

Cours et exos : PRODUITS SCALAIRES RÉELS (tout)

Définition d'une forme bilinéaire, d'une forme bilinéaire symétrique, d'une forme bilinéaire positive et d'une forme bilinéaire définie positif.

Produit Scalaire, espace Pré-hilbertien réel (espace vectoriel munit d'un PS) et espace euclidien $\mathbb{R}$ -eve (espace vectoriel de dimension finie munit d'un PS). Norme, distance euclidiennes associés à un P.S.

Expression matriciel du P.S. : $X^T AY$ et $X^T Y$.

Relation de polarisation entre produit scalaire et norme. Identité du parallélogramme.

Base OTN, expression du PS dans une base OTN

Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt pour une suite libre. Matrice de passage en dimension finie.

Orthogonal d'un sous-ensemble de $E : F^\perp$, propriétés.

Théorème : Si $E = F \oplus G$ et $F \perp G$ alors $G = F^\perp$.

■ **Théorème fondamental** : Si F est un SEV de dimension finie d'un PHR E , alors $F \oplus F^\perp = E$.

■ **Contre-exemples où $F \oplus F^\perp \neq E$** :

• $E = C^0([a, b], \mathbb{R})$ et F l'ensemble des fonctions polynomiales avec le PS $(f|g) = \int_{[a,b]} fg$.

• $E = \mathbb{R}[X]$ et $F = \{P \in E \text{ tel que } P(1) = 0\}$ son PS canonique.

Projection orthogonale, expression dans une base OTN, distance vecteur-SEV.

Isomorphisme canonique entre un espace euclidien et son dual.

Adjoint : définition - expression dans une base OTN - sous-espace stable - matrice de l'adjoint.

■ $\ker u^* = (Im u)^\perp$, $Im u^* = (\ker u)^\perp$, rang

Automorphismes orthogonaux (isométries (vectorielles)), matrices orthogonales, réflexions, symétries orthogonales.

■ Groupes $\mathcal{O}(E)$, $O_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{O}^+(E)$, $SO_n(\mathbb{R})$, étude complète en dimension 1, 2 et 3.

(Les étudiants doivent savoir parfaitement trouver les éléments (axe et angle) d'une rotation).

Angle orientés de 2 vecteurs d'un plan orienté.

■ * Décomposition :

$$\forall A \in O_n(\mathbb{R}), \text{ il existe 2 entiers } p \text{ et } q, \text{ des réels } \theta_1, \dots, \theta_r \text{ tel que } A = P \begin{pmatrix} I_p & & & 0 \\ & -I_q & & \\ & & R_{\theta_1} & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & R_{\theta_r} \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$\text{avec } P \in O_p(\mathbb{R}) \text{ et } R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

■ Diagonalisation (OTN) des endomorphismes symétriques et matrices symétriques : **théorème spectral** (version endomorphisme et matriciel). Caractérisation des projecteurs orthogonaux.

Endomorphismes, matrices symétriques positives ou définies positives.

Notation $S^+(E)$, $S^{++}(E)$, $S_n^+(\mathbb{R})$, $S_n^{++}(\mathbb{R})$.

■ Caractérisation avec le spectre.

■ Norme subordonnée à une norme euclidienne : $\|u\|$ est la plus grande valeur propre de $u^* \circ u$.

Complément : produit scalaire canonique et norme de Schur sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Prévisions : Équations différentielles, systèmes différentiels.