



ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARISTECH,
TELECOM PARISTECH, MINES PARISTECH,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT Atlantique, ENSAE PARISTECH,
CHIMIE PARISTECH.

Concours Centrale-Supélec (Cycle International),
Concours Mines-Télécom, Concours Commun TPE/EIVP.

CONCOURS 2026

PREMIÈRE ÉPREUVE DE PHYSIQUE

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est
interdit.

*Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :*

PHYSIQUE I – MP

L'énoncé de cette épreuve comporte 10 pages de texte. Les données
sont regroupées en fin d'énoncé.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une
erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en
expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Problème 1 : Loi de Gladstone–Dale

Après avoir étudié les propriétés optiques de différents liquides dans le domaine du visible, Gladstone et Dale ont proposé en 1858 une loi empirique relative à l'indice de réfraction, noté n , indiquant que $n - 1$ est proportionnel à la masse volumique du liquide. Cette loi a ensuite été étendue au cas du fluide diélectrique homogène et isotrope, comme le sont les gaz et les mélanges de gaz. Cette partie du sujet propose une vérification expérimentale de cette loi pour l'air, et une explication théorique rudimentaire.

Nous notons n_0 l'indice de l'air à la pression p_0 et à la température T_0 ambiantes dans le laboratoire. Nous rappelons que l'indice de réfraction d'un milieu est défini par le rapport de la vitesse c de la lumière dans le vide sur la vitesse de phase v de la lumière dans le milieu considéré, soit $n = \frac{c}{v}$, cet indice est généralement plus grand que 1.

Q.1 Montrez que, sous réserve d'une approximation usuelle que vous préciserez, la loi de Gladstone-Dale, pour l'air, conduit à écrire que $n - 1$ est proportionnel au rapport de la pression sur la température de l'air. En travaillant à température constante, montrez que la variation d'indice $n - n_0$ est proportionnelle à la variation de pression.

Nous posons par la suite $n - n_0 = \frac{a}{T_0}(p - p_0)$ où a est une constante qui dépend de la composition de l'air (humidité, taux de CO_2 , ...).

Q.2 La variation de l'indice de l'air avec la pression est très faible, mais parfaitement mesurable avec un instrument très sensible comme l'interféromètre de Michelson. L'interféromètre est éclairé par une source étendue monochromatique de longueur d'onde λ dans le vide, et réglé de façon à observer des anneaux sur un écran. Représentez, sur un schéma symbolique, un interféromètre de Michelson en précisant la position de la source lumineuse et de l'écran. Des lentilles minces dont vous préciserez le rôle sont à utiliser. La lame séparatrice sera représentée par un simple trait. Quelle est la position relative des miroirs ? Nous notons f' la distance focale de la lentille de projection. Déduisez-en la différence de marche δ induite par l'interféromètre dans cette configuration en précisant vos notations. En supposant que le centre de la figure d'interférence est un point brillant d'éclairement maximal, donnez le rayon du $k^{\text{ième}}$ anneau brillant en fonction de k , f' , λ et δ_0 la différence de marche au centre de la figure. On supposera les angles des rayons lumineux par rapport à l'axe optique de la lentille suffisamment petits pour en négliger l'ordre 3 devant les précédents.

Une cuve est introduite entre un miroir de l'interféromètre et la lame séparatrice. Cette cuve contient de l'air dont on peut faire varier la pression par une simple pompe à main. Un manomètre permet de mesurer la pression relative atteinte. En gonflant lentement, l'air de la cuve reste sensiblement à température ambiante. Une microfuite permet ensuite de ramener très lentement la pression de la cuve à p_0 . Dans votre analyse, la cuve sera idéalisée et vous êtes invités à négliger le rôle des parois du dispositif.

Une photodiode est placée à la place de l'écran au centre de la figure d'interférence et permet de décompter le nombre de franges brillantes N qui défilent lentement lors de la diminution de la pression dans la cuve. La longueur de la cuve traversée par les rayons lumineux est $L = 4 \text{ cm}$.

Q.3 Reliez la différence de marche supplémentaire due à la présence de la cuve à la variation d'indice $n - n_0$, puis au nombre de franges N , sur la frange centrale éclairant la photodiode. Déduisez-en l'expression de N en fonction notamment de a et de la variation de pression $p - p_0$ dans la cuve.

Q.4 Pour $T_0 = 300 \text{ K}$ et $\lambda = 530 \text{ nm}$, le tableau suivant donne le nombre de franges N pour quelques valeurs de surpression $p - p_0$ exprimées en bar. Calculez numériquement le coefficient a en détaillant votre démarche.

$p - p_0$	0	0,5	0,7	1	1,3	1,5	1,8	2	2,3	2,5
N	0	17	26	40	56	68	82	92	102	111

Nous utilisons par la suite la valeur en ordre de grandeur de $a = 1,0 \times 10^{-6} \text{ K} \cdot \text{Pa}^{-1}$. La loi empirique de Gladstone-Dale pour l'air peut être expliquée dans le cadre du modèle de l'électron élastiquement lié. Nous assimilons une molécule d'un gaz composant l'air à un noyau et deux électrons optiquement actifs. Nous notons $\vec{r}(t)$ le vecteur position d'un électron par rapport au noyau, $\vec{v}(t)$ sa vitesse, m_e la masse de l'électron et $-e$ sa charge électrique. L'interaction entre le noyau et l'électron est modélisée par deux forces s'exerçant sur l'électron : une force de rappel élastique $-m_e\omega_0^2\vec{r}$ et une force de frottement fluide $-m_e\Gamma\vec{v}$. L'électron est soumis au champ électrique de l'onde plane que nous considérons localement identique à $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i\omega t}$.

Q.5 Établir l'équation différentielle régissant l'évolution de la position de l'électron. Pourquoi n'avons nous pas pris en compte l'effet du champ magnétique de l'onde sur l'électron ? Nous nous intéressons à la solution en régime forcé de cette équation. En utilisant la notation complexe, donnez l'expression de la vitesse $\vec{v}$ d'un électron en fonction du champ électrique.

Q.6 Pourquoi ne prenons-nous pas en compte le mouvement des noyaux des molécules induit par le champ électrique de l'onde plane ? Montrez alors que le vecteur densité de courant électronique total peut s'écrire :

$$\vec{j} = \gamma \vec{E} \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{\kappa n^* e^2}{m_e} \frac{i\omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\Gamma\omega}$$

où κ est un facteur numérique que l'on déterminera et n^* est le nombre volumique, c'est-à-dire le nombre de molécules par unité de volume du gaz.

Q.7 À quel type de filtre correspond γ ? Soit γ_0 le maximum du module de γ , déterminez l'expression de γ_0 . Nous définissons la fonction de transfert $H(\omega) = \frac{\gamma}{\gamma_0}$, exprimez cette fonction de transfert et précisez l'expression de son facteur de qualité Q . Représentez le gain de ce filtre dans un diagramme de Bode pour un facteur de qualité de l'ordre de la centaine.

Q.8 L'air est assimilé à un milieu neutre électriquement mais polarisable : une onde électromagnétique dans le domaine du visible induit un mouvement des électrons qui se traduit par l'apparition d'un vecteur densité de courant selon la question précédente. Donnez alors les équations de Maxwell dans ce milieu. Montrer qu'en introduisant une permittivité relative ϵ_r complexe que l'on identifiera, on peut écrire l'équation de propagation pour le champ électrique sous la forme $\Delta \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$.

Q.9 On néglige les frottements fluides et on suppose que la pulsation de l'onde ω est très inférieure à ω_0 , montrez alors que cette permittivité relative se simplifie en :

$$\epsilon_r = 1 + \frac{\kappa e^2 n^*}{m_e \epsilon_0 \omega_0^2}$$

Quelle est la relation entre la permittivité relative et l'indice n ? En remarquant que $n^2 - 1 \ll 1$, donnez l'expression de l'indice en fonction de n^* , e , m_e , ϵ_0 et ω_0 .

Q.10 Reliez le nombre volumique n^* à la pression et la température de l'air. Déduisez-en l'expression de l'indice en fonction de la pression, de la température et des autres constantes. Exprimez alors le coefficient a en fonction de e , m_e , ϵ_0 , k_B et ω_0 . Calculez la valeur numérique de ω_0 et commentez le résultat obtenu pour a .

Problème 2 : Fonctions spéciales

Ce problème comporte trois parties indépendantes.

Bon nombre de problèmes rencontrés en physique peuvent être résolus à l'aide de *fonctions spéciales*. Ces fonctions définies mathématiquement sont implémentées dans de nombreuses bibliothèques informatiques (comme `scipy`) et peuvent être utilisées aussi simplement qu'une fonction sinus ou racine carrée qui sont elles aussi d'une certaine manière des fonctions spéciales et tout aussi analytiques...

On rencontre bien souvent des résolutions numériques de problèmes physiques alors que l'utilisation de ces fonctions spéciales permet une résolution complète et analytique. Ce problème se propose d'illustrer l'intérêt de ces *fonctions spéciales*.

Partie 1 : La fonction de W de Lambert

I – Tir d'un projectile sans frottements

Un projectile assimilé à un point matériel de masse m est lancé à partir du sol en O avec une vitesse initiale $\vec{v}_0 \in (O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ et faisant un angle θ_0 avec l'horizontale dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

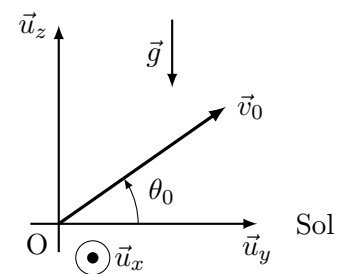


FIGURE 1 – Tir d'un projectile.

- Q.1** Rappeler la définition d'un référentiel galiléen. Dans quelle mesure le référentiel terrestre peut-il être supposé galiléen ?
- Q.2** Établir les équations horaires du mouvement. Montrer que le mouvement est plan.
- Q.3** Établir l'équation de la trajectoire. Quelle est la forme de la trajectoire ? Est-elle symétrique ?
- Q.4** Déterminer les coordonnées du sommet S de la trajectoire. Définir la portée ℓ du tir et établir son expression. Quel est l'angle θ_0 assurant un tir de portée maximale ?

II – Tir d'un projectile avec frottements

On considère maintenant que le projectile est soumis à une force de frottements proportionnelle à la vitesse : $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$ avec $\alpha > 0$.

- Q.5** Quelle est la dimension du coefficient α ? Définir à partir de α un temps caractéristique τ . Le mouvement reste-t-il plan ?
- Q.6** Établir, en fonction de g , τ , $v_0 = \|\vec{v}_0\|$, θ_0 et t , les nouvelles équations horaires du mouvement.
- Q.7** Dans la situation où $t \ll \tau$, simplifier les équations horaires de la trajectoire et donner l'allure du mouvement.
- Q.8** Dans la situation où $t \gg \tau$, simplifier les équations horaires du mouvement en faisant apparaître une vitesse limite v_∞ . Où retombe le projectile ?
- Q.9** Dédire des résultats précédents, l'allure globale de la trajectoire dans une situation où le temps de vol est grand devant τ , en séparant la trajectoire en trois phases.
- Q.10** Tracer l'allure de la trajectoire pour un temps de vol de l'ordre de τ .

III – Portée maximale d'un tir avec frottement

Q.11 Dresser le tableau de variation de la fonction $T : \chi \mapsto T(\chi) = \chi e^\chi$ et déterminer la valeur β de son minimum global.

La fonction W de LAMBERT est définie comme étant la fonction réciproque de T sur $[\beta, +\infty[$. Reproduire le graphe de T représenté sur la partie gauche de la FIGURE 2 et expliquer comment en déduire l'allure de W représenté sur la partie droite.

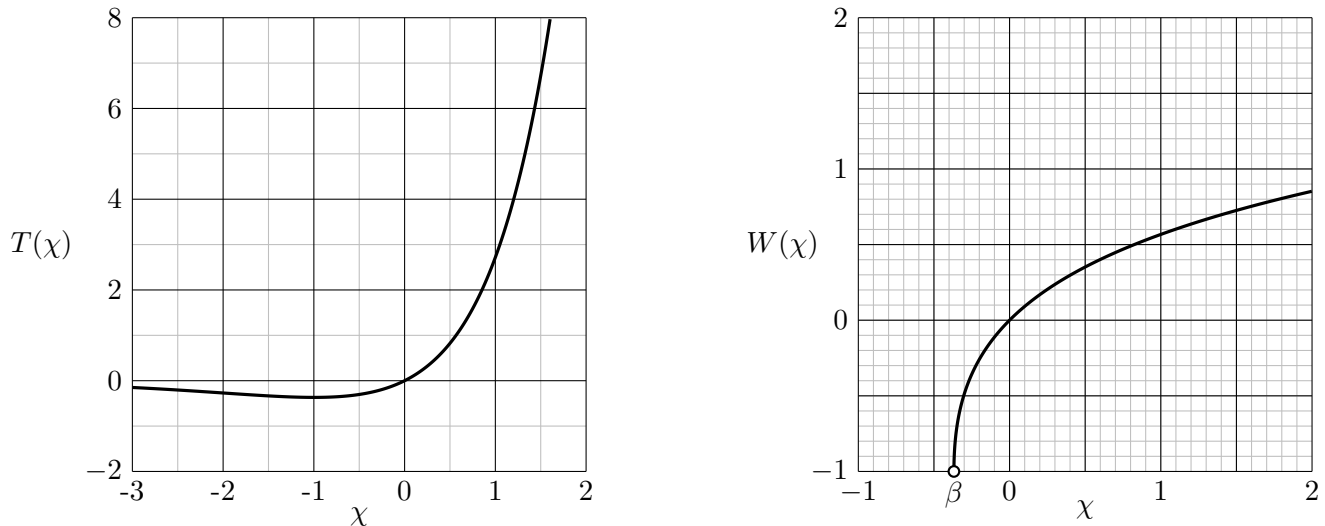


FIGURE 2 – Représentations graphiques de $T(\chi)$ (à gauche) et $W(\chi)$ (à droite).

Q.12 On peut montrer que : $(\chi + \exp[W(\chi)]) W'(\chi) = 1$. Quelle est la valeur de $W(0)$?

On souhaite appliquer le schéma d'Euler explicite avec un pas $h = 0,0001$ pour résoudre cette équation différentielle. Donner le code python permettant d'obtenir une représentation graphique de $W(\chi)$ sur l'intervalle $[0; 2,5[$.

La fonction $W(\chi)$ est implémentée dans `scipy` et s'appelle avec : `from scipy.special import lambertw`. On montre que si $ad \neq 0$, la solution de l'équation $at + b + ce^{dt} = 0$ pour l'inconnue t est donnée par l'expression

$$t = -\frac{b}{a} - \frac{1}{d} W\left(\frac{cd}{a} \exp\left(-\frac{bd}{a}\right)\right)$$

Q.13 En déduire à quel instant $t^* > 0$ le projectile touche le sol. On posera $u = -\left(1 + \frac{v_0 \sin \theta_0}{g\tau}\right)$.

Q.14 On rappelle que par définition $W \exp(W) = \text{Id}$ où Id est la fonction identité : $\chi \mapsto \chi$. En déduire que la portée est donnée par $\ell = \tau v_0 \cos \theta_0 (1 - W(ue^u)/u)$.

En posant $\gamma = v_0/v_\infty$, on montre que l'angle initial donnant la portée maximale est :

$$\theta_{\max} = \begin{cases} \arcsin \left(\frac{\gamma W\left(\frac{\gamma^2 - 1}{e}\right)}{\gamma^2 - 1 - W\left(\frac{\gamma^2 - 1}{e}\right)} \right) & \text{si } \gamma \neq 1 \\ \arcsin \left(\frac{1}{e - 1} \right) \approx 35,6^\circ & \text{si } \gamma = 1 \end{cases}$$

Q.15 À l'aide de la FIGURE 2, déterminer la valeur numérique de l'angle assurant la portée maximale pour $v_0 = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ et $\tau = 0,4 \text{ s}$.

Partie 2 : Intégrale elliptique de première espèce

Dans toute cette partie on néglige les frottements de l'air.

On étudie un pendule simple constitué d'une masse ponctuelle m et d'une tige rigide de longueur ℓ et de masse négligeable, astreint à évoluer dans un plan vertical $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$.

On repère sa position par l'angle $\theta(t)$. À $t = 0$ on lâche le pendule sans vitesse initiale avec $\theta(t = 0) = \theta_0 \in]0, \pi/2[$.

Q.16 Établir l'équation différentielle du mouvement vérifiée par la fonction $\theta(t)$.

Q.17 On fait l'approximation des petits angles de sorte que $\sin \theta \approx \theta$. Établir dans ces conditions la période T_0 des oscillations. Quelle est la propriété remarquable de la période dans le cadre de cette approximation ?

Q.18 Déterminer l'expression générale de $\frac{d\theta}{dt}$ sans faire l'approximation des petits angles. En déduire que la période T des oscillations du pendule est donnée par :

$$T = \frac{2T_0}{\pi} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos \theta - \cos \theta_0)}}$$

La propriété remarquable de la question précédente est-elle conservée ?

En effectuant le changement de variable $\sin \frac{\theta}{2} = \sin \phi \sin \frac{\theta_0}{2}$, on montre que :

$$T = \frac{2T_0}{\pi} \mathcal{K} \left(\sin^2 \frac{\theta_0}{2} \right) \quad \text{avec} \quad \mathcal{K}(\chi) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - \chi \sin^2 \phi}}$$

On souhaite calculer l'intégrale $\mathcal{K}(\chi)$ par la méthode des rectangles médians pour un angle $\theta_0 = \pi/3$.

Q.19 Après avoir tracé le graphe de la fonction $\chi \mapsto 1 + \sqrt{\chi}$ pour $\chi \in [0; 9]$, illustrer le principe de la méthode des rectangles médians pour calculer le réel $I = \int_0^9 (1 + \sqrt{\chi}) d\chi$ en utilisant 9 rectangles. Si on double le nombre de rectangles utilisés, qu'en est-il de la différence entre la valeur exacte de I et la valeur approchée numériquement par la méthode des rectangles médians ?

Q.20 Recopier et compléter le code suivant permettant de calculer $\mathcal{K}(\chi)$ par la méthode des rectangles médians.

```

1  import math as m
2  def f(x,phi):
3      return.....
4
5  S=0.
6  N=100
7  a=0.
8  b=m.pi/2.
9  pas=.....
10 theta_0=m.pi/3.
11 x=m.sin(theta_0)**2
12 for i in range(N):
13     phi=.....
14     S=.....
15
16 print (pas * S)
```

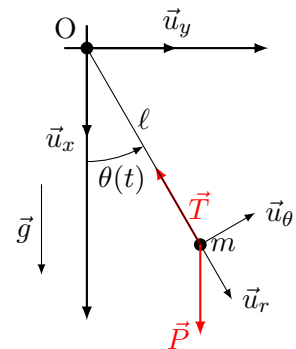


FIGURE 3 – Pendule simple.

La fonction $\chi \mapsto \mathcal{K}(\chi)$ est nommée intégrale elliptique complète de première espèce. Elle est implémentée dans `scipy` et s'appelle directement avec : `from scipy.special import ellipk`.

Q.21 En utilisant la FIGURE 4, pour un pendule tel que $T_0 = 1$ s, évaluer T lorsque $\theta_0 = 50^\circ$. Quel est le décalage temporel induit par la prise en compte de l'approximation des petits angles si l'on envisage de mesurer une heure ?

Au XVII^e siècle les puissances maritimes désiraient posséder des instruments précis pour la mesure du temps afin de faciliter la navigation (notamment pour déterminer la longitude). Les rois de France et d'Angleterre avaient offert des prix importants à qui serait capable de réaliser un chronomètre précis, fiable et utilisable en mer.

Christiaan HUYGENS (1629-1695) motivé par ce problème étudia le pendule conique et le pendule oscillant entre deux lames courbes. Il parvint à démontrer que des lames en forme de cycloïde assurent l'isochronisme rigoureux des oscillations.

Q.22 Dans quelle situation courante rencontre-t-on la cycloïde ?

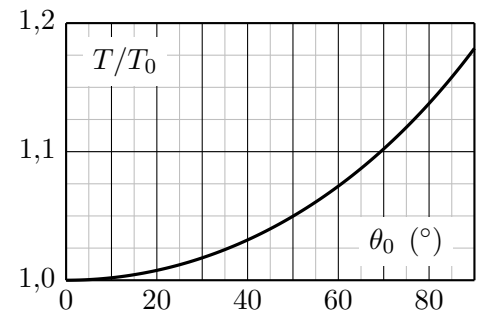


FIGURE 4 – $\theta_0 \mapsto T(\theta_0)/T_0$.

Partie 3 : La fonction d'erreur de Gauss : erf

I – Introduction au problème de Stefan

Un certain nombre de problèmes géologiques importants peuvent être modélisés par le chauffage ou le refroidissement instantané d'un demi-espace semi-infini. Au milieu du XIX^e siècle, Lord KELVIN a ainsi utilisé cette idée pour estimer l'âge de la Terre. Il supposa qu'à la surface le flux d'énergie thermique résultait du refroidissement d'un flux initialement chaud de la Terre et a conclu que l'âge de la Terre était environ 65 millions d'années. On retrouve ces phénomènes en étudiant le refroidissement de la lithosphère océanique ou l'évolution d'une coulée de magma.

Q.23 Comment explique-t-on de nos jours le résultat erroné obtenu par Lord KELVIN ?

On étudie un milieu matériel semi-infini défini par $y > 0$ dont la surface subit un changement instantané de température. Initialement à $t = 0^-$, le demi-espace est à la température uniforme T_1 ; pour $t > 0$, la surface $y = 0$ est maintenue à une température constante T_0 . Si $T_1 > T_0$, le milieu matériel se refroidit et sa température diminue. La situation est représentée à la FIGURE 2 pour le cas $T_1 > T_0$.

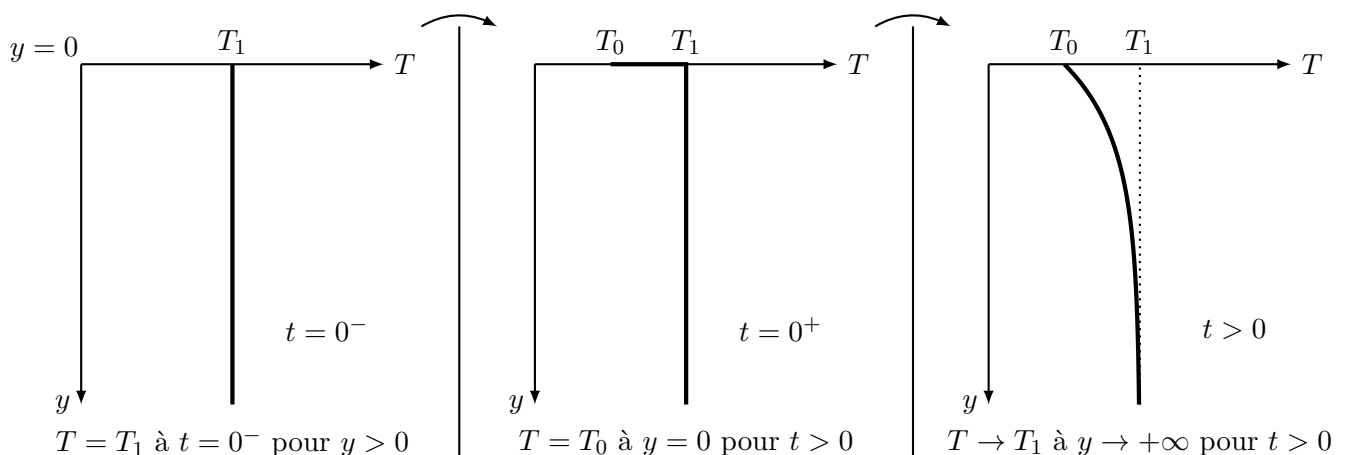


FIGURE 5 – Évolution de la température.

Le flux thermique élémentaire, défini comme la quantité d'énergie traversant une surface élémentaire dS pendant dt , est noté $\Delta\phi_Q$.

- Q.24** Rappeler la définition du vecteur $\vec{j}_Q$, densité de flux thermique. Quelle est sa dimension ?
 Rappeler la loi de Fourier, ainsi que ses conditions d'application.
 En déduire la dimension de la conductivité thermique κ .

On étudie une tranche mésoscopique de sol de masse m de masse volumique ρ et de capacité thermique massique c , comprise entre y et $y + dy$ de surface $\mathcal{S}$.

- Q.25** Quelle est l'énergie thermique reçue par cette tranche entre t et $t + dt$?
 Pourquoi étudie-t-on une tranche « mésoscopique » ?

Établir l'expression de sa variation d'énergie interne dU en fonction de $\frac{\partial j_Q}{\partial y}$, $\mathcal{S}$, dy et dt , puis en fonction de ρ , c , $\mathcal{S}$, $\frac{\partial T}{\partial t}$, dy et dt .

En déduire l'équation de la chaleur à une dimension $\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$ dans laquelle on précisera l'expression et la dimension du coefficient D de diffusion thermique.

En déduire l'expression d'une longueur caractéristique L en fonction de D et du temps t .

On introduit la température adimensionnée : $\theta(y, t) = \frac{T(y, t) - T_1}{T_0 - T_1}$.

- Q.26** Quelle est l'équation vérifiée par $\theta(y, t)$? Déterminer les valeurs de $\theta(y > 0, t = 0)$, $\theta(y = 0, t > 0)$ et $\theta(y \rightarrow \infty, t > 0)$.

On introduit une variable de similarité sans dimension $\eta = \frac{y}{2\sqrt{Dt}}$ et on suppose que θ n'est une fonction que de cette seule variable η .

- Q.27** Montrer que $\frac{d^2\theta(\eta)}{d\eta^2} + 2\eta \frac{d\theta(\eta)}{d\eta} = 0$.

- Q.28** En utilisant la fonction $\varphi(\eta) = \frac{d\theta(\eta)}{d\eta}$, montrer que $\theta(\eta) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-z^2} dz$.

On donne $\int_0^{+\infty} e^{-z^2} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. En déduire une expression de $T(y, t)$ faisant apparaître une intégrale.

La fonction $\chi \mapsto \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\chi e^{-z^2} dz$ est appelée fonction d'erreur de GAUSS et est souvent notée $\text{erf}(\chi)$. Elle est implémentée dans `scipy` et s'appelle en utilisant la commande : `from scipy.special import erf`.

II – Formation d'une croûte de lave solide

Dans cette dernière partie on s'intéresse à une coulée de lave en fusion et à la formation d'une croûte solide à sa surface. On étudie alors l'augmentation de l'épaisseur de cette croûte en fonction du temps.

À la surface extérieure, en $y = 0$, la lave est en contact avec l'air à la température constante T_0 . La lave en fusion à la température T_f est donc soudainement portée à la température T_0 à $t = 0$. Dans ces conditions, la couche superficielle de la lave se solidifie, et on note $y_s(t)$ l'épaisseur de la couche de lave solide.

Nous devons donc résoudre l'équation de la chaleur dans l'espace $0 \leq y \leq y_s(t)$ avec comme conditions aux limites $T = T_0$ en $y = 0$, et $T = T_f$ en $y = y_s(t)$, et comme condition initiale $y_s = 0$ à $t = 0$.

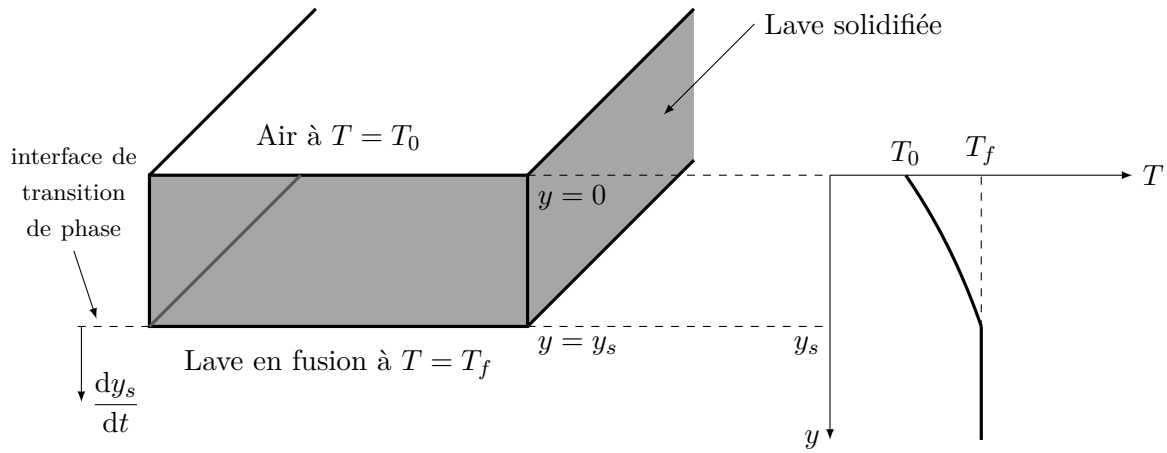


FIGURE 6 – Formation d'une croûte de lave solide.

La position $y_s(t)$ de l'interface de transition de phase est une fonction *a priori* inconnue du temps. Comme dans la situation précédente, il n'y a pas d'échelle de longueur définie dans ce problème. Pour cette raison, on travaillera encore une fois avec la variable de similarité sans dimension $\eta = \frac{y}{2\sqrt{Dt}}$.

On utilisera également la température adimensionnée $\theta(y, t) = \frac{T(y, t) - T_0}{T_f - T_0}$.

La profondeur de l'interface de solidification $y_s(t)$ doit enfin s'adapter à la longueur caractéristique de la diffusion thermique. Nous supposons que celle-ci varie proportionnellement à la racine carrée du temps, de telle sorte que : $\eta_s = \frac{y_s(t)}{2\sqrt{Dt}} = \text{cte} = \lambda$. Cette constante est inconnue et reste à déterminer.

Q.29 En reprenant l'équation de la **Q.27**, montrer que $\theta(\eta) = \frac{\text{erf}(\eta)}{\text{erf}(\lambda)}$.

Afin d'obtenir l'expression puis la valeur de la constante nous allons étudier la solidification d'une tranche de lave d'épaisseur dy_s entre les instants t et $t + dt$.

Q.30 Quelle est l'énergie δQ libérée par la solidification à la température T_f d'une tranche dy_s de lave de surface $\mathcal{S}$? On l'exprimera en fonction de la masse volumique ρ de la lave en fusion et de l'enthalpie de fusion massique notée $\Delta h_{\text{sol} \rightarrow \text{liq}}$.

Q.31 Toute l'énergie libérée par la solidification doit être évacuée par diffusion dans la lave solide car la lave en fusion reste à la température T_f . Montrer que :

$$\rho \Delta h_{\text{sol} \rightarrow \text{liq}}(T_f) \frac{dy_s}{dt} = \kappa \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=y_s}$$

Q.32 En déduire que : $\frac{\exp(-\lambda^2)}{\lambda \text{erf}(\lambda)} = \frac{\sqrt{\pi}}{c(T_f - T_0)} \Delta h_{\text{sol} \rightarrow \text{liq}}(T_f)$.

Q.33 Quel algorithme peut-on utiliser pour obtenir la constante λ numériquement ? Expliquer en quelques mots son fonctionnement.

Q.34 À l'aide de la FIGURE 7, estimer la valeur numérique de λ .

En déduire l'épaisseur de la croûte de lave six mois après l'éruption.

Comparer votre résultat à ceux de la figure FIGURE 8 tirés d'une expérience ¹

1. Wright, T. L., Peck, D. L., and Shaw, H. R. (1976). Kilauea lava lakes : Natural laboratories for study of cooling, crystallization, and differentiation of basaltic magma. In The Geophysics of the Pacific Ocean Basin and its Margin, eds. G. H. Sutton, M. H. Manghnani, R. Moberly, and E. U. McAfee, vol. 19 of Geophysical Monograph Series, Washington, D.C. : American Geophysical Union, pp. 375–90.

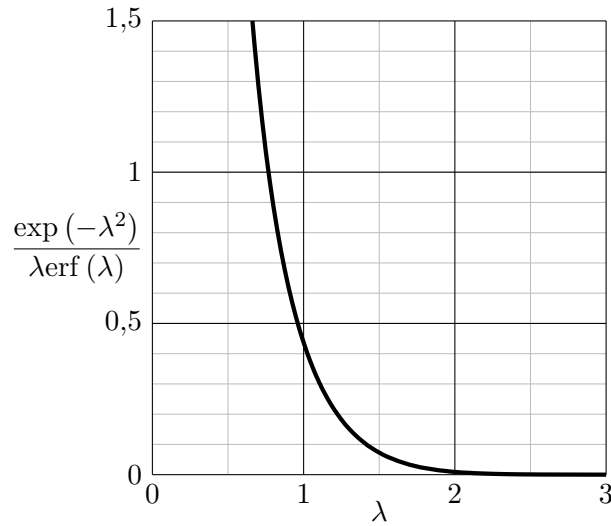


FIGURE 7 – Graphique de $\lambda \mapsto \frac{\exp(-\lambda^2)}{\lambda \operatorname{erf}(\lambda)}$.

On donne les valeurs numériques suivantes :

- $\Delta h_{\text{sol} \rightarrow \text{liq}}(T_f) = 400 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$
- $c = 1 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
- $T_f - T_0 = 1000 \text{ K}$
- $\rho = 2600 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
- $D = 7 \times 10^{-7} \text{ SI}$
- $\sqrt{\pi} \approx 1,77$

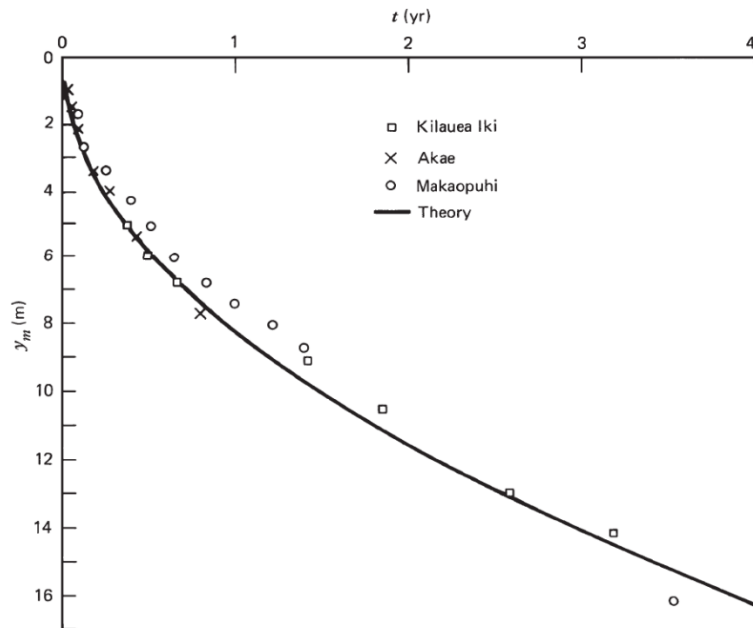


FIGURE 8 – Épaisseurs des croûtes de lave solides à la surface des lacs de lave dans les trois cratères à fosse Kilauea Iki (1959), Alae (1963) et Makaopuhi (1965) sur le volcan Kilauea, Hawaïi (Wright et al., 1976), et résultat théorique.

Données

Constantes fondamentales

Permittivité diélectrique du vide :	$\varepsilon_0 = 8,9 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$
Perméabilité magnétique du vide :	$\mu_0 = 1,3 \times 10^{-6} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$
Célérité de la lumière dans le vide :	$c = 3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
Constante d'Avogadro :	$\mathcal{N}_A = 6,0 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Charge élémentaire :	$e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$
Masse de l'électron :	$m_e = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$
Constante de Planck :	$h = 6,6 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
Constante de Planck réduite :	$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,1 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
Constante de Boltzmann :	$k_B = 1,4 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$
Constante des gaz parfaits :	$R = k_B \mathcal{N}_A = 8,3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$

Formulaire d'analyse

Cosinus hyperbolique :	$\text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
Sinus hyperbolique :	$\text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
Développement de Taylor de th au voisinage de 0 :	$\text{th}(x) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$
Relation entre opérateurs vectoriels :	$\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{u} = \overrightarrow{\text{grad}} (\text{div} \vec{u}) - \Delta \vec{u}$
Rotationnel en coordonnées cartésiennes :	

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{f} = \left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z$$

• • • FIN • • •