

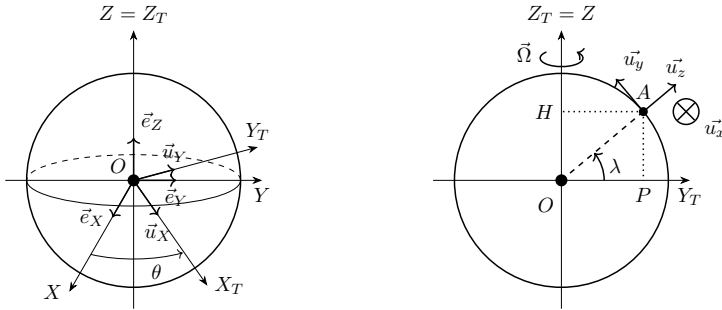
DM 11

Mécanique, mécanique quantique

Exercice 1 : Mécanique terrestre

Cet exercice s'intéresse à quelques aspects de la mécanique à la surface terrestre. La Terre est assimilée à une boule homogène de centre noté O , de rayon $R_T = 6,38 \times 10^3$ km et de masse $M_T = 5,98 \times 10^{24}$ kg. Le référentiel géocentrique ($\mathcal{R}_G$) est supposé galiléen. On le considère comme le référentiel absolu et on le munit du repère absolu ($OXYZ$) et de la base canonique ($\vec{e}_X, \vec{e}_Y, \vec{e}_Z$).

Par rapport à ($\mathcal{R}_G$), le référentiel terrestre ($\mathcal{R}_T$) est en rotation uniforme autour de l'axe des pôles (SN) qui coïncide avec (OZ), fixe dans ($\mathcal{R}_G$), avec une vitesse angulaire constante $\omega = 7,29 \times 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. On munit ($\mathcal{R}_T$) du repère ($OX_T Y_T Z_T$), dont la base orthonormale directe associée est ($\vec{u}_X, \vec{u}_Y, \vec{u}_Z = \vec{e}_Z$). La rotation est paramétrée par l'angle $\theta = (\vec{e}_X, \vec{u}_X)$ tel que $\omega = \dot{\theta}$.



On considère un point A de la surface terrestre, fixe dans ($\mathcal{R}_T$), situé dans le plan ($OY_T Z_T$) à la latitude λ (voir ci-dessus) et on appelle P son projeté dans le plan de l'équateur. L'angle λ peut varier entre $-\pi/2$ et $+\pi/2$: il est négatif dans l'hémisphère Sud et positif dans l'hémisphère Nord.

Dans tout l'exercice, les calculs se feront dans la base orthonormée directe ($\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$) indiquée sur le schéma ci-dessus. On étudie le mouvement d'un point matériel M de masse m dans le référentiel terrestre ($\mathcal{R}_T$). Ce point reste toujours au voisinage du point A et proche de la surface terrestre. On pose :

$$\vec{AM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$$

avec $\vec{OM} \approx \vec{OA} = R_T \vec{u}_z$. Le projeté de M sur l'axe de rotation SN sera noté H . Enfin, comme M reste proche de la surface terrestre, le champ de gravitation en M pourra s'approximer par $\vec{G}_T(M) = -g_0 \vec{u}_z = -\mathcal{G} \frac{M_T}{R_T^2} \vec{u}_z$ avec $\mathcal{G} = 6,67 \times 10^{-11}$ SI la constante universelle de gravitation.

I – Champ de pesanteur terrestre

Q.1 Calculs préliminaires.

- Exprimer les trois vecteurs ($\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$) dans la base ($\vec{u}_X, \vec{u}_Y, \vec{u}_Z$).
- À partir de la relation générale donnant l'accélération d'entraînement $\vec{a}_e(M)$ du point M , montrer que celle-ci peut aussi se mettre sous la forme : $\vec{a}_e(M) = -\omega^2 \vec{HM}$.
- Expliquer pourquoi $\vec{v}_{/\mathcal{R}_T}(M) = \dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y + \dot{z}\vec{u}_z$.

Q.2 Montrer que lorsque la seule force d'interaction que subit le point M est gravitationnelle, le principe fondamental de la dynamique s'écrit dans le référentiel $\mathcal{R}_T$:

$$m\vec{a}_{/\mathcal{R}_T}(M) = m\vec{g} - 2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{/\mathcal{R}_T}(M)$$

où $\vec{g}$ est un vecteur que l'on explicitera en fonction de $g_0 \vec{u}_z$, ω et $\vec{HM}$.

- Q.3**
- Expliciter les composantes de $\vec{g}$ dans la base ($\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$) en fonction de g_0 , ω , λ et R_T .
 - Soit α l'angle entre $\vec{AO}$ et $\vec{g}$. Déterminer $\tan \alpha$ en fonction de g_0 , ω , λ et R_T .
Application numérique : calculer α à la latitude $\lambda = 45^\circ$ Nord.

Q.4 Donner l'expression de $\Delta g = g_{\max} - g_{\min}$, différence des normes de l'accélération de la pesanteur aux pôles (maximale) et à l'équateur (minimale). Calculer la valeur numérique de Δg . En réalité, on mesure $\Delta g = 52,10 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Proposer une raison pour expliquer l'écart trouvé.

Compte tenu des valeurs numériques calculées, on admettra par la suite que les composantes de $\vec{g}$ dans la base ($\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$) sont $(0, 0, -g)$ où $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ est une constante.

II – Pendule de Foucault

Un pendule de Foucault est un pendule simple constitué d'un fil inextensible de longueur L suspendu à un point B sur un axe (Δ) qui est la verticale locale du point A , de sorte que $\vec{AB} = L\vec{u}_z$. À l'autre bout du fil, on attache un objet M de masse m . La longueur du fil est en réalité très légèrement inférieure à L afin que le point M ne touche jamais le sol. L'étude est menée dans le référentiel terrestre ($\mathcal{R}_T$) non-galiléen. Pour les applications numériques, on prendra $\lambda = 45^\circ$ Nord et $L = 15$ m.

Q.5 On note $\vec{T}$ la tension exercée par le fil sur le point M et T sa norme. Déterminer l'expression de $\vec{T}$ en fonction de T , du vecteur $\vec{MB}$ et de L .

Q.6 Établir les trois équations différentielles auxquelles obéissent les trois coordonnées x , y et z .

Dans la suite du problème, on étudie les petites oscillations au voisinage de A , ce qui suppose que $z \approx 0$, $\dot{z} \approx 0$ et $\ddot{z} \approx 0$. On supposera en outre que $|2\omega \dot{x} \cos(\lambda)| \ll g$.

Q.7 Montrer que les équations différentielles vérifiées par x et y s'écrivent de façon approchée :

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega_0^2 x = 2\Omega \dot{y} \\ \ddot{y} + \omega_0^2 y = -2\Omega \dot{x} \end{cases}$$

où on précisera les expressions de ω_0 et Ω . Faire les applications numériques.

Q.8 Dans le but de résoudre ce système d'équations couplées, on définit la fonction complexe $u = x + iy$ (avec $i^2 = -1$). Déterminer l'équation différentielle du second ordre à laquelle obéit u . En déduire sa solution générale en introduisant deux constantes d'intégration complexes qu'on ne cherchera pas à déterminer pour le moment.

Afin d'interpréter plus facilement les solutions précédentes, on effectue un changement de base. On introduit la base ($\vec{u}'_x, \vec{u}'_y, \vec{u}'_z = \vec{u}_z$) en rotation par rapport à la base ($\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$) autour du vecteur $\vec{u}_z$ à la vitesse de rotation constante $\vec{\Omega} = -\Omega \vec{u}_z$. On suppose qu'à l'instant $t = 0$, les deux bases sont confondues. On pose :

$$\vec{AM} = x'(t)\vec{u}'_x + y'(t)\vec{u}'_y + z'(t)\vec{u}'_z \quad \text{et} \quad u'(t) = x'(t) + iy'(t)$$

Q.9 Montrer que $u(t) = u'(t)e^{-i\Omega t}$.

Q.10 On suppose que la masse oscillante M est abandonnée sans vitesse initiale dans la position M_0 de coordonnées $(x_0 > 0, y_0 = 0)$. Expliciter dans ce cas l'expression complète de $u'(t)$ et montrer que :

$$x'(t) = a \cos(\omega_1 t) \quad \text{et} \quad y'(t) = b \sin(\omega_1 t)$$

en précisant les expressions de a , b et ω_1 .

Q.11 Quelle est la nature de la trajectoire avec les coordonnées x' et y' ? Calculer numériquement le rapport b/a ainsi que l'écart relatif $\frac{|\omega_1 - \omega_0|}{\omega_0}$. Que peut-on en conclure?

Q.12 Les équations précédentes peuvent s'interpréter comme décrivant un pendule oscillant avec une période T_0 dans un plan (P) qui tourne autour de l'axe Δ avec une période $T_R = \frac{2\pi}{\Omega}$. Déterminer T_0 ainsi que la durée T_R d'une rotation complète de ce plan d'oscillations. Application numérique.

III – Déviation vers l'est

On étudie maintenant le mouvement du point M lorsqu'il tombe en chute libre, sans vitesse initiale, à partir d'un point B d'altitude z_0 à la verticale du point A . Le référentiel terrestre n'est toujours pas considéré galiléen.

Q.13 Déterminer en fonction de g , ω et λ , les trois équations différentielles auxquelles obéissent les trois coordonnées x , y et z du vecteur $\overrightarrow{AM}$ dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$.

Comme ω est très faible, il est possible de voir le phénomène de déviation vers l'est comme une perturbation de la trajectoire en référentiel galiléen. On ne garde donc que les termes d'ordre au plus 1 en ω .

Q.14 Résoudre, dans cette approximation, les équations différentielles obtenues à la question précédente et montrer que :

$$x(t) = at^3 \quad ; \quad y(t) = 0 \quad ; \quad z(t) = bt^2 + z_0$$

où a et b sont deux constantes à expliciter en fonction de g , ω et λ .

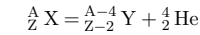
Q.15 En déduire que la particule tombe sur le sol en étant déviée vers l'Est d'une quantité x_1 à exprimer. Calculer la valeur numérique de x_1 pour $z_0 = 200$ m et $\lambda = 45^\circ$. Commenter.

Q.16 Que se passerait-il si on considérait les termes d'ordre 2 en ω ?

Exercice 2 : Radioactivité α

I – Description

La radioactivité alpha est le processus de désintégration d'un nucléide radioactif ${}^A_Z X$ selon le bilan suivant :



où le noyau ${}^4_2 \text{He}$ est appelé particule alpha, tandis que le noyau ${}^A_Z X$ est appelé père et le noyau ${}^{A-4}_{Z-2} Y$ fil. En pratique, la radioactivité alpha concerne les noyaux lourds, $Z \sim 82 - 96$ et $A \sim 210 - 250$.

La constante radioactive λ du radionucléide est son taux de désintégration par seconde. En notant $N(t)$ le nombre de radionucléides dans un échantillon donné,

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N(t)$$

La durée de demi-vie est le temps T pendant lequel la moitié des radionucléides d'un échantillon donné se désintègrent.

Q.1 Montrer que $T = \frac{\ln 2}{\lambda}$.

L'activité d'un radionucléide, exprimée en becquerels (Bq), est le nombre de désintégrations par seconde observées dans un échantillon donné.

La FIGURE 1 met en relation les durées de demi-vie et l'énergie des particules alpha E_α de quelques isotopes de l'uranium ($Z = 92$) et du polonium ($Z = 84$). La loi vérifiée empiriquement (courbe passant au milieu des points expérimentaux) est :

$$\log_{10} T = \frac{C_1}{\sqrt{E_\alpha}} + C_2$$

où, pour un élément chimique donné, C_1 et C_2 sont deux constantes.

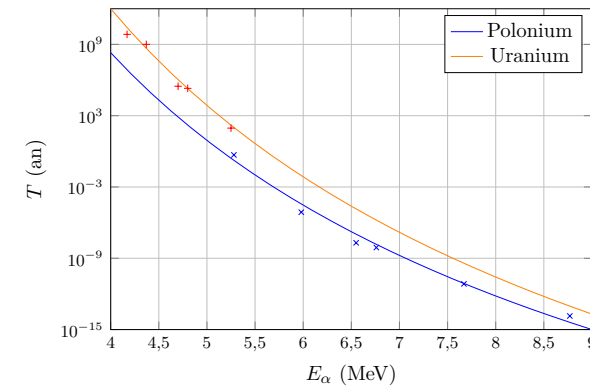
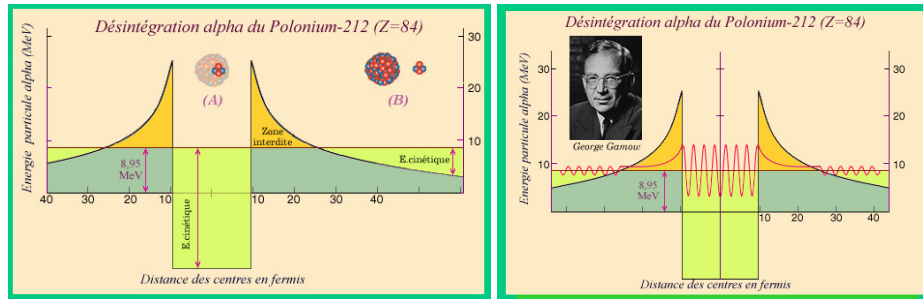


FIGURE 1 – Demi-vie fonction de E_α

II – Modèle de Gamow et simplifications

On suppose que la particule alpha préexiste à l'intérieur du noyau ${}^A_Z X$ et est piégée dans un puits de potentiel qui modélise l'interaction forte entre nucléons, dont la portée n'excède pas une dizaine de femtomètres, soit le rayon du noyau, noté R . À l'extérieur du noyau, soit à une distance $r > R$ comptée depuis son centre, c'est l'interaction coulombienne, répulsive, entre la particule alpha ${}^4_2 \text{He}$ (de charge $+2e$, où e est la charge élémentaire) et le noyau fils ${}^{A-4}_{Z-2} Y$ (de charge $+(Z-2)e$) qui prédomine.

FIGURE 2 – D'après <http://www.laradioactive.com/>

Classiquement, la barrière de potentiel assure la stabilité du noyau. Gamow interprète la radioactivité alpha par effet tunnel. L'onde de matière associée à la particule alpha n'est pas strictement localisée si bien qu'il existe une probabilité de l'observer en dehors du noyau. La particule alpha, à l'intérieur du noyau, possède une énergie cinétique : elle vient heurter la barrière à une fréquence f , il y a une probabilité P qu'elle traverse la barrière de potentiel. On montre alors que la constante radioactive s'écrit $\lambda = Pf$.

L'énergie potentielle coulombienne, appelée abusivement *potentiel* selon les habitudes de la physique quantique, est notée $V(r)$.

Q.2 Écrire l'énergie potentielle d'interaction coulombienne, notée $V(r)$, entre la particule alpha et le noyau fils, en fonction de Z , e et de la distance r qui les sépare. On introduira la constante $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}$ appelée constante de structure fine.

La FIGURE 3 ci-dessous (à gauche) représente le potentiel dans lequel est plongé la particule alpha. Pour estimer le coefficient de transmission P de cette barrière de potentiel, on la modélise (partie droite) puis on résout explicitement l'équation de Schrödinger en régime stationnaire et à une dimension.

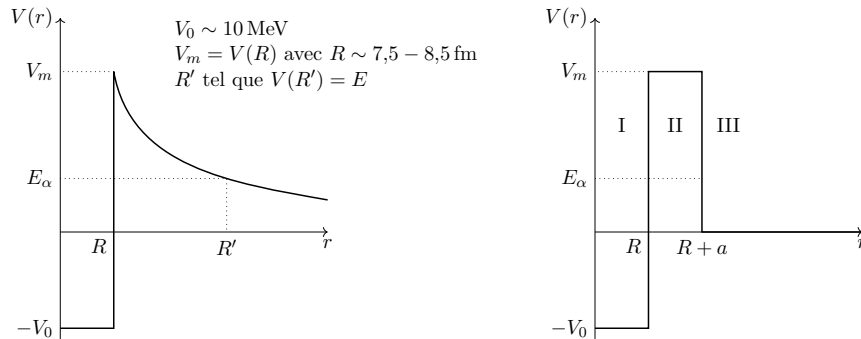


FIGURE 3 – Barrière de potentiel (modèle réaliste à gauche, simplifié à droite)

La particule alpha d'énergie E_α arrive de la région I sur la barrière de potentiel. Nous considérons que $0 < E_\alpha < V_m$. Pour rappel, la fonction d'onde radiale $\varphi(r)$ de la particule de masse m_α vérifie l'équation de Schrödinger en régime stationnaire à une dimension :

$$-\frac{\hbar^2}{2m_\alpha} \frac{d^2\varphi}{dr^2} + V(r)\varphi = E_\alpha\varphi$$

Q.3 Montrer que la fonction d'onde radiale φ se met, selon la région, sous la forme :

$$\begin{cases} \varphi_1(r) = Ae^{jk_1r} + Be^{-jk_1r} & \text{dans la région I} \\ \varphi_2(r) = Ce^{k_2r} + De^{-k_2r} & \text{dans la région II} \\ \varphi_3(r) = Fe^{jk_3r} + Ge^{-jk_3r} & \text{dans la région III} \end{cases}$$

où A, B, C, D, F et G sont des constantes a priori complexes. On précisera les expressions des constantes k_1, k_2 et k_3 .

Q.4 Identifier les constantes d'intégration que l'on peut choisir nulles. Justifier votre réponse.

Q.5 Écrire, en les justifiant, les relations de continuité.

Q.6 On montre que le courant de probabilité stationnaire de la région I a pour expression :

$$\vec{J}_1 = \frac{\hbar}{m_\alpha} k_1 [|A|^2 - |B|^2] \vec{u}_r$$

où $\vec{u}_r$ est le vecteur unitaire radial et $|\cdot|$ représente le module d'un nombre complexe. Déterminer le courant de probabilité associé à une particule alpha située dans le puits et se dirigeant vers la barrière. Définir alors le coefficient de transmission P en fonction des courants de probabilité. Exprimer P en fonction des grandeurs pertinentes.

III – Approximation "BKW"

Le calcul de la probabilité de transmission par effet tunnel pour le profil réaliste illustré FIGURE 3 a été proposé en 1926 par Brillouin, Kramers et Wentzel (approximation dite BKW) et donne :

$$P = \exp(-\gamma) \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{2}{\hbar} \int_R^{R'} \sqrt{2m(V(r) - E_\alpha)} dr$$

En notant toujours $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}$, on obtient : $\gamma \approx 2(Z-2)\alpha\sqrt{2mc^2} \left(\frac{\pi}{\sqrt{E_\alpha}} - \frac{4}{\sqrt{V_m}} \right)$.

Q.7 Que pensez-vous des valeurs de probabilité de transmission dans les deux modèles ?

La fréquence de collision de la particule alpha avec la barrière s'obtient par une approche classique :

$$f = \frac{c}{2R} \sqrt{\frac{2(E_\alpha + V_0)}{mc^2}}$$

Q.8 Exprimer l'énergie cinétique de la particule alpha, en fonction de son énergie mécanique E_α , quand elle est à l'intérieur du puits. Justifier l'expression de f fournie.

Q.9 Avec $\lambda = Pf$, et moyennant des approximations qu'on explicitera, justifier la formule empirique pour un élément chimique

$$\log_{10} T = \frac{C_1}{\sqrt{E_\alpha}} + C_2$$

Q.10 On considère un échantillon radioactif alpha d'activité massique $A_m = 3 \times 10^{10} \text{ Bq} \cdot \text{g}^{-1}$. Définir la grandeur intensive *émission thermique massique de l'échantillon*, notée w ($\text{W} \cdot \text{kg}^{-1}$). Estimer un ordre de grandeur de w .

Q.11 Que représente la grandeur ρw où ρ est la masse volumique de l'échantillon ?