

CORRIGE DU CONCOURS BLANC 25-26

E3A 2020 - MP d'après le corrigé de François Calio(MP), UPS

Exercice 1

1. On considère la famille $(p_k)_{k \in \mathbb{N}} = (pq^k)_{k \in \mathbb{N}}$. C'est une famille de réels positifs sommable de somme 1 (on reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique de raison $q \in]0, 1[$).
Ainsi elle définit une loi de probabilité dont elle est la famille des probabilités élémentaires.
2. On pose $X' = X + 1$. On a X' variable aléatoire, $X'(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*, (X' = k) = (X = k - 1)$ donc $\mathbb{P}(X' = k) = pq^{k-1}$: X' suit donc une loi géométrique de paramètre p . Ainsi X' possède une espérance et donc, par linéarité de l'espérance, X possède une espérance et $\mathbb{E}(X') = \mathbb{E}(X) - 1 = \frac{1}{p} - 1$ i.e. $\mathbb{E}(X) = \frac{q}{p}$.
3. La famille $((X = k))_{k \in \mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements, donc $(X = Y) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} ((X = k) \cap (Y = X))$.

Ainsi par σ -additivité, $\sum_k \mathbb{P}((X = k) \cap (Y = k))$ converge et $\mathbb{P}(X = Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}((X = k) \cap (Y = k))$. Or X et Y sont indépendantes donc $\mathbb{P}((X = k) \cap (Y = k)) = \mathbb{P}(X = k) \times \mathbb{P}(Y = k) = p^2 q^{2k}$.

Ainsi $\mathbb{P}(X = Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} p^2 (q^2)^k = p^2 \frac{1}{1 - q^2} = \frac{p(1 - q)}{(1 + q)(1 - q)}$ donc $\mathbb{P}(X = Y) = \frac{p}{1 + q}$.

La famille $((X = Y), (X < Y), (X > Y))$ forme un système complet d'événements.

Or par symétrie, $\mathbb{P}(X < Y) = \mathbb{P}(X > Y)$. Ainsi, $\mathbb{P}(X < Y) = \frac{1}{2} (1 - \mathbb{P}(X = Y))$, i.e. $\mathbb{P}(X < Y) = \frac{q}{1 + q}$.

On pouvait aussi calculer la probabilité : $\mathbb{P}(Y > k) = \sum_{j=k+1}^{+\infty} pq^j = q^{k+1}$ pour en déduire la probabilité $\mathbb{P}(X < Y)$ via la formule

$$\mathbb{P}(X < Y) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) \mathbb{P}(Y > k) \dots$$

4. $S = X + Y$ avec X et Y à valeurs dans $\mathbb{N}$, donc S est à valeurs dans $\mathbb{N}$.

De plus, pour $k \in \mathbb{N}$, $(S = k) = \bigcup_{j=0}^k ((X = j) \cap (Y = k - j))$ union disjointe.

Donc $\mathbb{P}(S = k) = \sum_{j=0}^k \mathbb{P}((X = j) \cap (Y = k - j))$. Or X et Y sont indépendantes, donc :

$$\mathbb{P}(S = k) = \sum_{j=0}^k \mathbb{P}(X = j) \mathbb{P}(Y = k - j) = \sum_{j=0}^k pq^j pq^{k-j} = (k + 1) p^2 q^k.$$

Ainsi $S(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(S = k) = (k + 1) p^2 q^k$

Exercice 2

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = P_n(x) > 0$ comme produit de réels strictement positifs.

Or : si $n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = u_n \times \text{ch}\left(\frac{x}{n+1}\right)$ avec $u_n > 0$ et $\text{ch}\left(\frac{x}{n+1}\right) \geq 1$. Donc $u_{n+1} \geq u_n$: la suite

$(P_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

2. En reprenant les mêmes notations, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geq 1 > 0$. On peut donc poser $v_n = \ln(u_n)$ et on a :

$$v_n = \sum_{k=1}^n \ln\left(\operatorname{ch} \frac{x}{k}\right).$$

Or, lorsque k tend vers l'infini, on a : $\ln\left(\operatorname{ch} \frac{x}{k}\right) = \ln\left(1 + \frac{x^2}{2k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right)\right) = \frac{x^2}{2k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right)$ somme de deux termes généraux de séries absolument convergentes. Ainsi la série $\sum_k \ln\left(\operatorname{ch} \frac{x}{k}\right)$ converge et donc la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge i.e. la suite $(\ln(P_n(x)))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge. Soit $S(x)$ sa limite. Par continuité de la fonction exponentielle, comme $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \exp(v_n)$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $\exp(S(x))$ i.e. $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, (P_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ converge}}$. En notant $\varphi(x)$ sa limite, on a φ définie sur $J = \mathbb{R}$ et de plus, φ strictement positive sur $\mathbb{R}$.

3. .

3.1. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction P_n est paire, par conservation de la parité par passage à la limite simple, $\boxed{\varphi \text{ est paire}}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction P_n est croissante sur $\mathbb{R}^+$ (car produit de fonctions positives et croissantes), par conservation de la monotonie par passage à la limite simple, $\boxed{\varphi \text{ est croissante sur } \mathbb{R}^+}$.

Par parité, on a alors $\boxed{\varphi \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}^-}$

3.2. Par parité, pour montrer la continuité de φ sur $\mathbb{R}$, il suffit de montrer la continuité de φ sur tout segment de la forme $[0, a]$ avec $a > 0$.

Soit $a > 0$. On considère la suite de fonctions $(h_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies sur $[0, a]$ par : $h_n(x) = \ln\left(\operatorname{ch} \frac{x}{n}\right)$. On a $\|h_n\|_{\infty}^{[0, a]} = \ln\left(\operatorname{ch} \frac{a}{n}\right)$ où la notation $\|f\|_{\infty}^{[0, a]}$ désigne la borne supérieure de $|f(x)|$ lorsque x décrit $[0, a]$ et qui existe pour h_n par continuité de h_n sur le segment $[0, a]$.

Or la série $\sum \ln\left(\operatorname{ch} \frac{a}{n}\right)$ est convergente (et de somme $S(a)$ avec les notations de la question 2)).

Ainsi la série de fonction $\sum h_n$ converge normalement sur le segment $[0, a]$ donc elle converge uniformément sur $[0, a]$. Comme pour tout n , h_n est continue sur $[0, a]$, on en déduit que la somme uniforme S est aussi continue sur $[0, a]$. Enfin, par composition, comme $\varphi = \exp \circ S$, φ est continue sur $[0, a]$. Ceci étant vrai pour tout $a > 0$ et φ est paire, donc $\boxed{\varphi \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$

4. .

4.1. Soit f la fonction $f = \frac{1}{\operatorname{ch}}$. f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$ comme inverse d'une fonction continue et strictement positive sur $\mathbb{R}$. De plus, f est positive et paire. Pour montrer l'intégrabilité de f sur $\mathbb{R}$, il suffit donc de la majorer sur $\mathbb{R}^+$ par une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Or, $\forall x \in \mathbb{R}^+, 0 < f(x) \leq 2e^{-x}$ car $\forall x \in \mathbb{R}^+, \operatorname{ch}(x) \geq \frac{1}{2}e^x$, et la fonction $x \rightarrow 2e^{-x}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Ainsi f intégrable sur $\mathbb{R}^+$, et par

parité sur $\mathbb{R}$ tout entier. Ainsi $\boxed{\frac{1}{\operatorname{ch}} \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}}$.

f est continue sur $\mathbb{R}$ et la fonction $\theta : u \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \ln(u) \in \mathbb{R}$ est une bijection strictement croissante de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$. Donc $\int_{\mathbb{R}} f$ et $\int_{\mathbb{R}_+^*} \theta' \times f \circ \theta$ sont de même nature et égales en cas de convergence. Or on

vient d'établir que $\int_{\mathbb{R}} f$ est une intégrale convergente, et on a donc l'autre aussi et : $\int_{\mathbb{R}} f = \int_0^{+\infty} \frac{2}{u^2 + 1} du$.

Ainsi $\boxed{\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\operatorname{ch}} = \pi}$

4.2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $(P_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ croissante et $\forall n \in \mathbb{N}^*, P_n(x) \geq P_1(x) = \operatorname{ch}(x) > 0$.

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}, 0 < \frac{1}{\varphi(x)} \leq \frac{1}{\operatorname{ch} x}$. Or on vient de voir que $\frac{1}{\operatorname{ch}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, donc, comme $\frac{1}{\varphi}$ est

continue positive, $\boxed{\frac{1}{\varphi} \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}}$

Exercice 3

Questions de cours

1. Avec $a \neq 0$. Si s_1 et s_2 sont les racines de $aX^2 + bX + c$, on a : $aX^2 + bX + c = a(X - s_1)(X - s_2)$ donc

$$\sigma_1 = s_1 + s_2 = -\frac{b}{a} \text{ et } \sigma_2 = s_1 s_2 = \frac{c}{a}$$

2. On note $\mathcal{C}$ l'équation caractéristique

- Si r_1 et r_2 sont deux solutions réelles distinctes de $\mathcal{C}$. Alors $\boxed{\exists(A, B) \in \mathbb{R}^2 \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_n = Ar_1^n + Br_2^n}$
- Si r est solutions double de $\mathcal{C}$. Alors $\boxed{\exists(A, B) \in \mathbb{R}^2 \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_n = (An + B)r^n}$
- Si $\mathcal{C}$ possède deux racines r_1 et r_2 non réelles conjuguées. On note ces racines $re^{i\theta}$ et $re^{-i\theta}$ avec $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in]0, \pi[$. Alors $\boxed{\exists(A, B) \in \mathbb{R}^2 \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_n = (A \cos(n\theta) + B \sin(n\theta))r^n}$

1. La suite $\left(\frac{1}{\text{ch } n}\right)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une suite de réels indexée par $\mathbb{Z}$ telle que les sous-suites $\left(\frac{1}{\text{ch } n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\left(\frac{1}{\text{ch } (-n)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent. Par ailleurs ce n'est pas une suite constante. On a bien trouvé une suite non constante élément de $\mathcal{C}$

2. • $\mathcal{C}$ est une partie non vide de E (contient la suite précédente).
- Soit $(x, x') \in \mathcal{C}^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. On pose $y = \alpha x + \beta x'$ et on note x_n, x'_n, y_n les termes généraux des suites x, x', y' .
- On a : $\forall n \in \mathbb{Z}, y_n = \alpha x_n + \beta x'_n$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, y_n = \alpha x_n + \beta x'_n$ et $\forall n \in \mathbb{N}, y_{-n} = \alpha x_{-n} + \beta x'_{-n}$.
- Comme les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent, il en est de même pour $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- Comme les suites $(x_{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(x'_{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent, il en est de même pour $(y_{-n})_{n \in \mathbb{N}}$.
- Ainsi $y \in \mathcal{C}$. Et donc $\mathcal{C}$ est stable par combinaison linéaire.

Donc par caractérisation des sous-espaces vectoriels, $\boxed{\mathcal{C} \text{ est un sous-espace de } E}$

3. Soit $x = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{C}$.

La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge donc est bornée : il existe $A > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, |x_n| \leq A$.

De même, la suite $(x_{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge donc est bornée : il existe $B > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, |x_{-n}| \leq B$.

On pose alors $C = \max(A, B)$, et on a : $\forall n \in \mathbb{Z}, |x_n| \leq C$: la suite x est bornée.

Ainsi $\boxed{\text{toute suite dans } \mathcal{C} \text{ est bornée}}$

4. Soit $x = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{C}$. Soit $y = T(x) = (y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$. On a : $\forall n \in \mathbb{Z}, y_n = x_{n-1} + x_{n+1}$. Ainsi :

- $\forall n \in \mathbb{N}^*, y_n = x_{n-1} + x_{n+1}$ donc la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est la somme des suites $(x_{n-1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(x_{n+1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ qui sont extraites de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ donc qui convergent. Ainsi $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et donc, comme la convergence d'une suite ne dépend pas des premiers termes, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
- De même $(y_{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge

Ainsi $y \in \mathcal{C}$.

On en déduit que T est une application de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}$.

Montrons la linéarité. Soit $(x, x') \in \mathcal{C}^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. On pose $y = T(x)$, $y' = T(x')$, $z = \alpha x + \beta x'$, et $w = T(z)$ et $v = \alpha y + \beta y'$. On doit établir : $T(\alpha x + \beta x') = \alpha T(x) + \beta T(x')$ i.e. $v = w$. On note $x_n, x'_n, y_n, y'_n, z_n, w_n, v_n$ les termes généraux des suites x, x', y, y', z, w, v . On a, pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$v_n = \alpha y_n + \beta y'_n = \alpha(x_{n-1} + x_{n+1}) + \beta(x'_{n-1} + x'_{n+1}) = (\alpha x_{n-1} + \beta x'_{n-1}) + (\alpha x_{n+1} + \beta x'_{n+1})$. Or dans ces derniers termes on reconnaît $z_{n-1} + z_{n+1} = w_n$. Donc $v = w$.

Ainsi T est bien une application linéaire de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}$ i.e. $\boxed{T \text{ est un endomorphisme de } \mathcal{C}}$

5. • Méthode 1. On a clairement $S \circ S = \text{id}_E = \text{id}_{\mathcal{C}}$. Donc comme l'énoncé nous dit que S est un endomorphisme de $\mathcal{C}$, on en déduit que S est une symétrie de $\mathcal{C}$ et donc son axe, $\ker(S - \text{id}_{\mathcal{C}})$, et sa direction, $\ker(S + \text{id}_{\mathcal{C}})$, sont supplémentaires dans $\mathcal{C}$.

Or on a tout aussi clairement $F = \{x \in \mathcal{C}; \forall n \in \mathbb{Z}, x_n = x_{-n}\} = \{x \in \mathcal{C}; S(x) = x\} = \ker(S - \text{id}_{\mathcal{C}})$ et $G = \ker(S + \text{id}_{\mathcal{C}})$, donc $\boxed{F \text{ et } G \text{ sont deux sous-espaces supplémentaires dans } \mathcal{C}}$

- Méthode 2. On a $F = \ker(S - \text{id}_{\mathcal{C}})$ et $G = \ker(S + \text{id}_{\mathcal{C}})$ donc ce sont des sous-espaces de $\mathcal{C}$, propres pour l'endomorphisme S , associés à des valeurs propres différentes : 1 et -1 . Donc F et G sont en somme directe i.e. $F + G = F \oplus G$.

De plus, si $x \in \mathcal{C}$, $x' = \frac{1}{2}(x + S(x))$ et $x'' = \frac{1}{2}(x - S(x))$, on montre aisément $x = x' + x''$, $x' \in F$ et $x'' \in G$, donc tout élément de S s'écrit comme somme d'un élément de F et d'un élément de G . Donc comme ce sont des sous-espaces de $\mathcal{C}$, on a $\mathcal{C} = F + G$.

Ainsi par caractérisation des sous-espaces supplémentaires, $\boxed{F \text{ et } G \text{ sont supplémentaires dans } \mathcal{C}}$

6. En reprenant ce qui a été fait dans la méthode 1 dans la question précédente, on a :

$\boxed{S \text{ symétrie d'axe } F \text{ et de direction } G}$

7. .

- 7.1. Si $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{2, -2\}$. Soit $x \in \ker(T - \lambda \text{id}_{\mathcal{C}})$. On a : $\forall n \in \mathbb{Z}, x_{n-1} + x_{n+1} = \lambda x_n$. En particulier :

$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+2} - \lambda x_{n+1} + x_n = 0$ et, en posant $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}} = (x_{-n})_{n \in \mathbb{N}}$, $\forall n \in \mathbb{N}, x'_{n+2} - \lambda x'_{n+1} + x'_n = 0$. On considère donc l'équation caractéristique $\mathcal{C}$ de ces suites récurrentes linéaires doubles : $X^2 - \lambda X + 1 = 0$ dont le discriminant est $\Delta = \lambda^2 - 4$ donc est non nul car λ est différent de 2 et de -2

- Si $\Delta > 0$. Alors les racines de $\mathcal{C}$ sont réelles, distinctes et de produit 1. Donc l'une d'entre elles est de module strictement supérieur à 1 et l'autre est son inverse. On note r la racine de module strictement supérieur à 1.

D'après l'expression des suites récurrentes linéaires doubles, On a l'existence de 4 réels A, B, C, D tels que : $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = Ar^n + \frac{B}{r^n}$ et $x'_n = Cr^n + \frac{D}{r^n}$. Or les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent donc $A = 0 = C$. De plus $x_0 = x'_0$ donc $B = D$. Enfin $x'_1 + x_1 = \lambda x_0$ donc $(\lambda - 2r)B = 0$. Or les racines de $\mathcal{C}$ sont $\frac{\lambda \pm \sqrt{\Delta}}{2}$ donc $|\lambda - 2r| = \sqrt{\Delta} \neq 0$. Ainsi $B = D = 0$ et donc x est la suite nulle. Donc $\ker(T - \lambda \text{id}_{\mathcal{C}}) \subset \{0_{\mathcal{C}}\}$

S'agissant d'un sous-espace, on en déduit que $\ker(T - \lambda \text{id}_{\mathcal{C}}) = \{0_{\mathcal{C}}\}$

- Si $\Delta < 0$. Alors les racines de $\mathcal{C}$ sont complexes non réelles et conjuguées distinctes et de produit 1. Donc elles sont de module 1 et on peut les écrire sous la forme $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$ avec $\theta \in]0, 2\pi[$.

D'après l'expression des suites récurrentes linéaires doubles réelles, On a l'existence de 4 réels A, B, α, β tels que : $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = A(\cos(n\theta + \alpha))$ et $x'_n = B(\cos(n\theta + \beta))$. Or les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent alors que les suites $(\cos(n\theta + \alpha))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\cos(n\theta + \beta))_{n \in \mathbb{N}}$ divergent¹ car θ n'est pas un multiple de 2π donc $A = 0 = B$. Donc x est la suite nulle. Donc $\ker(T - \lambda \text{id}_{\mathcal{C}}) \subset \{0_{\mathcal{C}}\}$

S'agissant d'un sous-espace, on en déduit que $\ker(T - \lambda \text{id}_{\mathcal{C}}) = \{0_{\mathcal{C}}\}$

Ainsi si $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{2, -2\}$, $\boxed{\ker(T - \lambda \text{id}_{\mathcal{C}}) = \{0_{\mathcal{C}}\}}$

- 7.2. On applique le résultat précédent avec $\lambda = 0$. On a $\ker(T) = \{0_{\mathcal{C}}\}$, donc par caractérisation de l'injectivité des applications linéaires, $\boxed{T \text{ est injectif}}$

- 7.3. • Si $\lambda = 2$. Soit $x \in \ker(T - 2\text{id}_{\mathcal{C}})$. On a : $\forall n \in \mathbb{Z}, x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 0$. Donc en généralisant le résultat du cours, comme l'équation caractéristique possède une solution double : 1, il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{Z}, x_n = A + Bn$. Comme $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, on a $B = 0$ et donc x est une suite constante. Réciproquement, les suites constantes sont clairement dans $\ker(T - 2\text{id}_{\mathcal{C}})$.

Ainsi $\boxed{\ker(T - 2\text{id}_{\mathcal{C}}) \text{ est l'ensemble des suites constantes}}$

- Si $\lambda = -2$. Soit $x \in \ker(T + 2\text{id}_{\mathcal{C}})$. On a : $\forall n \in \mathbb{Z}, x_{n+2} + 2x_{n+1} + x_n = 0$. Donc en généralisant le résultat du cours, comme l'équation caractéristique possède une solution double : -1 , il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{Z}, x_n = (A + Bn)(-1)^n$. Comme $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, on a $B = 0$ et, comme $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, on a $A = 0$ donc x est la suite nulle.

Ainsi $\boxed{\ker(T + 2\text{id}_{\mathcal{C}}) = \{0_{\mathcal{C}}\}}$

- 7.4. Avec les 3 questions précédentes, on a établi que $\boxed{T \text{ ne possède qu'une valeur propre : } 2}$

8. .

- 8.1. Soit $x \in \mathcal{C}$. D'après la question 2, on sait que x est bornée, donc il existe $A > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{Z}, |x_n| \leq A$.

Ainsi, si on pose $u_n = \frac{|x_n| + |x_{-n}|}{2^n}$, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq \frac{2A}{2^n}$ qui est le terme général d'une série convergente. Ainsi $\sum u_n$ converge i.e. $\boxed{N(x) \text{ est bien définie}}$.

1. Fallait-il démontrer ce résultat classique ici ?

8.2. • N est bien une application de $\mathcal{C}$ vers $\mathbb{R}^+$

• Séparation. Soit $x \in \mathcal{C}$ telle que $N(x) = 0$. On note $x = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ et $u_n = \frac{|x_n| + |x_{-n}|}{2^n}$. On a $N(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = 0$ alors que $\sum u_n$ est une série convergente de réels positifs. Donc comme la somme est nulle, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 0$. En particulier, $\forall n \in \mathbb{Z}, x_n = 0$ i.e. x est la suite nulle.

• Homogénéité. Soit $x \in \mathcal{C}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $y = \lambda x$, $u_n = \frac{|x_n| + |x_{-n}|}{2^n}$ et $v_n = \frac{|y_n| + |y_{-n}|}{2^n}$ en notant les termes généraux de x et de y sous la forme x_n et y_n . On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{|\lambda x_n| + |\lambda x_{-n}|}{2^n} = |\lambda| \frac{|x_n| + |x_{-n}|}{2^n} = |u_n|. \text{ Ainsi par linéarité du passage à la somme pour}$$

$$\text{les séries convergentes, } \sum_{n=0}^{+\infty} v_n = |\lambda| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \text{ i.e. } \underline{N(\lambda x) = |\lambda| N(x)}$$

• Inégalité triangulaire. Soit $(x, y) \in \mathcal{C}^2$. Soit $z = x + y$. On note x_n, y_n, z_n les termes généraux de ces suites. On a : $\forall n \in \mathbb{Z}, |z_n| = |x_n + y_n| \leq |x_n| + |y_n|$.

$$\text{Ainsi : } \forall n \in \mathbb{N}, \frac{|z_n| + |z_{-n}|}{2^n} \leq \frac{|x_n| + |x_{-n}|}{2^n} + \frac{|y_n| + |y_{-n}|}{2^n}.$$

Donc en passant à la somme, on obtient $\underline{N(x + y) \leq N(x) + N(y)}$

Ainsi N est une norme sur $\mathcal{C}$

8.3. Soit $x \in \mathcal{C}$ et $x' = S(x)$. On note $u_n = \frac{|x_n| + |x_{-n}|}{2^n}$ et $v_n = \frac{|x'_n| + |x'_{-n}|}{2^n}$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n$ donc $N(x') = N(x)$.

Ainsi S conserve la norme N i.e. S est une isométrie de l'espace vectoriel normé $(\mathcal{C}, N)$.

En prenant $k = 1$, on a établi : $\forall x \in \mathcal{C}, N(S(x)) \leq kN(x)$. Ainsi par caractérisation de la continuité des applications linéaires, S est un endomorphisme continu de $(\mathcal{C}, N)$.

8.4. $\text{id}_{\mathcal{C}}$ est également une application continue de $(\mathcal{C}, N)$ vers lui-même, donc $R = S - \text{id}_{\mathcal{C}}$ est continue sur $(\mathcal{C}, N)$. Donc $F = \ker(S - \text{id}_{\mathcal{C}}) = R^{-1}(\{0_{\mathcal{C}}\})$ est l'image réciproque d'un fermé par une application continue donc F est une partie fermée de l'espace vectoriel normé $(\mathcal{C}, N)$.

De même G est une partie fermée de l'espace vectoriel normé $(\mathcal{C}, N)$ car $G = (S + \text{id}_{\mathcal{C}})^{-1}(\{0_{\mathcal{C}}\})$.

8.5. On considère la suite $(x^{(P)})_{P \in \mathbb{N}^*}$ la suite d'éléments de $\mathcal{C}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{Z}, x_n^{(P)} = 2^n$ si $n \in \llbracket 1, P \rrbracket$,

$x_n^{(P)} = 0$ sinon. Les suites $x^{(P)}$ sont bien dans $\mathcal{C}$ et on a $N(x^{(P)}) = \sum_{n=1}^P 1 = P$ et $\|x^{(P)}\|_{\infty} = 2^P$. Comme

la suite $\left(\frac{2^P}{P}\right)_{P \in \mathbb{N}^*} = \left(\frac{\|x^{(P)}\|_{\infty}}{N(x^{(P)})}\right)_{P \in \mathbb{N}^*}$ n'est pas majorée, on ne peut pas trouver de constante $K > 0$ telle que $\forall x \in \mathcal{C} \setminus \{0_{\mathcal{C}}\}, \|x\|_{\infty} \leq KN(x)$.

Ainsi les deux normes N et $\|\cdot\|_{\infty}$ ne sont pas équivalentes

Exercice 4

→ VOIR APRÈS L'EXERCICE 5

Exercice 5

1. Par définition de l'intégrale d'une fonction en escalier, on a

$$\int_0^1 f_n(t) dt = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} w_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n w_k$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $t \in [0, 1[$, on pose $k = \lfloor nt \rfloor$ la partie entière de nt . On a $k \leq nt < k + 1$ donc $t \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right[$ et donc $f_n(t) = w_{k+1}$.
Ceci étant vrai pour tout t , on a donc : $\forall t \in [0, 1[, f_n(t) = w_{\lfloor nt \rfloor + 1}$

3. Soit $t \in [0, 1]$.

- Si $t = 1$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n(t) = w_n$ qui tend vers ℓ lorsque n tend vers l'infini.
- Si $t \in]0, 1[$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n(t) = w_{\lfloor nt \rfloor + 1}$ donc par composition des limites, $f_n(t)$ tend vers ℓ lorsque n tend vers $+\infty$
- Si $t = 0$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n(t) = w_1$.

Ainsi la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $[0, 1]$ vers la fonction $\delta : t \mapsto \begin{cases} \ell & \text{si } t \in]0, 1] \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$

- 4.
- Toutes les fonctions f_n sont continues par morceaux sur $[0, 1]$.
 - La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $[0, 1]$ vers la fonction $\delta : t \mapsto \begin{cases} \ell & \text{si } t \in]0, 1] \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$ qui est une fonction continue par morceaux sur $[0, 1]$
 - On pose φ la fonction constante sur $[0, 1]$ égale à $\sup_{n \in \mathbb{N}^*} w_n$, qui existe car la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente donc bornée. Cette fonction φ est continue par morceaux et donc intégrable sur le segment $[0, 1]$ et de plus : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0, 1], |f_n(t)| \leq \varphi(t)$

Ainsi, on a bien vérifiée ici les hypothèses du théorème de convergence dominée et on a : $\left(\int_{[0,1]} f_n \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge

et sa limite vaut $\int_{[0,1]} \delta$. On en déduit le résultat : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n w_k = \ell$, résultat connu sous le nom de lemme de Cesaro

Exercice 4

—————> voir page 7

2a. 11.2017

exercice 2

(7)

1) a) Par définition de A , $A = \begin{pmatrix} u(e_1) \\ u(e_2) \\ \vdots \\ u(e_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$

donc $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad u(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i$

d'où $(u(e_j) | e_i) = a_{ij} \times 1 + \sum 0$ d'où $a_{ij} = (u(e_j) | e_i)$

b) $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \quad a_{ji} = (u(e_i) | e_j) = - (e_j | u(e_i))$
 $= - (u(e_i) | e_j) = -a_{ji}$

donc $({}^t A)_{ji} = a_{ji} = -a_{ij} = - (A)_{ij}$

d'où $A^T = -A$

2) $\det A^T = \det A = \det (-A) = (-1)^n \det A$

comme u est bijectif, $\det A \neq 0$ et donc $(-1)^n = 1$ ce qui

donne d'où n pair

3) $\forall (x, y) \in E^2 : (v(x) | y) = (u \circ u(x) | y) = - (u(x) | u(y))$
 $= + (x | v(y))$

d'où v symétrique et par th. spectral, on a le résultat

de + : $\det v = (\det u)^2 \neq 0$, donc v automorphisme.

4) Soit $n \in E \setminus \{0\}$ et $\sigma(n) = \lambda n$

(8)

$$(\sigma(n)|n) = (\lambda n|n) = \lambda \|n\|^2$$

$$= (u \circ u(n)|n) = -(u(n)|u(n)) = -\|u(n)\|^2$$

Comme $n \neq 0$, $\|n\| \neq 0$ et $u(n) \neq 0$ car u injectif, donc

$$\|u(n)\|^2 \neq 0 \quad \text{d'où} \quad \lambda = -\frac{\|u(n)\|^2}{\|n\|^2} < 0 \quad \text{d'où} \quad \boxed{\lambda < 0}$$

5a) $F = \text{vect}(n, u(n))$ est un $\mathbb{R}$ -s.e.v. de dimension ≤ 2 .

Montrons que $(n, u(n))$ libre : soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

$$\alpha n + \beta u(n) = 0$$

$$\text{si } \beta \neq 0 \quad \text{alors} \quad u(n) = -\frac{\alpha}{\beta} n$$

$$\text{donc} \quad u^2(n) = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 n$$

$$\text{d'où} \quad \sigma(n) = \lambda n = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 n$$

inutile

$$\forall n \in E$$

$$(u(n)|n) = -(n|u(n))$$

$$\text{donc } u(n) \perp n$$

Comme $n \neq 0$ (par définition d'un vect. prop.) :

$$\lambda = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 \geq 0 \quad : \text{absurde, donc } \beta = 0 \text{ d'où } \alpha = 1$$

$$\text{d'où} \quad \boxed{\dim F = 2}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } u(F) &= \text{vect}(u(n), u^2(n)) = \text{vect}(u(n), \lambda n) \\ &= \text{vect}(n, u(n)) \quad \text{car } \lambda \neq 0 \end{aligned}$$

$$d^0 : \boxed{F \text{ stable par } u}$$

(9)

$\forall n \in F^\perp$, montrons que $u(n) \in F^\perp$:

$$\forall y \in F, (u(n) | y) = - (n | u(y))$$

comme $u(y) \in F$, $(n | u(y)) = 0$ donc $u(n) \in F^\perp$

$$d^0 : \boxed{F^\perp \text{ stable par } u}$$

c) Analyse : $B' = (e'_1, e'_2) \text{ orthonormé}$

$$u(e'_1) = a e'_2 \quad \text{et} \quad u(e'_2) = -a e'_1$$

donc $u^2(e'_1) = v(e'_1) = -a^2 e'_1$, donc e'_1 doit

être un $\vec{v}_p$ de v associé à λ et la relation

$$u(e'_1) = a e'_2 \quad \text{donne} \quad e'_2 = \frac{1}{a} u(e'_1)$$

Synthèse : posons $e'_1 = \frac{x}{\|n\|}$ et $e'_2 = \frac{1}{a\|n\|} u(x)$

$$\text{On a } \|e'_1\| = 1, \quad u(e'_1) = \frac{1}{\|n\|} u(n) = a e'_2$$

$$u(e'_2) = \frac{1}{a\|n\|} v(n) = \frac{\lambda n}{a\|n\|} = \frac{-a^2 n}{a\|n\|} = -a e'_1$$

le 4) a montré que $\lambda = -\frac{\|u(n)\|^2}{\|n\|^2}$ donc $\frac{\|u(n)\|}{\|n\|} = \sqrt{-\lambda} = a$

$$\text{donc } \|e'_2\| = 1$$

Enfin $(u(n)|n) = -(n|u(n))$ donc $u(n) \perp n$ (10)

d'où $e'_1 \perp e'_2$ donc (e'_1, e'_2) libre donc base de F

d' $B' = (e'_1, e'_2)$ base OTN de F et $\Pi_{B'}|u_F) = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$

d) On sait que $u_{F^\perp} \in \mathcal{L}(F^\perp)$, si $n \in F^\perp$ $u_{F^\perp}(n) = 0$

donc $u(n) = 0$ d'où $n = 0$ et $u_{F^\perp}$ automorphisme.

Enfin si la relation est vraie pour tout $(n, y) \in E^L$, elle est vraie si $(n, y) \in (F^\perp)^L$ (QP F P L !)

d' u_F automorphisme et vérifie (1)

6) Avec la 5) il existe (e'_1, e'_2) base OTN qui vérifie la 5), on considère $v_{F^\perp} = u_{F^\perp} \circ u_{F^\perp}$ qui admet un $\sqrt{p}$ y associé à une rp p et si $b = \sqrt{-p}$ on a, toujours avec la 5), une base (e'_3, e'_4) OTN de $F^\perp$ $\Pi_{(e'_3, e'_4)}|u_{F^\perp}) = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}$

d' $B'' = (e'_1, e'_2, e'_3, e'_4)$ base de $F \oplus F^\perp = E$ et $\Pi_{B''}|u) = \begin{pmatrix} 0 & -a & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b \\ 0 & 0 & b & 0 \end{pmatrix}$

7) On raisonne par réc. et on fait comme au 6): (11)
 $\hookrightarrow$ sur la dimension de E

$\exists B''$ OTN de $E \exists (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in (\mathbb{R}^*)^p \setminus$

$$M_{B''}(u) = \begin{pmatrix} s_{\alpha_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & s_{\alpha_p} \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad s_{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

q.s $\chi_u = \prod_{i=1}^p (x^2 + \alpha_i^2)$, $\det u > 0$

$\text{Tr } u = 0$ (normal $A^T = -A$)

Ce corrigé a été essentiellement rédigé par M. Lucas (professeur de prépa et membre de l'UPS) et modifié par endroit pour mieux "coller" avec ce qu'attendent les correcteurs de concours.

On remarque que toutes les variables aléatoires prennent un nombre fini de valeurs. Il n'y a donc pas de problème d'existence pour les espérances. On n'évoquerai donc plus cela.

I. Fonction caractéristique

1. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On a $\mathbb{E} \left(\exp \left(it \frac{\varepsilon_k}{2^k} \right) \right) = \mathbb{E} \left(\cos \left(t \frac{\varepsilon_k}{2^k} \right) \right) + i \mathbb{E} \left(\sin \left(t \frac{\varepsilon_k}{2^k} \right) \right)$.

La variable aléatoire $\cos \left(t \frac{\varepsilon_k}{2^k} \right)$ est constante égale à $\cos \left(\frac{t}{2^k} \right)$ car $\cos$ est paire.

Selon la formule de transfert, on a :

$$\mathbb{E} \left(\sin \left(t \frac{\varepsilon_k}{2^k} \right) \right) = \sin \left(\frac{t}{2^k} \right) \mathbb{P}(\varepsilon_k = 1) + \sin \left(\frac{-t}{2^k} \right) \mathbb{P}(\varepsilon_k = -1) = \frac{\sin \left(\frac{t}{2^k} \right) - \sin \left(\frac{t}{2^k} \right)}{2} = 0$$

$$\text{donc } \mathbb{E} \left(\exp \left(it \frac{\varepsilon_k}{2^k} \right) \right) = \mathbb{E} \left(\cos \left(t \frac{\varepsilon_k}{2^k} \right) \right) + i \mathbb{E} \left(\sin \left(t \frac{\varepsilon_k}{2^k} \right) \right) = \mathbb{E} \left(\cos \left(\frac{t}{2^k} \right) \right) + 0i = \cos \left(\frac{t}{2^k} \right)$$

On a $e^{itX_n} = \prod_{k=1}^n \exp \left(it \frac{\varepsilon_k}{2^k} \right)$ or selon le lemme des coalitions, les variables aléatoires $\exp \left(it \frac{\varepsilon_k}{2^k} \right)$ ($k \in \llbracket 1, n \rrbracket$) sont mutuellement indépendantes.

Ainsi $\Phi_{X_n}(t) = \prod_{k=1}^n \mathbb{E} \left(\exp \left(it \frac{\varepsilon_k}{2^k} \right) \right)$ d'après le résultat admis par l'énoncé.

On peut alors conclure que $\Phi_{X_n}(t) = \prod_{k=1}^n \cos \left(\frac{t}{2^k} \right)$

2. On montre par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$ que : $\forall t \in \mathbb{R}, \sin \left(\frac{t}{2^p} \right) \prod_{k=1}^p \cos \left(\frac{t}{2^k} \right) = \frac{\sin(t)}{2^p}$.

Initialisation : Pour $p = 0$, le produit vaut 1 et $2^0 = 1$ donc on a bien l'égalité voulue car $\sin(t) = \sin(t)$.

Hérédité : Soit $p \in \mathbb{N}$. On suppose que la propriété au rang p .

$$\text{Soit } t \in \mathbb{R}. \text{ On a } \sin \left(\frac{t}{2^{p+1}} \right) \prod_{k=1}^{p+1} \cos \left(\frac{t}{2^k} \right) = \left(\sin \left(\frac{t/2}{2^p} \right) \prod_{k=1}^p \cos \left(\frac{t/2}{2^k} \right) \right) \cos \left(\frac{t}{2} \right).$$

Ainsi avec l'hypothèse de récurrence, on a

$$\sin \left(\frac{t}{2^{p+1}} \right) \prod_{k=1}^{p+1} \cos \left(\frac{t}{2^k} \right) = \frac{\sin \left(\frac{t}{2} \right)}{2^p} \cos \left(\frac{t}{2} \right) = \frac{2 \sin \left(\frac{t}{2} \right) \cos \left(\frac{t}{2} \right)}{2^{p+1}} = \frac{\sin(t)}{2^{p+1}}.$$

Ce qui prouve l'hérédité.

Conclusion : On a montré par récurrence : $\forall p \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}, \sin \left(\frac{t}{2^p} \right) \prod_{k=1}^p \cos \left(\frac{t}{2^k} \right) = \frac{\sin(t)}{2^p}$.

On peut conclure que $\sin \left(\frac{t}{2^n} \right) \Phi_{X_n}(t) = \frac{\sin(t)}{2^n}$

3. Soit $t \in \mathbb{R}$.

Premier cas : si $t \neq 0$: Quand $n \rightarrow +\infty$, on a $\frac{t}{2^n} \rightarrow 0$ et pour n assez grand, on a $0 < \left| \frac{t}{2^n} \right| < \pi$

donc $\sin\left(\frac{t}{2^n}\right) \sim \frac{t}{2^n}$ ainsi pour n assez grand, $\sin\left(\frac{t}{2^n}\right) \neq 0$

donc $\Phi_{X_n}(t) = \frac{\sin(t)}{2^n \sin\left(\frac{t}{2^n}\right)}$ et $2^n \sin\left(\frac{t}{2^n}\right) \sim t$

d'où $2^n \sin\left(\frac{t}{2^n}\right) \rightarrow t$ puis $\Phi_{X_n}(t) \rightarrow \text{sinc}(t)$

Deuxième cas : si $t = 0$: On a $\Phi_{X_n}(0) = \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{0}{2^k}\right) = 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 = \text{sinc}(0)$

On peut conclure que la suite de fonctions $(\Phi_{X_n})_{n \geq 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers sinc

4. sinc est continue sur l'ouvert $\mathbb{R}^*$ par produit des fonctions continues sin et inverse.

Quand $t \rightarrow 0$, on a $\text{sinc}(t) = \frac{\sin(t)}{t} \sim \frac{t}{t} = 1$.

donc $\lim_{t \rightarrow 0} \text{sinc}(t) = 1 = \text{sinc}(0)$ donc sinc est continue en 0.

Ainsi la suite limite simple sur $\mathbb{R}$ de la suite (Φ_{X_n}) est continue sur $\mathbb{R}$

5. Pour tout i , $\varepsilon_i \sim -\varepsilon_i$, donc $X = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \sim Y = (-\varepsilon_1, \dots, -\varepsilon_n)$ donc $X_n = f(X) \sim -X_n = f(Y)$ avec $f(x_1, \dots, x_n) = \frac{x_1}{2} + \dots + \frac{x_n}{2^n}$.

Ainsi on peut conclure que X_n et $-X_n$ ont même loi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

Remarque : On pouvait aussi montrer que $G_{X_n}(t) = G_{-X_n}(t)$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $t \in \mathbb{R}$.

On a $\Phi_{X_n}(t) = \mathbb{E}(\exp(itX_n)) = \mathbb{E}(\cos(tX_n)) + i\mathbb{E}(\sin(tX_n))$

or $X_n \sim -X_n$ donc $\mathbb{E}(\sin(tX_n)) = \mathbb{E}(\sin(-tX_n)) = -\mathbb{E}(\sin(tX_n))$

donc $\mathbb{E}(\sin(tX_n)) = 0$ et $\Phi_{X_n}(t) = \mathbb{E}(\cos(tX_n)) = \varphi_n(t)$ ainsi $\varphi_n = \Phi_{X_n}$.

En utilisant 3, on conclut que la suite de fonctions $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ converge simplement vers sinc sur $\mathbb{R}$

7. Par l'absurde, on suppose que la suite de fonctions $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}$.

Alors la suite de fonctions $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers sa limite simple qui est sinc.

À partir d'un certain rang n_0 , on a pour $n \geq n_0$ la fonction $\varphi_n - \text{sinc}$ est bornée et en notant $\|\cdot\|_\infty$ la norme infinie sur $\mathbb{R}$ on a

$$\|\varphi_n - \text{sinc}\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

L'idée est que sinc et φ_n ne s'annule pas aux mêmes point (à cause des cosinus et sinus).

Pour $t_n = 2^n \pi$, on a $0 \leq |\varphi_n(t_n) - \text{sinc}(t_n)| = |-1 - 0| = 1 \leq \|\varphi_n - \text{sinc}\| \rightarrow 0$ lorsque n tend vers l'infini. ce qui est absurde

ainsi la suite de fonctions $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$

II. Ecriture binaire

8. Soit $x = (x_j)_{j \in [1, n]} \in \{0, 1\}^n$. On a $\forall j \in [1, n]$, $n - j \in \mathbb{N}$.

Comme $\mathbb{N}$ est stable par l'addition, la multiplication et l'exponentiation, alors $\sum_{j=1}^n x_j 2^{n-j} \in \mathbb{N}$ (i)

puis comme $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $x_j \leq 1$ et $2^{n-j} \geq 0$, on a :

$$0 \leq \sum_{j=1}^n x_j 2^{n-j} \leq \sum_{j=1}^n 2^{n-j} = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k = 2^n - 1 \quad (ii)$$

Ainsi avec (i) et (ii), on a $\sum_{j=1}^n x_j 2^{n-j} \in \llbracket 0, 2^n - 1 \rrbracket$

Ainsi Φ_n est bien définie

9. Il est clair que $\text{Im}(\Phi_n) = A_n$

Remarque : la notation Im est plutôt réservée pour les morphismes en algèbre. On écrirait plutôt : $\Phi_n(\{0, 1\}) = A_n$

10. **Récurrence forte et finie** sur k . On montre par récurrence finie sur $k \in \llbracket 0, 2^n - 1 \rrbracket$ que $k \in \text{Im}(\Phi_n)$.

Initialisation : On a $0 = \sum_{j=1}^n 0 \times 2^{n-j} = \Phi_n(\tilde{0}_n)$ où $\tilde{0}_n = (0, \dots, 0)$ est la suite finie nulle.

Ainsi $0 \in \text{Im}(\Phi_n)$ ce qui est l'initialisation.

Hérédité : Soit $k \in \llbracket 1, 2^n - 1 \rrbracket$. On suppose que $\forall p \in \llbracket 0, k - 1 \rrbracket$, $p \in \text{Im}(\Phi_n)$. Montrons $k \in \text{Im}(\Phi_n)$.

La division euclidienne de k par 2 nous fournit $q \in \mathbb{Z}$ et $r \in \{0, 1\}$ tels que $k = 2q + r$

On remarque que $0 \leq q \leq k/2 < k$ car $k \in \mathbb{N}^*$ et donc $q \in \llbracket 0, k - 1 \rrbracket$

Ceci nous fournit $(y_j)_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket} \in \{0, 1\}^n$ tel que $q = \sum_{j=1}^n y_j 2^{n-j}$

De plus $q \leq k/2 \leq 2^{n-1} - 1/2 < 2^{n-1}$ donc $y_1 = 0$

On définit alors $(x_j)_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket} \in \{0, 1\}^n$ par $x_n = r$ et $\forall j \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$, $x_j = y_{j+1}$, de sorte que :

$$\sum_{j=1}^n x_j 2^{n-j} = \sum_{j=1}^{n-1} y_{j+1} 2^{n-j} + x_n 2^0 = \sum_{i=2}^n y_i 2^{n-i+1} + r = \sum_{j=1}^n y_j 2^{n-j+1} + r = 2 \sum_{j=1}^n y_j 2^{n-j} + r = 2q + r$$

Ainsi $k = \Phi_n((x_j)_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket}) \in \text{Im}(\Phi_n)$

Conclusion : On a bien montré par récurrence que $\forall k \in \llbracket 0, 2^n - 1 \rrbracket$, $k \in \text{Im}(\Phi_n)$

11. On montre en 8 que l'application $\Phi_n : \{0, 1\}^n \longrightarrow \llbracket 0, 2^n - 1 \rrbracket$ est bien définie puis qu'elle est surjective en 10 de plus, on a $|\{0, 1\}^n| = 2^n = |\llbracket 0, 2^n - 1 \rrbracket|$ (même cardinaux). Ainsi Φ_n est bijective

12. Montrons que $D_n \subset D_{n+1}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $k \in D_n$. On peut alors trouver $(y_j)_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket} \in \{0, 1\}^n$ tel que $k = \sum_{j=1}^n \frac{y_j}{2^j} = \frac{y_1}{2} + \dots + \frac{y_n}{2^n}$.

On définit alors $(x_j)_{j \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket} \in \{0, 1\}^{n+1}$ par $x_{n+1} = 0$ et $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $x_j = y_j$.

de sorte que $k = \sum_{j=1}^n \frac{y_j}{2^j} + 0 = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{x_j}{2^j} \in D_{n+1}$

On vient de montrer que $D_n \subset D_{n+1}$ et donc la suite $(D_n)_{n \geq 1}$ est croissante au sens de l'inclusion

Soit $k \in D$. Ceci nous fournit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $k \in D_n$ puis $(x_j)_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket} \in \{0, 1\}^n$ tel que $k = \sum_{j=1}^n \frac{x_j}{2^j}$.

Comme en 8, on a $0 \leq k \leq \sum_{j=1}^n \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2} \frac{1 - (1/2)^n}{1 - 1/2} = 1 - (1/2)^n < 1$

d'où $0 \leq k < 1$. On a bien vérifié que $D \subset [0, 1[$

13. Soit $(x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$. On a $\lfloor 2^n x \rfloor \leq 2^n x < \lfloor 2^n x \rfloor + 1$ par définition de la partie entière.

Par multiplication par $\frac{1}{2^n} > 0$, on obtient $\boxed{\pi_n(x) \leq x < \pi_n(x) + \frac{1}{2^n}}$

14. Soit $x \in [0, 1[$ et $k \in \mathbb{N}$. On a par définition des π_j et puis par télescopage :

$$\sum_{j=1}^k \frac{d_j(x)}{2^j} = \sum_{j=1}^k 2^j \frac{(\pi_j(x) - \pi_{j-1}(x))}{2^j} = \pi_k(x) - \pi_0(x)$$

Or $\pi_0(x) = \frac{\lfloor 2^0 x \rfloor}{2^0} = \lfloor x \rfloor = 0$ car $0 \leq x < 1$. D'où $\boxed{\pi_k(x) = \sum_{j=1}^k \frac{d_j(x)}{2^j}}$

15. En posant $A = 2^j x$, on a $d_j(x) = \lfloor 2A \rfloor - 2 \lfloor A \rfloor \in \mathbb{Z}$.

On a $\lfloor A \rfloor \leq A < \lfloor A \rfloor + 1$ donc $2 \lfloor A \rfloor \leq 2A < 2 \lfloor A \rfloor + 2$ et donc $\lfloor 2A \rfloor = 2 \lfloor A \rfloor$ ou $\lfloor 2A \rfloor = 2 \lfloor A \rfloor + 1$, d'où $2 \lfloor A \rfloor \leq \lfloor 2A \rfloor < 2 \lfloor A \rfloor + 2$ et donc $0 \leq d_j(x) < 2$ ainsi $\boxed{d_j(x) \in \{0, 1\}}$

16. On a $x \in D_n \iff 2^n x \in A_n$ et $A_n = \llbracket 0, 2^n - 1 \rrbracket$ (Q9. et Q11.)

On a bien l'équivalence $\boxed{x \in D_n \iff 2^n x \in \llbracket 0, 2^n - 1 \rrbracket}$

17. L'application $\Psi_n : \{0, 1\}^n \rightarrow D_n$ est bien définie par définition de D_n

D'après 16, $D_n = \left\{ \frac{k}{2^n} \mid k \in \llbracket 0, 2^n - 1 \rrbracket \right\}$, l'application $f : t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{t}{2^n} \in \mathbb{R}$ est bijective et comme

$\Psi_n = f \circ \Phi_n$, par composition de fonctions bijectives, l'application $\boxed{\Psi_n \text{ est bien bijective}}$

18. Soit $i \in \mathbb{N}^*$. On a $d_i(x) = \lfloor 2^i x \rfloor - 2 \lfloor 2^{i-1} x \rfloor$ (comme en 15).

On pose pour $j \geq n+1$, $x_j = 0$ de sorte que $x = \sum_{j=1}^N \frac{x_j}{2^j}$ pour tout entier $N \geq n$.

On a $2^i x = \sum_{j=1}^n \frac{2^i x_j}{2^j} = \sum_{j=1}^i \frac{2^i x_j}{2^j} + \sum_{j=i+1}^n \frac{2^i x_j}{2^j}$ en prenant comme convention $\sum_{j=i+1}^n \frac{2^i x_j}{2^j} = 0$ si $i \geq n$

Si $n \geq i+1$, on a $0 \leq \sum_{j=i+1}^n \frac{2^i x_j}{2^j} \leq \sum_{j=i+1}^n \frac{2^i}{2^j} = \frac{2^i}{2^{i+1}} \frac{1 - (1/2)^{n-i}}{1 - (1/2)} = 1 - (1/2)^{n-i} < 1$

dans tous les cas, on a : $\sum_{j=i+1}^n \frac{2^i x_j}{2^j} \in [0, 1[$ et $\sum_{j=1}^i \frac{2^i x_j}{2^j} = \sum_{j=1}^i 2^{i-j} x_j \in \mathbb{N}$

d'où $\lfloor 2^i x \rfloor = \sum_{j=1}^i 2^{i-j} x_j$ et de même $\lfloor 2^{i-1} x \rfloor = \sum_{j=1}^{i-1} 2^{i-1-j} x_j$

donc $d_i(x) = \sum_{j=1}^i 2^{i-j} x_j - \sum_{j=1}^{i-1} 2^{i-j} x_j = 2^0 x_i = x_i$

Soit $k \in \mathbb{N}$. On a : $\pi_k(x) = \sum_{j=1}^k \frac{d_j(x)}{2^j} = \sum_{j=1}^k \frac{x_j}{2^j}$ d'après 14 car $x \in D_n \subset [0, 1[$

Comme pour $j \geq n+1$, on a $x_j = 0$, on peut conclure que $\boxed{\pi_k(x) = \sum_{j=1}^{\min(n,k)} \frac{x_j}{2^j}}$

III. Développement dyadique, loi de composition

19. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme les U_k sont presque sûrement à valeurs dans $\{0, 1\}$, alors Y_n est sûrement à valeurs dans D_n or $D_n \subset [0, 1[$ ainsi $(Y_n \in [0, 1[) = \Omega$ et donc $\mathbb{P}(Y_n \in [0, 1[) = 1$

20. D'après la question Q16., $Y_n(\Omega) = \left\{ \frac{k}{2^n} \text{ tel que } k \in [[0, 2^n - 1]] \right\} = D_n$.

$$\text{Soit } x = \sum_{j=1}^n \frac{x_j}{2^j} = \frac{k}{2^n} \in D_n \text{ où } k \in [[0, 2^n - 1]].$$

On a alors $F_n(x) = \mathbb{P}(Y_n \leq x) = \sum_{j=0}^k \mathbb{P}\left(Y_n = \frac{j}{2^n}\right)$, or par bijection de Ψ_n et Q17., on a

$$\left(Y_n = \frac{j}{2^n}\right) = \left(\Psi_n^{-1}(Y_n) = \Psi_n^{-1}\left(\frac{j}{2^n}\right)\right) = (U_1 = x_1, \dots, U_n = x_n)$$

Les U_k sont mutuellement indépendantes et suivent la même loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$, on en déduit

$$\mathbb{P}\left(Y_n = \frac{j}{2^n}\right) = (\mathbb{P}(U_1 = x_1))^n = \frac{1}{2^n} \text{ et par suite } F_n(x) = \sum_{j=0}^k \frac{1}{2^n} = \frac{k+1}{2^n} = x + \frac{1}{2^n}.$$

On a bien montré que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in D_n, F_n(x) = x + \frac{1}{2^n}$

21. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in D_n$.

Si $x = 0$, on a $G_n(0) = \mathbb{P}(Y_n < 0) = 0$ car $(Y_n \in [0, 1[)$ est presque sûr.

Si $x \neq 0$, alors : $\forall y \in D_n, y < x \iff y \leq x - \frac{1}{2^n}$ et $x - \frac{1}{2^n} \in D_n$ en utilisant 16

$$\text{Ainsi } (Y_n < x) = \left(Y_n \leq x - \frac{1}{2^n}\right)$$

$$\text{donc } G_n(x) = \mathbb{P}(Y_n < x) = \mathbb{P}\left(Y_n \leq x - \frac{1}{2^n}\right) = F_n\left(x - \frac{1}{2^n}\right) = x - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n}$$

Dans tous les cas, on a $G_n(x) = x$

22. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in D_n$. On a $(Y_n = x) \cup (Y_n < x) = (Y_n \leq x)$ (réunion disjointe) donc

$$\mathbb{P}(Y_n = x) = \mathbb{P}(Y_n \leq x) - \mathbb{P}(Y_n < x) = F_n(x) - G_n(x) = \frac{1}{2^n} = \frac{1}{|D_n|}$$

Ainsi $\boxed{\text{pour tout entier naturel non nul } n, Y_n \text{ suit une loi uniforme sur } D_n}$

23. Remarque : il est sans doute possible de faire une preuve moins formalisée.

En utilisant 14 et regardant la preuve de 18, on voit que $\forall x \in D_n, x = \pi_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{d_k(x)}{2^k}$

On pose alors $V_k = d_k(X_n)$ et on a bien $X_n = \sum_{k=1}^n \frac{V_k}{2^k}$

On remarque que $\forall x \in D_n, \Psi_n^{-1}(x) = (d_1(x), \dots, d_n(x))$ ainsi on note $W = \Psi_n^{-1}(X_n) = (V_1, \dots, V_n)$.

Comme X_n suit une loi uniforme sur D_n et que $\Psi_n : \{0, 1\}^n \longrightarrow D_n$ bijective alors W suit une loi uniforme sur $\{0, 1\}^n$

Soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. V_j est alors presque sûrement à valeurs dans $\{0, 1\}$.

Soit $\varepsilon \in \{0, 1\}$. On a

$$\mathbb{P}(V_j = \varepsilon) = \mathbb{P}(W \in \{(v_1, \dots, v_n) \in \{0, 1\}^n \mid v_j = \varepsilon\}) = \frac{|\{(v_1, \dots, v_n) \in \{0, 1\}^n \mid v_j = \varepsilon\}|}{|\{0, 1\}^n|} = \frac{2^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{2}$$

Ainsi $V_j \sim \mathcal{B}(1/2)$

En faisant de même avec $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{0, 1\}^n$, on a

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n (V_i = \varepsilon_i)\right) = \frac{|\{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)\}|}{|\{0, 1\}^n|} = \frac{1}{2^n}$$

$$\text{donc } \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n (V_i = \varepsilon_i)\right) = \prod_{j=1}^n \mathbb{P}(V_j = \varepsilon_j);$$

ce qui prouve l'indépendance mutuelle des variables aléatoires $V_1, \dots, V_n$

Il existe bien des variables aléatoires $V_1, \dots, V_n$ mutuellement indépendantes, suivant chacune une loi de Bernoulli de paramètre 1/2, et telles que $X_n = \sum_{k=1}^n \frac{V_k}{2^k}$

IV. Développement dyadique, étude asymptotique

24. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $Y_n \leq Y_{n+1}$ donc $(Y_{n+1} \leq x) \subset (Y_n \leq x)$ ainsi

$$F_{n+1}(x) = \mathbb{P}(Y_{n+1} \leq x) \leq \mathbb{P}(Y_n \leq x) = F_n(x)$$

ainsi les suites $(F_n(x))_{n \geq 1}$ et $(G_n(x))_{n \geq 1}$ sont décroissantes (analogue pour $(G_n(x))$)

25. Soit $x \in \mathbb{R}$. les suites $(F_n(x))_{n \geq 1}$ et $(G_n(x))_{n \geq 1}$ sont décroissantes et minorées par 0

Elles sont donc convergentes par TLM.

On en déduit la convergence simple des suites de fonctions $(F_n)_{n \geq 1}$ et $(G_n)_{n \geq 1}$ sur $\mathbb{R}$

26. Soit $x \in D$. Cela nous fournit $N \in \mathbb{N}$ tel que $x \in D_N$.

D'après 11., on a alors $\forall n \geq N, x \in D_n$.

Ainsi d'après les questions 20 et 21, on a : $\forall n \geq N, F_n(x) = x + 1/2^n$ et $G_n(x) = x$

et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = x$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(x) = x$

De plus d'après 18, les événements $(Y_n \leq 1)$ et $(Y_n < 1)$ sont presque sûrs

Ainsi $F_n(1) = \mathbb{P}(Y_n \leq 1) = 1 = G_n(1) = \mathbb{P}(Y_n < 1)$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(1) = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(1) = 1$

On a montré $\forall x \in D \cup \{1\}, \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = x$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(x) = x$

27. On note F (respectivement G) les limites simples de (F_n) et de (G_n) sur $\mathbb{R}$

Soit $x \leq y$ dans $[0, 1]$. On a $F_n(x) = \mathbb{P}(Y_n \leq x) \leq \mathbb{P}(Y_n \leq y) = F_n(y)$ pour tout $n \geq 1$

Par passage à la limite, on a $F(x) \leq F(y)$ ainsi F est croissante sur $[0, 1]$.

On suppose que $x \neq 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a alors $\pi_n(x) \leq x < \pi_n(x) + \frac{1}{2^n}$ d'après 13

De plus $\pi_n(x) \in D_n \subset D$ d'après 15 et 14

de plus avec 16, on a $\pi_n(x) + \frac{1}{2^n} \in D_n \cup \{1\} \subset D \cup \{1\}$

d'après la question précédente, on a donc $F(\pi_n(x)) = \pi_n(x)$ et $F\left(\pi_n(x) + \frac{1}{2^n}\right) = \pi_n(x) + \frac{1}{2^n}$

En utilisant la croissance de F on a $\pi_n(x) \leq F(x) \leq \pi_n(x) + \frac{1}{2^n}$

Donc $|\pi_n(x) - x| \leq \frac{1}{2^n}$ et $|\pi_n(x) - F(x)| \leq \frac{1}{2^n}$ donc $|F(x) - x| \leq \frac{2}{2^n}$

Comme $\frac{2}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, on conclut que $F(x) = x$ et pour $G(x) = x$ c'est analogue.

On a montré $\boxed{\forall x \in [0, 1], \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = x \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(x) = x}$

28. On considère un intervalle non vide $I \subset [0, 1]$. On note $a = \inf I$ et $b = \sup I$.

On commence par un premier cas : $I = [a, b] \subset [0, 1]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On a $(Y_n \in I) = (Y_n \leq b) \setminus (Y_n < a)$. Comme $(Y_n < a) \subset (Y_n \leq b)$, on a

$$\mathbb{P}(Y_n \in I) = \mathbb{P}(Y_n \leq b) - \mathbb{P}(Y_n < a) = F_n(b) - G_n(a)$$

Par passage à la limite, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(Y_n \in I) = F(b) - G(a) = b - a = \sup I - \inf I$

De même on trouve

$$\mathbb{P}(Y_n \in]a, b]) = G_n(b) - F_n(a); \mathbb{P}(Y_n \in [a, b]) = G_n(b) - G_n(a) \text{ et } \mathbb{P}(Y_n \in]a, b]) = F_n(b) - F_n(a)$$

Dans tous les cas on conclut que $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(Y_n \in I) = \ell(I) \text{ avec } \ell(I) = \sup I - \inf I}$

29. **Sans le "En déduire" :**

En utilisant la formule de transfert on a $\mathbb{E}(f(Y_n)) = \sum_{y \in D_n} f(y) \mathbb{P}(Y_n = y) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} f\left(\frac{k}{2^n}\right)$.

En utilisant les sommes de Riemann (méthode des rectangles à gauche) avec la fonction continue f sur le segment $[0, 1]$, on a

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f\left(\frac{k}{N}\right) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \int_0^1 f$$

Comme toute suites extraites d'une suite convergente, convergent vers la même limite,

$$\text{on a : } \boxed{\mathbb{E}(f(Y_n)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f}$$

Avec le "En déduire" : Pour tout intervalle I de $[0, 1]$, on a

$$\mathbb{E}(\mathbf{1}_I(Y_n)) = \mathbb{P}(Y_n \in I) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell(I) = \int_0^1 \mathbf{1}_I$$

Pour g fonction en escaliers sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$,

on peut écrire $g = \sum_{k=1}^N a_k \mathbf{1}_{I_k}$ où $N \in \mathbb{N}$, les I_k sont des intervalles de $[0, 1]$ et les $a_k \in \mathbb{R}$

$$\text{Comme } \mathbb{E}(g(Y_n)) = \sum_{k=1}^N a_k \mathbb{E}(\mathbf{1}_{I_k}(Y_n)) \text{ et } \int_0^1 g = \sum_{k=1}^N a_k \int_0^1 \mathbf{1}_{I_k}$$

Par linéarité, des limites des suites, de l'espérance et des intégrales, on a : $\mathbb{E}(g(Y_n)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 g$.

Soit f maintenant f continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$.

Soit $\varepsilon > 0$.

Selon les théorèmes d'approximation uniforme du cours, on peut trouver g en escalier sur $[0, 1]$ tels que $\|f - g\|_\infty \leq \varepsilon/3$ où $\|\cdot\|_\infty$ est la norme infinie prise sur les fonctions bornées à valeurs réelles sur $[0, 1]$.

D'après ce qui précède $\mathbb{E}(g(Y_n)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 g$

ce qui nous fournit $N \in \mathbb{N}^*$, tel que $\forall n \geq N$, $\left| \mathbb{E}(g(Y_n)) - \int_0^1 g \right| \leq \varepsilon/3$.

Soit $n \geq N$.

On a $|f(Y_n) - g(Y_n)| \leq \varepsilon/3$ donc $|\mathbb{E}(f(Y_n)) - \mathbb{E}(g(Y_n))| = |\mathbb{E}(f(Y_n) - g(Y_n))| \leq \varepsilon/3$.

et $\left| \int_0^1 f - \int_0^1 g \right| \leq \int_0^1 |f - g| \leq \|f - g\|_\infty \leq \varepsilon/3$ donc

$$\left| \mathbb{E}(f(Y_n)) - \int_0^1 f \right| \leq |\mathbb{E}(f(Y_n)) - \mathbb{E}(g(Y_n))| + \left| \mathbb{E}(g(Y_n)) - \int_0^1 g \right| + \left| \int_0^1 g - \int_0^1 f \right| \leq \varepsilon$$

On vient de montrer que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq N \implies \left| \mathbb{E}(f(Y_n)) - \int_0^1 f \right| \leq \varepsilon$$

Ainsi pour toute fonction f continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, la suite $(\mathbb{E}(f(Y_n)))_{n \geq 1}$ converge vers $\int_0^1 f$

30. Soit $t \in \mathbb{R}$. On considère $(X_n)_n$ et $(\varepsilon_k)_k$ définies comme en I.

On pose pour $k \geq 1$, $U_k = \frac{1 + \varepsilon_k}{2}$ de sorte que (U_k) est une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi $\mathcal{B}(1/2)$. On pose $Y_n = \sum_{k=1}^n \frac{U_k}{2^k}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $Y_n = \frac{1}{2} \left(X_n + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \right) = \frac{X_n}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}$

donc $X_n = 2Y_n - 1 + \frac{1}{2^n}$ et $\cos(tX_n) = \cos(2tY_n - t) \cos(t/2^n) - \sin(2tY_n - t) \sin(t/2^n)$ donc

$$\mathbb{E}(\cos(tX_n)) = \cos(t/2^n) \mathbb{E}(\cos(2tY_n - t)) - \sin(t/2^n) \mathbb{E}(\sin(2tY_n - t))$$

On a $\cos(t/2^n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ et $\sin(t/2^n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

En utilisant les fonctions $x \mapsto \cos(2tx - t)$ et $x \mapsto \sin(2tx - t)$ qui sont bien continues sur $[0, 1]$, on a d'après le résultat précédent :

$$\mathbb{E}(\cos(2tY_n - t)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \cos(2tx - t) dx \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(\sin(2tY_n - t)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \sin(2tx - t) dx$$

donc $\mathbb{E}(\cos(tX_n)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \cos(2tx - t) dx$

Si $t = 0$, on a $\int_0^1 \cos(2tx - t) dx = \int_0^1 1 dx = 1 = \text{sinc}(0)$

Si $t \neq 0$, on a $\int_0^1 \cos(2tx - t) dx = \left[\frac{\sin(2tx - t)}{2t} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{\sin(t) - \sin(-t)}{2t} = \text{sinc}(t)$

On retrouve bien $\mathbb{E}(\cos(tX_n)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \text{sinc}(t)$ obtenu à la question 6

31. La fonction $h : t \mapsto \frac{t-1}{\ln(t)}$ est continue sur $]0, 1[$.

Quand $t \rightarrow 0$, on a $t-1 \rightarrow -1$ et $\ln(t) \rightarrow -\infty$ et ainsi $\lim_{t \rightarrow 0} h(t) = 0$

Quand $t \rightarrow 1$, on a $\ln(t) \sim t-1$ donc $h(t) \sim 1$ et ainsi $\lim_{t \rightarrow 1} h(t) = 1$

donc h admet un prolongement continue sur $[0, 1]$

On en déduit $\text{la convergence de } \int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)} dt = \int_0^1 h$ (intégrale faussement impropre)

Soit $t \in]0, 1[$. En utilisant 29 avec la fonction $f : x \mapsto t^x$ qui est continue sur $[0, 1]$.

On trouve que $\mathbb{E}(t^{Y_n}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 t^x dx$.

$$\text{or } \int_0^1 t^x dx = \int_0^1 e^{x \ln(t)} dx = \left[\frac{e^{x \ln(t)}}{\ln(t)} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{e^{\ln(t)} - e^0}{\ln(t)} = h(t)$$

On note $h_n : t \mapsto \mathbb{E}(t^{Y_n})$.

(i) On vient de voir que la suite de fonction $(h_n)_{n \geq 1}$ converge simplement vers h sur $]0, 1[$

(ii) De plus h est continue sur $]0, 1[$

(iii) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $t \in]0, 1[$.

$$\text{On a } h_n(t) = \mathbb{E}(t^{Y_n}) = \sum_{z \in D_n} t^z \mathbb{P}(Y_n = z) = \frac{1}{2^n} \sum_{j=0}^{2^n-1} t^{j/2^n} \text{ par formule de transfert}$$

ainsi h_n est continue sur $]0, 1[$.

(iv) Soit $t \in]0, 1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On a $0 \leq t^{Y_n} \leq 1$ car Y_n est à valeur positives.

Ainsi on a l'hypothèse de domination :

$$\forall t \in]0, 1[, \forall n \in \mathbb{N}^*, |h_n(t)| = \mathbb{E}(t^{Y_n}) \leq 1$$

et $t \mapsto 1$ est continue et intégrable sur $]0, 1[$

Conclusion : Avec (i), (ii), (iii) et (iv), le théorème de convergence dominée s'applique et on a l'existence des membres et l'égalité

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \mathbb{E}(t^{Y_n}) dt = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)} dt$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\int_0^1 h_n = \frac{1}{2^n} \sum_{j=0}^{2^n-1} \int_0^1 t^{j/2^n} dt = \frac{1}{2^n} \sum_{j=0}^{2^n-1} \frac{1}{1 + \frac{j}{2^n}}$$

or en utilisant les sommes de Riemann avec la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ continue sur $[0, 1]$, on a

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{1}{1 + k/N} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$$

d'où $\int_0^1 h_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \ln(2)$ (suite extraite) et ainsi $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)} dt = \ln(2)$

V. Dénombrabilité

32. On remarque que chaque ensemble D_n est fini de cardinal 2^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Ainsi $D = \bigcup_{n=1}^{+\infty} D_n$ est une réunion dénombrable d'ensemble fini, donc D est fini ou dénombrable.

Et ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $D_n \subset D$ donc D n'est pas fini d'où l'ensemble D est dénombrable

33. On considère $A = \{x \in \mathbb{N} / x \notin f(x)\}$. On a $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Soit a l'antécédent de A par f de sorte que $f(a) = A$

On a alors $a \in A \iff a \notin A$ ce qui est absurde.

Il n'existe pas d'application $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ bijective

34. On considère $\varphi \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.

Analyse : Soit $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ tel que $\mathbf{1}_A = \Phi(A) = \varphi$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) = 1 \iff \mathbf{1}_A(n) = 1 \iff n \in A$

donc $A = \{n \in \mathbb{N} \mid \varphi(n) = 1\}$ ce qui prouve l'unicité

Synthèse : On pose $A = \{n \in \mathbb{N} \mid \varphi(n) = 1\}$ Soit $n \in \mathbb{N}$.

Si $n \in A$, alors $\varphi(n) = 1 = \mathbf{1}_A(n)$

Si $n \notin A$, alors $\varphi(n) = 0 = \mathbf{1}_A(n)$

Ainsi φ et $\mathbf{1}_A : \mathbb{N} \longrightarrow \{0, 1\}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) = \mathbf{1}_A(n)$

donc $\mathbf{1}_A = \varphi$ (existence)

Conclusion : On a montré que tout élément de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ avait un unique antécédent par Φ .

Ainsi l'application Φ est bijective

35. Soit $(x_n) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. La série $\sum_{n \geq 0} \frac{x_n}{2^{n+1}}$ étant à termes positifs, on a par calcul dans $[0, +\infty]$:

$$0 \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x_n}{2^{n+1}} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1 < +\infty$$

pour la majoration on a reconnu une série géométrique de raison $1/2 \in]-1, 1[$.

Ceci prouve la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{x_n}{2^{n+1}}$ de somme $\Psi((x_n)_n) \in [0, 1]$.

d'où l'application Ψ est bien définie

on prends les suites (y_n) et (z_n) définies par $y_0 = 0$, $z_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $y_n = 1$ et $z_n = 0$

On a $(y_n) \neq (z_n)$ éléments de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ et $\Psi((y_n)_n) = 1/2 = \Psi((z_n)_n)$ (somme géométrique)

donc l'application Ψ n'est pas injective

Premier cas : soit $X = 1$. on considère la suite $(x_n)_n \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ constante égale 1.

On a alors $\Psi((x_n)_n) = 1 = X$

Deuxième cas : soit $X \in [0, 1[$. on définit la suite (x_n) par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n = d_{n+1}(X)$

D'après 15, on a $(x_n) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ et pour $N \in \mathbb{N}^*$, on a selon 14,

$$\sum_{n=0}^N \frac{x_n}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^N \frac{d_{n+1}(X)}{2^{n+1}} = \sum_{j=1}^{N+1} \frac{d_j(X)}{2^j} = \pi_{N+1}(X)$$

or d'après 13, on a $\pi_{N+1}(X) \leq X < \pi_{N+1}(X) + \frac{1}{2^{N+1}}$ d'où

$$\left| X - \sum_{n=0}^N \frac{x_n}{2^{n+1}} \right| \leq \frac{1}{2^{N+1}}$$

Ceci prouve la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{x_n}{2^{n+1}}$ de somme X .

Donc $X = \Psi((x_n)) \in \Psi(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$

Conclusion : On vient de montrer que $\forall X \in [0, 1], \exists x \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}, \Psi(X) = x$

Ce qui signifie que Ψ est surjective

36. Propriétés préliminaires : On remarque les propriétés suivantes de Ψ et D :

- (i) D est stable par division par 2, $\forall x \in D, |2x - 1| \in D \cup \{1\}$
et $\forall x, y \in D, x + y < 1 \implies x + y \in D$
- (ii) L'image d'une suite stationnaire à valeurs dans $\{0, 1\}$ par Ψ est à valeur dans $D \cup \{1\}$.
- (iii) 1 (respectivement 0) n'a qu'un seul antécédent par Ψ qui est la suite constante égale à 1 (respectivement à 0).
- (iv) Tout élément de $]0, 1[\setminus D^*$ admet un seul antécédent par Ψ qui n'est pas stationnaire.
- (v) Chaque élément de D^* admet exactement deux antécédents par Ψ qui sont stationnaires l'une à 1 et l'autre à 0.
- À ce stade du sujet nous admettrons les trois premières propriétés.

Soit $x \neq y$ dans $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ tel que $\Psi(x) = \Psi(y)$.

On a alors l'existence de $i_0 = \min \{n \in \mathbb{N} \mid x_n \neq y_n\}$ car toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un minimum. Sans perte de généralité, on suppose que $x_{i_0} = 0$ et $y_{i_0} = 1$.

Il suffira alors d'établir (à l'aide de (ii) et de la question précédente) que :

$$\forall n > i_0, x_n = 1 \text{ et } y_n = 0. \quad (\star)$$

On aura alors $\Psi(x) = \Psi(y) \in D$.

Ce qui prouvera bien que les éléments de $]0, 1[\setminus D^*$ admettent au plus un antécédent par Ψ c'est à dire (iv).

De plus vue la configuration de x et y , $\Psi(x)$ (qui est élément de D^*) admettra exactement deux antécédents ce qui permettra facilement de conclure quant à (v) car on sait que tout élément de D admet un antécédent par Ψ qui stationne à 0.

Il reste donc à établir $(\star)$!

$$\text{On a } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x_n}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y_n}{2^{n+1}} \text{ donc } \sum_{n=i_0+1}^{+\infty} \frac{x_n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{i_0+1}} + \sum_{n=i_0+1}^{+\infty} \frac{y_n}{2^{n+1}}$$

$$\text{d'où } 1 = \sum_{n=i_0+1}^{+\infty} \frac{x_n - y_n}{2^{n-i_0}} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x_{k+i_0} - y_{k+i_0}}{2^k}$$

On note pour $k \in \mathbb{N}^*$, $z_k = x_{k+i_0} - y_{k+i_0}$ et on a $z_k \in \{0, 1, -1\}$.

Pour obtenir le résultat voulu il suffit d'établir que $\forall k \in \mathbb{N}^*, x_{k+i_0} - y_{k+i_0} = z_k = 1$

Par l'absurde, on suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*, z_p \neq 1$

On a $1 = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z_k}{2^k}$ et on remarque que : $1 = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k}$ donc $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1-z_k}{2^k} = 0$

d'où $0 = \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1-z_k}{2^k} + \frac{1-z_p}{2^p} + \sum_{k=p+1}^{+\infty} \frac{1-z_k}{2^k}$

Or $\forall k \in \mathbb{N}^* \setminus \{p\}, \frac{1-z_k}{2^k} \geq 0$ et $\frac{1-z_p}{2^p} > 0$

d'où $0 > 0$ ce qui est absurde et ce qui permet de conclure.

Λ bien définie : Soit $x = (x_n) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. On a $\Psi(x) \in [0, 1]$.

D'après les remarques précédentes, on a :

$(\Psi(x) \in [0, 1[\setminus D^*)$ ou $(\Psi(x) \in D \cup \{1\}$ et x stationne à 1) ou $(\Psi(x) \in D^*$ et x stationne à 0)

ainsi tous les cas sont envisagés. De plus $[0, 1[$ est stable par $t \mapsto \frac{t}{2}$ et par $t \mapsto \frac{1+t}{2}$,

donc si $\Psi(x) \neq 1$ alors $\Lambda(x) \in [0, 1[$ et si $\Psi(x) = 1$ alors x stationne à 1 et $\Lambda(x) = \frac{1}{2} \in [0, 1[$

Ainsi $\Lambda(x)$ est bien défini dans $[0, 1[$. Ce qui prouve que Λ est bien définie.

Λ surjective : Soit $X \in [0, 1[$. On montre l'existence de $x \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ tel que $\Lambda(x) = X$.

Si $X \in [0, 1[\setminus D^*$: , alors la question précédente nous fournit $x \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ tel que $\Psi(x) = X$
et ainsi $X = \Lambda(x) = \Psi(x)$

Si $X \in D^*$ et $0 < X \leq \frac{1}{2}$: alors $2X \in D^* \cup \{1\}$.

donc $2X$ admet un antécédent $(x) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ par Ψ qui stationne à 1

On a alors $\Psi(x) \in D \cup \{1\}$ et donc $\Lambda(x) = X$.

Si $X \in D^*$ et $\frac{1}{2} < X$: alors $2X - 1 \in D^*$

donc $2X - 1$ admet un antécédent $(x) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ par Ψ qui stationne à 0 et ainsi $\Lambda(x) = X$

Λ injective : Soit x et $y \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ telles que $\Lambda(x) = \Lambda(y)$.

Premier cas $\Lambda(x) \in [0, 1[\setminus D^*$: alors $\Psi(x) = \Psi(y) = 0$ ou $\Psi(x) = \Psi(y) \in]0, 1[\setminus D$
et donc $\Psi(x)$ admet un seul antécédent par Ψ d'où $x = y$

Deuxième cas $\Lambda(x) \in D$ et $\Lambda(x) > \frac{1}{2}$:

Alors $\Psi(x) = \Psi(y) \in D^*$ et x, y sont des suites qui ne stationnent pas à 1

donc elles stationnent à 0 puis $x = y$

Troisième cas $\Lambda(x) \in D^*$ et $\Lambda(x) \leq \frac{1}{2}$:

On obtient de même que ces suites stationnent à 1 puis que $x = y$

Conclusion : Λ réalise une bijection de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ sur $[0, 1[$

37. On suppose par l'absurde que $[0, 1[$ est dénombrable.

alors d'après 36, $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ est dénombrable

alors d'après 34, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ est dénombrable

Ainsi il existe une bijection $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$

Absurde d'après 33

On conclut que $[0, 1[$ n'est pas dénombrable