a_1)$, d'où le terme en X^{n+1} s'annule et donc $\mathrm{d}^o(\varphi_n(P)(X)) \leqslant n$, donc $\varphi_n(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.

conclusion: $\boxed{\varphi_n \text{ et } B_n \text{ sont des endomorphismes de } \mathbb{R}_n[X]}$

4.b) Pour $k=0$, $\varphi_n(p_{0,n})(X) = nX(1-X)^n - X(1-X)n(1-X)^{n-1} = 0 = \underline{\mathbf{0}}p_{0,n}(X)$.

Pour $k=n$, $\varphi_n(p_{n,n})(X) = nXX^n+X(1-X)nX^{n-1} = nX^{n+1}+nX^n-nX^{n+1} = nX^n = \underline{\mathbf{n}}p_{n,n}(X)$.

Pour $k \in [\![1,n-1]\!]$,

$$\varphi_n(p_{k,n})(X) = nX\binom{n}{k}X^k(1-X)^{n-k}+X(1-X)\binom{n}{k}\Big[kX^{k-1}(1-X)^{n-k}-X^k(n-k)(1-X)^{n-k-1}\Big]$$

$$= n\binom{n}{k}X^{k+1}(1-X)^{n-k}+\binom{n}{k}\Big[kX^k(1-X)^{n-k+1}-X^{k+1}(n-k)(1-X)^{n-k}\Big]$$

$$= \binom{n}{k}X^k(1-X)^{n-k}\Big[nX+k(1-X)-(n-k)X\Big] = \underline{\mathbf{k}}\ p_{k,n}(X).$$

conclusion: $\boxed{\forall k \in [\![0,n]\!],\ \varphi_n(p_{k,n})(X) = k\ p_{k,n}}$

4.c) Par le théorème fondamental de liberté des vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes (ici $0, 1, \ldots, n$), les vecteurs $(p_{0,n}(X), \ldots p_{n,n}(X)) = \mathcal{F}$ est une famille libre. Comme cette famille a $n+1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$, on peut conclure que cette famille est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et que φ_n admet une base de vecteurs propres donc il est diagonalisable.

conclusion: $\boxed{\mathcal{F} \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[X] \text{ et } \varphi_n \text{ est diagonalisable}}$

4.d) Comme 0 est valeur propre de φ_n celui-ci n'est donc pas bijectif.

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $B_n(P)(X) = 0$, comme $(p_{0,n}(X), \ldots p_{n,n}(X))$ est libre , on doit avoir : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $P(\dfrac{k}{n}) = 0$. P devrait avoir au moins $n+1$ racines or $d^o P \leqslant n$ donc $P = 0$ et comme on est en dimension finie, B_n est un endomorphisme bijectif.

conclusion: $\boxed{\varphi_n \text{ n'est pas bijectif et } B_n \text{ est bijectif}}$

5.a) *(Question de cours)* Le tirage avec remise de r boules dans une urne qui contient une proportion de t boules blanches (succès) et de $1-t$ boules noires (échec). Si on s'intéresse à X le nombre de boules blanches obtenues, on a $X \sim \mathcal{B}(r, t)$

```
def bino(r,t):
    nb_succes=0
    for i in range(r):
        tirage=random()
        if tirage<t:
            nb_succes+=1
    return nb_succes
```

5.b) $T_r(\Omega) = [\![0, r]\!]$ et si $k \in [\![0, r]\!]$, $\dbinom{r}{k}$ est le choix des k succès dans le tirage avec remise des r boules , t^k est le produit (indépendance car on fait un tirage avec remise) des probabilités des k succès et $(1-t)^{n-k}$ est le produit (indépendance car on fait un tirage avec remise) des probabilités des $n-k$ échecs.

conclusion: $\boxed{\forall k \in [\![0, r]\!],\ \mathbf{P}\left(T_r = k\right) = p_{k,r}(t)}$

5.c) *(Question de cours)* $\boxed{\mathbf{E}(T_r) = rt}$, $\boxed{\mathbf{V}(T_r) = rt(1-t)}$, puis par linéarité de l'espérance et la formule $V(aX+b) = a^2 V(X)$, on en déduit

$\boxed{\mathbf{E}(\overline{T}_r) = t}$, $\boxed{\mathbf{V}(\overline{T}_r) = \dfrac{t(1-t)}{r}}$

Par la formule de König-Huygens, on a enfin $\mathbf{E}(X^2) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{E}(X)^2$, donc

$\boxed{\mathbf{E}(T_r^2) = rt(1-t) + (rt)^2}$ et $\boxed{\mathbf{E}(\overline{T}_r^2) = \dfrac{rt(1-t) + (rt)^2}{r^2} = \dfrac{t}{r} + \dfrac{t^2}{r}(r-1)}$,

5.d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{r} p_{k,r}(t) = \sum_{k=0}^{r} \mathbf{P}\left(T_r = k\right) = \mathbf{P}\left(\Omega\right) = 1$

$$\sum_{k=0}^{r} \frac{k}{r} p_{k,r}(t) = \sum_{k=0}^{r} \frac{k}{r} \mathbf{P}\left(T_r = k\right) \overset{\text{formule de transfert}}{=} \mathbf{E}(\overline{T}_r) = t$$

$$\sum_{k=0}^{r} \left(\frac{k}{r}\right)^2 p_{k,r}(t) = \sum_{k=0}^{r} \left(\frac{k}{r}\right)^2 \mathbf{P}\left(T_r = k\right) \overset{\text{formule de transfert}}{=} \mathbf{E}(\overline{T}_r^2) = \frac{t}{r} + \frac{t^2}{r}(r-1) = \left(1 - \frac{1}{r}\right)t^2 + \frac{1}{r}t$$

conclusion: $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{r} p_{k,r}(t) = 1 \ , \ \sum_{k=0}^{r} \frac{k}{r} p_{k,r}(t) = t \ , \ \sum_{k=0}^{r} \left(\frac{k}{r}\right)^2 p_{k,r}(t) = \left(1 - \frac{1}{r}\right)t^2 + \frac{1}{r}t}$

5.e) Dans les trois cas le membre de gauche et le membre de droite sont des polynômes en t et les égalités sont valables sur le segment $[0,1]$ qui est un ensemble **infini**.

conclusion: $\boxed{\text{Les trois égalités sont valables pour tout } t \in \mathbb{R}}$

6.) D'après le **5.e)** ,

$$B_n(1)(X) = \sum_{k=0}^{n} p_{k,n}(X) = 1 \in \mathbb{R}_2[X],$$

$$B_n(X)(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} p_{k,n}(X) = X \in \mathbb{R}_2[X],$$

$$B_n(X^2)(X) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2 p_{k,n}(t) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)X^2 + \frac{1}{n}X \in \mathbb{R}_2[X],$$

et par combinaison linéaire ($\mathbb{R}_2[X] = \text{vect}(1, X, X^2)$) on peut conclure :

conclusion: $\boxed{\mathbb{R}_2[X] \text{ est stable par } B_n}$

7.) D'après le **6.)** $A_n = M_{1,X,X^2}(\tilde{B}_n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{n} \\ 0 & 0 & 1 - \frac{1}{n} \end{pmatrix}$.

Analyse : $A_n = aI_3 + bH$, donc avec le coefficient $(2,1)$, on doit avoir $b = \frac{1}{n}$ puis avec le coefficient $(1,1)$, $a + b = 1$ soit $a = 1 - \frac{1}{n}$

Synthèse : $(1 - \frac{1}{n})I_3 + \frac{1}{n}H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{n} \\ 0 & 0 & 1 - \frac{1}{n} \end{pmatrix} = A_n$

conclusion: $\boxed{A_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{n} \\ 0 & 0 & 1 - \frac{1}{n} \end{pmatrix} = (1 - \frac{1}{n})I_3 + \frac{1}{n}H}$

8.a) Les valeurs propres de H sont sur la diagonale car H est triangulaire supérieure , donc $\chi_H(x) = (x-1)^2 x$ et comme $\text{rg}(H - I_3) = 1$, $\dim E_1 = 2$. On conclut par la 2ème caractérisation que H est diagonalisable.

conclusion: $\boxed{H \text{ est diagonalisable}}$

8.b) $\det Q = 1 \neq 0$ d'où

conclusion: $\boxed{Q \text{ est inversible}}$

8.c) Effectuons la réduction de la matrice H On a facilement $E_1 = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

Cherchons E_0 : Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tel que $HX = 0$ on a donc le système : $\begin{cases} x = 0 \\ y + z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} x = 0 \\ y = -z \\ z = z \end{cases}$ donc E_0 =vect$\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right.$

Posons donc $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, par formule de changement de base , on a conclut

conclusion: $\boxed{H = QDQ^{-1} \text{ avec } Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$

9.a) Par théorèmes généraux, on a immédiatement : **conclusion**: $\boxed{\lim_{n \to +\infty} A_n = I_3}$

9.b) On a $\psi(\lambda M + M') = \lambda\psi(M) + \psi(M')$ pour toutes matrices M et M' et tout réel λ.

conclusion: $\boxed{\psi \text{ est linéaire}}$

9.c) ψ étant linéaire en dimension finie, elle est continue sur $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, donc par critère séquentiel, on conclut

conclusion: $\boxed{\lim_{\ell \to +\infty} A_\ell = M \Longrightarrow \lim_{\ell \to +\infty} \psi(A_\ell) = \psi(M)}$

9.d) $A_n = (1 - \frac{1}{n})I_3 + \frac{1}{n}H = (1 - \frac{1}{n})QQ^{-1} + \frac{1}{n}QDQ^{-1} = Q\Big((1 - \frac{1}{n})I_3 + \frac{1}{n}D\Big)Q^{-1}$

donc $A_n = Q \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{1}{n} \end{pmatrix} Q^{-1} = QD_nQ^{-1}$

conclusion: $\boxed{A_n = QD_nQ^{-1}}$

9.e) par T.G. , $\lim_{\ell \to +\infty} D_n^\ell = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ car $0 < 1 - \frac{1}{n} < 1$ et donc $\lim_{\ell \to +\infty} (1 - \frac{1}{n})^\ell = 0$.

Avec le **9.d)** on a donc $\lim_{\ell \to +\infty} A_n^\ell = Q \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1}$

Calcul de Q^{-1} : Si on voit Q comme la matrice canoniquement associée à un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ et si l'on note $(e_1, e_2, e3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ comme on a $f(e_1) = e_1$ et $f(e_2) = e_2$, on alors $f^{-1}(e_1) = e_1$ et $f^{-1}(e_2) = e_2$ et comme $f(e_3) = ae_1 + be_2 + e_3 = -e_2 + e_3$, en composant par

f^{-1}, on a $e_3 = -e_2 + f^{-1}(e_3)$ d'où $f^{-1}(e_3) = e_2 + e_3$. On en déduit que $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On effectue le produit $Q \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1}$ et on conclut que

conclusion: $\boxed{\lim_{\ell \to +\infty} A_n^\ell = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$

9.f) par T.G. , $\lim_{n \to +\infty} D_n^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{e} \end{pmatrix}$ car $\ln(1 - \frac{1}{n})^n = n \ln(1 - \frac{1}{n}) \sim n(-\frac{1}{n}) \sim -1$, donc $\lim_{n \to +\infty} \ln(1 - \frac{1}{n})^n = -1$ et par critère séquentiel $\lim_{n \to +\infty} (1 - \frac{1}{n})^n = \frac{1}{e}$

Avec le **9.e)** on a donc $\lim_{n \to +\infty} A_n^n = Q \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{e} \end{pmatrix} Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 - \frac{1}{e} \\ 0 & 0 & \frac{1}{e} \end{pmatrix}$

conclusion: $\boxed{\lim_{n \to +\infty} A_n^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 - \frac{1}{e} \\ 0 & 0 & \frac{1}{e} \end{pmatrix}}$

10.a) Le cours et la formule de König-Huygens assure que si Y admet une variance finie, on a $\mathbf{V}(Y) = \mathbf{E}((Y - \mathbf{E}(Y))^2)) \geqslant 0$ et donc $\mathbf{V}(Y) = \mathbf{E}(Y^2) - \mathbf{E}(Y)^2 \geqslant 0$. On en déduit que $\mathbf{E}(Y)^2 \leqslant \mathbf{E}(Y^2)$ d'où $\mathbf{E}(Y) \leqslant |\mathbf{E}(Y)| \leqslant \sqrt{\mathbf{E}(Y^2)}$

conclusion: $\boxed{\mathbf{E}(Y) \leqslant \sqrt{\mathbf{E}(Y^2)}}$

10.b) Par la formule de transfert et le **5.d)** ,

$\mathbf{E}((t - \overline{T}_n)^2) = \sum_{k=0}^{n} (t - k/n)^2 p_{k,n}(t) = t^2 - 2t \cdot t + (1 - \frac{1}{n})t^2 + \frac{1}{n}t = \frac{t(1-t)}{n}$

Avec le **10.a)** , $\mathbf{E}(|t - \overline{T}_n|) \leqslant \sqrt{\mathbf{E}(|t - \overline{T}_n|^2)} \leqslant \sqrt{\frac{t(1-t)}{n}}$

conclusion: $\boxed{\mathbf{E}(|t - \overline{T}_n|) \leqslant \sqrt{\frac{t(1-t)}{n}}}$

11.a) $\forall (a, b) \in [0, 1]^2 : |f(a) - f(b)| = |(a - b) f'(c)| \leqslant M_f |a - b|$, par la formule des accroissements finis avec $M_f = \sup_{t \in [0,1]} |f'(t)|$ (qui existe car f étant de classe C^1, f' est continue sur le segment $[0, 1]$).

conclusion: $\boxed{\forall (a, b) \in [0, 1]^2 : |f(a) - f(b)| \leqslant M_f |a - b|}$

11.b) Par la formule de transfert, Par la formule de transfert et le **5.d)** ,

$\mathbf{E}((f(t)-f(\overline{T}_n)) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(f(t)-f(k/n))p_{k,n}(t)$, donc avec les deux questions précédentes,

$\mathbf{E}((f(t)-f(\overline{T}_n)) \leqslant \mathbf{E}(|f(t)-f(\overline{T}_n)|) \leqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{n}|f(t)-f(k/n)|p_{k,n}(t) \leqslant \sum_{k=0}^{n} M_f|t-k/n|p_{k,n}(t)$

$\leqslant M_f\sqrt{\dfrac{t(1-t)}{n}}$

<u>**conclusion**</u>: $\boxed{\mathbf{E}(|f(t)-f(\overline{T}_n)|) \leqslant M_f\sqrt{\dfrac{t(1-t)}{n}}}$

11.c) Posons $\varphi(t) = t(1-t)$, φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\varphi'(t) = 1-2t$, donc φ est croissante sur $[0,\frac{1}{2}]$ et décroissante sur $[\frac{1}{2},1]$. On en déduit que $\forall t \in [0,1] : 0 \leqslant \varphi(t) \leqslant \varphi(\frac{1}{2}) = \dfrac{1}{4}$

Comme $\mathbf{E}((f(t)-f(\overline{T}_n)) = f(t) - B_n(f)(t)$, on peut conclure :

<u>**conclusion**</u>: $\boxed{\forall t \in [0,1] : |f(t) - B_n(f)(t)| \leqslant \dfrac{M_f}{2\sqrt{n}}}$

11.d) On déduit de la question précédente que $0 \leqslant \|f - B_n(f)\|_{\infty,[0,1]} \leqslant \dfrac{M_f}{2\sqrt{n}}$ et comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{M_f}{2\sqrt{n}} = 0$, on peut conclure :

<u>**conclusion**</u>: $\boxed{(B_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge uniformément vers } f \text{ sur } [0,1]}$

12.) Comme $(B_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$ et que $B_n(f)$ est continue sur $[0,1]$, par théorème d'intégration, on peut conclure :

<u>**conclusion**</u>: $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 B_n(f)(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x}$

13.a) On effectue une I.P.P. avec $u = x^a$ et $v' = (1-x)^b$ d'où

<u>**conclusion**</u>: $\boxed{\displaystyle\int_0^1 x^a(1-x)^b\,\mathrm{d}x = \frac{a}{b+1}\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b+1}\,\mathrm{d}x}$

13.b) Posons $J_k = \displaystyle\int_0^1 p_{k,n}(x)\,\mathrm{d}x$. Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, avec la question précédente, on a

$J_k = \dbinom{n}{k}\dfrac{n}{n-k+1}\displaystyle\int_0^1 x^{k-1}(1-x)^{n-k+1}\,\mathrm{d}x = \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}\int_0^1 x^{k-1}(1-x)^{n-k+1}\,\mathrm{d}x$

$= \dbinom{n}{k-1}\dfrac{n}{n-k+1}\displaystyle\int_0^1 x^{k-1}(1-x)^{n-k+1}\,\mathrm{d}x = J_{k-1}.$

On en déduit que $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $J_k = J_0 = \displaystyle\int_0^1 (1-x)^n\,\mathrm{d}x = \Big[-\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}\Big]_0^1 = \frac{1}{n+1}$

<u>**conclusion**</u>: $\boxed{\displaystyle\int_0^1 p_{k,n}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}}$

13.c) On a $S_n(f) = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n}) = \int_0^1 p_{k,n}(x)\,\mathrm{d}x\sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n}) = \int_0^1\sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n})p_{k,n}(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 B_n(f)(x)\,\mathrm{d}x$. On peut conclure avec le **12.)**

<u>**conclusion**</u>: $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n(f) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x}$

14.) Soit f continue sur $[0,1]$. L'idée est d'approximer uniformément f par une fonction de classe

C^1, justement avec les polynômes de Bernstein.

Soit $\varepsilon > 0$ il existe g de classe C^1 sur sur $[0,1]$ tel que $\|f-g\|_{\infty,[0,1]} \leqslant \varepsilon/3$ (il suffit de prendre un $B_n(f)$ pour n assez grand). pour tout entier n, on a :

$$\left|S_n(f) - \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \left|S_n(f) - S_n(g)\right| + \left|S_n(g) - \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right|$$

Comme $\|f-g\|_{\infty,[0,1]} \leqslant \varepsilon/3$, $\left|S_n(f) - S_n(g)\right| \leqslant \dfrac{1}{n+1}(n+1)\|f-g\|_{\infty,[0,1]} \leqslant \varepsilon/3$ et de même $\left|\displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \varepsilon/3$.

On a donc pour tout entier n : $\left|S_n(f) - \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant 2\varepsilon/3 + \left|S_n(g) - \displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x\right|$.

Avec le **13.c)** il existe $N_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \geqslant N_0$: $\left|S_n(g) - \displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \varepsilon/3$

On en déduit que $\forall n \geqslant N_0$: $\left|S_n(f) - \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant 3\varepsilon/3 \leqslant \varepsilon$

conclusion: $\boxed{\text{Pour toute fonction continue sur } [0,1],\ \lim_{n\to+\infty} S_n(f) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x}$

15.a) Posons $f : u \longmapsto \dfrac{u^a(1+xu)^b}{(1+u)^c}$ et $I = [0,+\infty[$. Par T.G. , f est continue sur I (les puissances sont entières et $1+u$ ne s'annule pas sur I).

En $+\infty$:

$*$ Si $x = 0$ alors $f(u) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{u^{c-a}}$

Or $c - a \geqslant b + 2 \geqslant 2$ donc $u \longmapsto \dfrac{1}{u^{c-a}}$ est intégrable sur $[1,\infty[$ et par T.C. f est intégrable sur $[0,\infty[$ et l'intégrale de f converge.

$*$ Si $x \neq 0$ alors $f(u) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{x^b}{u^{c-a-b}}$

Or $c - a - b \geqslant 2$ donc $u \longmapsto \dfrac{1}{u^{c-a-b}}$ est intégrable sur $[1,\infty[$ et par T.C. f est intégrable sur $[0,\infty[$ et l'intégrale de f converge.

conclusion: $\boxed{\forall x \in [0,1] \text{ , l'intégrale } \int_0^{+\infty} \frac{u^a(1+xu)^b}{(1+u)^c}\,\mathrm{d}u \text{ converge}}$

15.b) Posons $f : (x,u) \longmapsto \dfrac{u^a(1+xu)^b}{(1+u)^c}$, $I = [0,+\infty[$ et $A = [0,1]$.

Montrons que f vérifie les hypothèses de dérivation des intégrales sous le signe somme.

$*$ Par T.G. , pour tout $u \in I$, $f(\bullet,u)$ est de classe C^1 sur A , donc $f(\bullet,u)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(\bullet,u)$ sont continues sur A et pour tout $x \in A$: $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,u) = ub\dfrac{u^a(1+xu)^{b-1}}{(1+u)^c}$.

$*$ Par T.G. , pour tout $x \in A$, $f(x,\bullet)$ est continue et intégrable (question précédente) sur I et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,\bullet)$ est continue sur I.

$*$ $\forall x \in A$ et $\forall u \in I$: $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,u)\right| = \left|ub\dfrac{u^a(1+xu)^{b-1}}{(1+u)^c}\right| \leqslant \left|u \cdot b\dfrac{u^a(1+u)^{b-1}}{(1+u)^c}\right| = \varphi(u)$.

φ est continue et intégrable pour les même raisons qu'au **15.a)** : $\varphi(u) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{b}{u^{c-a-b}}$ et $c-a-b \geqslant 2$...

On peut donc conclure :

conclusion: $\boxed{F \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } [0,1]}$

15.c) Par T.G. h est de classe C^1 sur $[0,1[$, pour tout $t \in [0,1[$: $h'(t) = \dfrac{1}{(1-t)^2} > 0$. Donc h est continue strictement croissante de $[0,1[$ vers $h([0,1[) = [h(0), \lim\limits_{t \to 1^-} h(t)[= [0,+\infty[$.

On conclut par le théorème de la bijection :

conclusion: $\boxed{h \text{ est strictement croissante et bijective de } [0,1[\text{ sur } [0,+\infty[}$

15.d) Le C.D.V. est donc bien C^1 , bijectif et d'où

$$* \ F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{u^a}{(1+u)^c}\,\mathrm{d}u = \int_0^1 \frac{(\frac{t}{1-t})^a}{(1+\frac{t}{1-t})^c}\frac{1}{(1-t)^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t^a(1-t)^{c-a-2}\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{a}{c-a-1}\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}\,\mathrm{d}t = \frac{a}{c-a-1} \times \frac{a-1}{c-a} \times \cdots \times \frac{1}{c-2} \times \int_0^1 t^{a-a}(1-t)^{c-a+a-2}\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{a}{c-a-1} \times \frac{a-1}{c-a} \times \cdots \times \frac{1}{c-2} \times \frac{1}{c-1}$$
$$= \frac{a!(c-a-2)!}{(c-1)!}$$

$* \ F(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^a}{(1+u)^{c-b}}\,\mathrm{d}u$ et donc on obtient $F(1)$ en remplaçant c par $c-b$ dans le calcul de $F(0)$.

conclusion: $\boxed{F(0) = \dfrac{a!(c-a-2)!}{(c-1)!} \quad \text{et} \quad F(1) = \dfrac{a!(c-b-a-2)!}{(c-b-1)!}}$

16.) $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{n(n)\cdots(n)}{k!} \underset{+\infty}{\sim} \underline{\dfrac{n^k}{k!}}$ (car le nombre de termes k est indépendant de n (la variable)).

Soit $t \in]0,1[$ et $k \in \mathbb{N}^*$ fixés. Pour tout entier $n \geqslant k$,

$$f_n(t) = \binom{n}{k} t^k(1-t)^{n-k} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}t^k(1-t)^{n-k} \underset{+\infty}{\sim} \frac{t^k}{(1-t)^k k!}[n^k(1-t)^n]$$

conclusion: $\boxed{\text{Pour tout } t \in]0,1[\text{ , } f_n(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{t^k}{(1-t)^k k!}[n^k(1-t)^n]}$

17.) $*$ Soit $t \in]0,1[$ et $k \in \mathbb{N}^*$ fixés. Comme $f_n(t) = O(n^k q^n)$ avec $q = 1-t \in]0,1[$, par croissances comparées $f_n(t) = O(\dfrac{1}{n^2})$ avec $\dfrac{1}{n^2} \geqslant 0$ et $\left(\sum \dfrac{1}{n^2}\right)$ converge. Donc par T.C. $\left(\sum f_n(t)\right)$ converge.

$*$ Si $t = 0$, pour tout entier $n \geqslant k$, $f_n(t) = 0$, donc $\left(\sum f_n(0)\right)$ converge.

$*$ Si $t = 1$, pour tout entier $n \neq k$, $f_n(t) = 0$, donc $\left(\sum f_n(1)\right)$ converge.

conclusion: $\boxed{\left(\sum f_n\right) \text{ converge simplement sur } [0,1]}$

18.) $*$ Si $t = 0$, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $f_n(t) = 0$, donc $S(0) = 0$.

$*$ Si $t = 1$, pour tout entier $n \neq k$, $f_n(t) = 0$ et $f_k(1) = 1$, donc $S(1) = 1$.

conclusion: $\boxed{S(0) = 0 \text{ et } S(1) = 1}$

19.a) **conclusion**: $\boxed{\forall u \in]-1,1[\text{ : } \dfrac{1}{1-u} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u^n \text{ (et le rayon de convergence est 1)}}$

19.b) Le théorème de dérivation des séries entières permet de dériver termes à termes la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} u^n$ de rayon de convergence 1 sur l'intervalle ouvert $]-1,1[$.

Comme on a pour tout entier k, $\forall u \in]-1,1[$: $\left(\dfrac{1}{1-u}\right)^{(k)} = \dfrac{k!}{(1-u)^{k+1}}$ (se démontre par récurrence immédiate)

On en déduit que $\forall u \in]-1,1[$: $\left(\dfrac{1}{1-u}\right)^{(k)} = \dfrac{k!}{(1-u)^{k+1}} = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)u^{n-k}$

conclusion: $\boxed{\forall u \in [0,1[\quad : \quad \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)u^{n-k} = \dfrac{k!}{(1-u)^{k+1}}}$

19.c) On a déjà vu que $S(1) = 1 = \dfrac{1}{1}$.

$\forall t \in]0,1[\quad : \quad S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) = \sum_{n=k}^{+\infty} \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} t^k(1-t)^{n-k} = \dfrac{t^k}{k!}\dfrac{k!}{(1-(1-t))^{k+1}} = \dfrac{1}{t}$

conclusion: $\boxed{\forall t \in]0,1] \quad : \quad S(t) = \dfrac{1}{t}}$

19.d) Si la série $\left(\sum f_n\right)$ convergeait normalement sur $[0,1]$, alors on pourrait utiliser le théorème de la double limite : $\lim_{t\to 0^+} S(t) = \lim_{t\to 0^+} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{t\to 0^+} f_n(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} 0 = 0$.

Or $\lim_{t\to 0^+} S(t) = \lim_{t\to 0^+} \dfrac{1}{t} = +\infty$: absurde !

conclusion: $\boxed{\text{la série } \left(\sum f_n\right) \text{ ne converge pas normalement (ni uniformément) sur } [0,1]}$

19.e) Posons $g(t) = t^k(1-t)^{n-k}$, g est de classe C^1 sur $[0,1]$.

$\forall t \in [0,1]$, $g'(t) = t^{k-1}(1-t)^{n-k-1}(k(1-t)-(n-k)t)$, qui s'annule en $t=0$, $t=1$ et $t = \dfrac{k}{n} \in [0,1]$ car $n \geqslant k$ on en déduit que g est croissante sur $[0,\dfrac{k}{n}]$ et décroissante sur $[\dfrac{k}{n},1]$. On a donc $\|g\|_{\infty,[0,1]} = g(\dfrac{k}{n}) = \dbinom{n}{k}(\dfrac{k}{n})^k(1-\dfrac{k}{n})^{n-k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^k}{k!}\dfrac{k^k}{n^k}(1-\dfrac{k}{n})^n(1-\dfrac{k}{n})^{-k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{k^k e^{-k}}{k!}$.

On peut donc conclure :

conclusion: $\boxed{\text{Pour } n < k : \|f_n\|_{\infty,[0,1]} = 0 \text{ et pour } n \geqslant k : \|f_n\|_{\infty,[0,1]} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{k^k e^{-k}}{k!}}$

On en déduit que la série $\left(\sum \|f_n\|_{\infty,[0,1]}\right)$ diverge grossièrement et donc que la série $\left(\sum f_n\right)$ ne converge pas normalement sur $[0,1]$.

19.f) Avec Stirling, on conclut :

conclusion: $\boxed{\|f_n\|_{\infty,[0,1]} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi k}}}$