CCP - MP$_2$ - 2015 : exercice 1 Corrigé Ds10

2) $(A|A') = aa' + bb' + cc' + dd'$

3) $\mathcal{F} = \mathrm{vect}\Big(\underbrace{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}}_{\text{c'est une base OTN}}\Big)$

Comme $\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} \in \mathcal{F}^\perp$ et $\dim \mathcal{F}^\perp = 4-3=1$, $\boxed{\mathcal{F}^\perp = \mathrm{vect}\Big(\underbrace{\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}}_{\text{base OTN}}\Big)}$

4) $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}1&2\\0&4\end{pmatrix}}_{\mathcal{F}} + \underbrace{\begin{pmatrix}0&0\\3&0\end{pmatrix}}_{\mathcal{F}^\perp}$ donc $\boxed{p_{\mathcal{F}}(A) = \begin{pmatrix}1&2\\0&4\end{pmatrix}}$

et donc $d(A,\mathcal{F}) = \left\|\begin{pmatrix}0&0\\3&0\end{pmatrix}\right\| = 3$ d $\boxed{d(A,\mathcal{F}) = 3}$

1) * $(B|A) = \mathrm{Tr}(B^TA) = \mathrm{Tr}\left((B^TA)^T\right) = \mathrm{Tr}(A^TB) = (A|B)$

donc $(.|.)$ symétrique

* $(\lambda A + A'|B) = \lambda(A|B) + (A'|B)$ par linéarité de la trace et de la transposée.

* $(A|A) = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} a_{ij}^2 \geq 0$ et nul ssi $\forall i,j : a_{ij} = 0$

d $\boxed{(.|.) \text{ P.S}}$

Q6 Non, exemple une rotation d'angle $\pi/2$ dans un plan.

Précisons : $E = \mathbb{R}^2$ munit de son P.S.C., $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ de matrice, dans la base canonique b_0, $M_{b_0}(u) = R_{\pi/2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\forall \vec{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $u(\vec{x}) = (-y, x)$ et $\langle u(\vec{x}), \vec{x} \rangle = 0$

d'où $\boxed{u \text{ non neccessairement nul}}$

Q7 $i \Rightarrow ii$

$\forall (x, y) \in E^2$, $\langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, v(u(y)) \rangle = \langle x, u \circ v(y) \rangle$ ($v \circ u = u \circ v$)

et $\langle v(x), v(y) \rangle = \langle v(y), v(x) \rangle = \langle u(v(y)), x \rangle = \langle x, u \circ v(y) \rangle$

↑ déf de v "à l'envers"

cqs on a $i \Rightarrow ii$

$ii \Rightarrow iii$

$\|u(x)\|^2 = \langle u(x), u(x) \rangle = \langle v(x), v(x) \rangle = \|v(x)\|^2$

comme une norme est positive, on a $ii \Rightarrow iii$

$iii \Rightarrow ii$ on utilise l'identité de polarisation :

$\langle u(x), u(y) \rangle = \frac{1}{2}\left(\|\underbrace{u(x) + u(y)}_{= u(x+y) \text{ car } u \text{ linéaire}}\|^2 - \|u(x)\|^2 - \|u(y)\|^2 \right)$

donc avec le iii pour les 3 normes, Saisissez du texte ici

$$\langle u(x), u(y)\rangle = \langle v(x), v(y)\rangle, \quad \text{cqd } \underline{iii \Rightarrow ii}$$

$\underline{ii \Rightarrow i}$

$\forall (x,y)\in E^2 \quad \langle u(x), u(y)\rangle = \langle v(x), v(y)\rangle = \langle v(y), v(x)\rangle$

$$\Rightarrow \langle x, v\circ u(y)\rangle = \langle u\circ v(y), x\rangle = \langle x, u\circ v(y)\rangle$$

fixons le $y\in E$, $\forall x\in E : \langle x, v\circ u(y) - u\circ v(y)\rangle = 0$,

on a donc $v\circ u(y) - u\circ v(y) \in E^{\perp} = \{0\}$ d'où

$v\circ u(y) = u\circ v(y)$ et ceci pour tout $y\in E$,

cqs $\underline{ii \Rightarrow i}$ et $\boxed{\text{i, ii et iii équivalents}}$

exercice 3 ①

1) $\chi_A(x) = -\begin{vmatrix} 2-x & 1 & -1 \\ 0 & -1-x & 2 \\ 1 & -1 & 2-x \end{vmatrix}$

$= -\begin{vmatrix} 2-x & 1 & 0 \\ 0 & -1-x & 1-x \\ 1 & -1 & 1-x \end{vmatrix}$

$C_3 + C_2$

$= (x-1)\begin{vmatrix} 2-x & 1 & 0 \\ 0 & -1-x & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

$= (x-1)\left[(2-x)(-1-x+1) - (-1)\right]$ dével. 1re ligne

$= (x-1)(x^2-2x+1)$

d'où $\boxed{\chi_A(x) = (x-1)^3}$

$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y-z = x \\ -y+2z = y \\ x-y+2z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = y & (L_2) \\ x = 0 & L_1 \\ x = 0 & L_3 \end{cases}$

d $E_1 = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

2) $E_1 \neq \mathbb{R}^3$, donc $\boxed{A \text{ non diagonalisable}}$

3) Par Cayley-Hamilton : $\chi_A(A) = (A - I_3)^3 = (0)$

d'où $\boxed{N \text{ est nilpotente}}$

On sait que $\Pi_A | \chi_A$, donc $\Pi_A(X) = (X-1)^k$ avec $1 \leqslant k \leqslant 3$.

$$(A - I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \neq (0). \quad \text{d'où } \boxed{\Pi_A(X) = (X-1)^3}$$

4) On a donc $N^3 = (0)$, d'où

$$\boxed{e^{tN} = I_3 + tN + \frac{t^2}{2}N^2 = \begin{pmatrix} 1+t & t & -t \\ t^2 & (1-t)^2 & -t^2+2t \\ t+t^2 & t^2-t & (1-t)^2 \end{pmatrix}}$$

Comme $e^{tA} = e^{tI_3 + tN}$, que tI_3 et tN commutent, $e^{tA} = e^{tI_3} \times e^{tN}$. Or $e^{tI_3} = \begin{pmatrix} e^t & & 0 \\ & e^t & \\ 0 & & e^t \end{pmatrix} = e^t I_3$

d'où $$\boxed{e^{tA} = e^t \begin{pmatrix} 1+t & t & -t \\ t^2 & (1-t)^2 & -t^2+2t \\ t^2+t & t^2-t & (1-t)^2 \end{pmatrix}}$$

5) $(\mathcal{E}_1) : \begin{cases} X' = AX \\ X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \end{cases}$, donc $\underline{\forall t \in \mathbb{R} \quad X(t) = e^{tA} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}$

d°

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \quad X(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 2e^t + 2te^t \\ 2te^t + 3e^t \end{pmatrix}}$$

$(\mathcal{E}_2)$: $X' = AX + B$ où $B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

On cherche une solution particulière et vu B, on la cherche constante

$X_0(t) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ sol. de $(\mathcal{E}_2) \iff \begin{cases} 0 = 2\alpha + \beta - \gamma + 3 \\ 0 = -\beta + 2\gamma - 1 \\ 0 = \alpha - \beta + 2\gamma + 2 \end{cases}$

$(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$

$\iff \begin{cases} \beta = 2\gamma - 1 & L_2 \\ \alpha + 3 = 0 & L_2 + L_3 \\ \beta = -2\alpha + \gamma - 3 & L_1 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} \alpha = -3 \\ \beta = 2\gamma - 1 \\ \beta = \gamma + 3 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = -3 \\ \gamma = 4 & L_2 - L_3 \\ \beta = 7 \end{cases}$

On conclut

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ sol. de } (\mathcal{E}_2) \iff \exists (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \ (\forall t \in \mathbb{R} : X(t) = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} + e^t e^{tN} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}}$$

exercice 4

1°) On injecte dans l'équation (E) $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ d'où :

$$\begin{cases} n=0 : & 2a_1 + a_0 = 0 \\ \forall n \geq 1 : & 4n(n+1)a_{n+1} + 2(n+1)a_{n+1} + a_n = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = \dfrac{-a_0}{2} \\ \forall n \geq 1 \quad a_{n+1} = \dfrac{-a_n}{2(n+1)(2n+1)} = \dfrac{-a_n}{(2n+2)(2n+1)} \end{cases}$$

d'où $a_n = \dfrac{-1}{2n(2n-1)} \times \dfrac{-1}{(2n-2)(2n-3)} \times \cdots \times \dfrac{-1}{2 \times 1} a_0$

$= \dfrac{(-1)^n}{(2n)!} a_0$ d'où $\boxed{y(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n)!} x^n}$

$\boxed{R = +\infty}$

si $x > 0$, $x = (\sqrt{x})^2$ et $y(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{(\sqrt{x})^{2n}}{(2n)!} = a_0 \cos(\sqrt{x})$

si $x < 0$, $x = -(\sqrt{-x})^2$ et $y(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(\sqrt{-x})^{2n}}{(2n)!} = a_0 \operatorname{ch}(\sqrt{-x})$

2°) Résolution sur $\mathbb{R}_+^*$, cherchons $y(x) = \lambda(x) y_0(x)$ avec $y_0(x) = \cos(\sqrt{x})$

y sol. de (E) $\Leftrightarrow 4x\lambda''(x)\cos(\sqrt{x}) + (2\cos\sqrt{x} - 4\sqrt{x}\sin\sqrt{x})\lambda'(x) = 0$

Résolvons $4x z' \cos\sqrt{x} + (2\cos\sqrt{x} - 4\sqrt{x}\sin\sqrt{x}) z = 0$ $(z = \lambda')$

$$\frac{z'}{z} = \frac{4\sqrt{x}\sin\sqrt{x} - 2\cos\sqrt{x}}{4x\cos\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}\tan\sqrt{x} - \frac{1}{2x}$$

donc $\ln|z| = \int \frac{1}{\sqrt{x}} \tan\sqrt{x}\, dx - \int \frac{dx}{2x} + C$ ②

$$= \int 2\tan u\, du - \frac{1}{2}\ln x + C$$

$$\uparrow \underline{u = \sqrt{x}}$$

$$= -2\ln|\cos u| - \frac{1}{2}\ln x + C$$

$$= -2\ln\cos\sqrt{x} - \frac{1}{2}\ln x + C$$

donc $z = \pm e^{-2\ln\cos\sqrt{x} - \frac{1}{2}\ln x + C}$

$$= C' \frac{1}{\cos^2\sqrt{x}} \times \frac{1}{\sqrt{x}}$$

et donc $\lambda(x) = C' \int \frac{dx}{\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}} = C' \int \frac{2\, du}{\cos^2 u}$ $(u = \sqrt{x})$

$$= 2C' \tan u + C''$$

$$= 2C' \tan\sqrt{x} + C''$$

d'où $y(x) = (2C' \tan\sqrt{x} + C'')\cos\sqrt{x}$

$$= 2C' \sin\sqrt{x} + C'' \cos\sqrt{x}$$

Soit $C : \underset{x>0}{x} \mapsto \cos\sqrt{x}$ et $S : \underset{x>0}{x} \mapsto \sin\sqrt{x}$

(C, S) est libre ds $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ (vérifier !)

d $\boxed{\begin{array}{l} y \text{ sol de } E \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \\ \Leftrightarrow \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid y(x) = a\cos\sqrt{x} + b\sin\sqrt{x} \end{array}}$

On a determiné $\lambda(x)$ sur tout segment $I \subset \mathbb{R}_+^* - \left\{\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^2\right\}$, ce qui donne $S : x \mapsto \sin\sqrt{x}$ qui par prolongement (C^1) est sol. sur $\mathbb{R}_+^*$.

3) <u>Sur $\mathbb{R}_-^*$</u> : cherchons $y(x)=\lambda(x)\,y_0(x)$

avec $y_0(x)=\operatorname{ch}(\sqrt{-x})$

y Sol. de $(E) \iff 4x\operatorname{ch}\sqrt{-x}\,\lambda''(x)+\left(2\operatorname{ch}\sqrt{-x}+4\sqrt{-x}\operatorname{sh}\sqrt{-x}\right)\lambda'(x)=0$

Résolvons : $4x\operatorname{ch}\sqrt{-x}\,z'+\left(2\operatorname{ch}\sqrt{-x}+4\sqrt{-x}\operatorname{sh}\sqrt{-x}\right)z=0$

$$\frac{z'}{z}=\frac{-2\operatorname{ch}\sqrt{-x}-4\sqrt{-x}\operatorname{sh}\sqrt{-x}}{4x\operatorname{ch}\sqrt{-x}}$$

$$=\frac{-1}{2x}+\frac{\operatorname{sh}\sqrt{-x}}{\sqrt{-x}\operatorname{ch}\sqrt{-x}}$$

donc $\ln|z|=-\frac{1}{2}\ln|x|+\int\frac{(-2)\operatorname{sh}u}{\operatorname{ch}u}\,du+c \quad u=\sqrt{-x}$

$$=\ln\frac{1}{\sqrt{-x}}-2\ln(\operatorname{ch}u)=\ln\frac{1}{\sqrt{-x}}+\ln\left(\frac{1}{\operatorname{ch}\sqrt{-x}}\right)^2+c$$

donc $z=\pm e^{\cdots}$

$$=c'\frac{1}{\sqrt{-x}}\,\frac{1}{\operatorname{ch}^2\sqrt{-x}}$$

donc $\lambda(x)=c'\int\frac{dx}{\sqrt{-x}\operatorname{ch}^2\sqrt{-x}}+c''$

$$=c'\int\frac{-2\,du}{\operatorname{ch}^2u}\,du+c''=-2c'\operatorname{th}u+c''$$

$$=-2c'\operatorname{th}\sqrt{-x}+c''$$

d'où $y(x)=-2c'\operatorname{sh}\sqrt{-x}+c''\operatorname{ch}\sqrt{-x}$

Soit $C_1:\begin{pmatrix}x\mapsto\operatorname{ch}\sqrt{-x}\\ x<0\end{pmatrix}$ et $S_1:\begin{pmatrix}x\mapsto\operatorname{sh}\sqrt{-x}\\ x<0\end{pmatrix}$ <u>(C_1,S_1) libre</u>

<u>cl.</u> $\boxed{y \text{ sol. de } (E) \text{ sur } \mathbb{R}_-^* \iff \exists (a,b)\in\mathbb{R}^2 \mid y(x)=a\operatorname{ch}\sqrt{-x}+b\operatorname{sh}\sqrt{-x}}$

4°) Soit f une solution de (E) sur $\mathbb{R}$ donc f restreint à $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ est aussi solution, donc $\exists (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tel que :

$$\begin{cases} \forall x > 0 & f(x) = a\cos\sqrt{x} + b\sin\sqrt{x} \\ \forall x < 0 & f(x) = c\,\mathrm{ch}\sqrt{-x} + d\,\mathrm{sh}\sqrt{-x} \end{cases}$$

Il faut que f soit continue, 2 fois dérivable et solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

* $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = a$ & $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = c$ donc il faut $a = c$

* $\forall x > 0 \quad f'(x) = -\frac{a}{2\sqrt{x}}\sin\sqrt{x} + \frac{b}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}$

$$\xrightarrow[x \to 0]{>} \frac{-a}{2} + \begin{cases} \infty & \text{si } b \neq 0 \\ 0 & \text{si } b = 0 \end{cases}$$

$f_0(x) = \begin{cases} \cos\sqrt{x} & x \geq 0 \\ \mathrm{ch}\sqrt{-x} & x \leq 0 \end{cases}$

par T.P.D., il faut donc que $b = 0$

de m, il faut $d = 0$ d'où $f(x) = \begin{cases} a\cos\sqrt{x} & x \geq 0 \\ a\,\mathrm{ch}\sqrt{-x} & x \leq 0 \end{cases}$

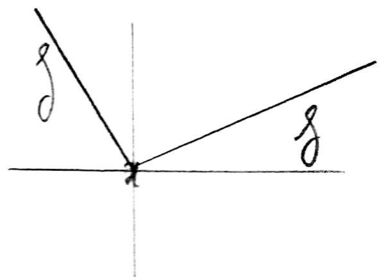
et cette solution vaut a y trouvée en 1°) d: $\boxed{S_{\mathbb{R}} = \mathrm{vect}(f_0)}$

5ème exercice (CCP MP 2005)

1. Sur I : f solution de (E_n) ssi $\exists ! \lambda \in \mathbb{R} \mid \forall x \in I : f(x) = \lambda x^n$

Sur J : ———————————— $\in J : f(x) = \lambda x^n$

2. Si f est solution sur $\mathbb{R}^*$ alors :



Par dérivabilité en 0, $S_{\mathbb{R}}(E_1) = \{x \mapsto \lambda x, \lambda \in \mathbb{R}\}$ de dim. 1

3. Si $f \in S_{\mathbb{R}}(E_n) = \{$ solution de (E_n) sur $\mathbb{R}\}$ alors $\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x) = \begin{cases} \lambda x^n & \text{si } x > 0 \\ \mu x^n & \text{si } x < 0 \end{cases}$ d'où $f'(x) = \begin{cases} n\lambda x^{n-1}, & x > 0 \\ n\mu x^{n-1}, & x < 0 \end{cases}$

donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ \neq}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ \neq}} f'(x) = 0$ car $n \geq 1$ et $n - 1 \geq 1$

d'où comme f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, on doit avoir $f(0) = f'(0) = 0$ ——— Th. fct C^1

réciproquement soit $f : x \longmapsto \begin{cases} \alpha x^n & \text{si } x \geqslant 0 \\ \beta x^n & \text{si } x < 0 \end{cases}$ $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

f est solution de (E_n) sur I et J, elle est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ (Th. prl C^1) et $f(0) = f'(0) = 0$

donc $0 \times f'(0) - n \times f(0) = 0$ donc $f \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(E_n)$

cl. $\boxed{\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(E_n) = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \setminus \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ f(x) = \begin{cases} \alpha x^n, & x \geqslant 0 \\ \beta x^n, & x < 0 \end{cases} \right\}}$

dim. Il est clair que $\phi : \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(E_n) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est
$f \longmapsto (f(1), f(-1))$

linéaire, injective ($\alpha = \beta = 0 \Rightarrow f = 0$) et surjective d'où

ϕ isomorphisme et $\boxed{\dim \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(E_n) = 2}$

rem. on pouvait aussi montrer que $g_1 : x \longmapsto \begin{cases} x^n, & x \geqslant 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

et $g_2 : x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \geqslant 0 \\ x^n & \text{si } x < 0 \end{cases}$ formaient une base de $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(E_n)$

ex6

1) On a clairement $\varphi(P,Q)=\varphi(Q,P)$ & $\varphi(\lambda P+Q,R)$
$=\lambda\varphi(P,R)+\varphi(Q,R)$

de + $\varphi(P,P)=\sum_{i=1}^{n+1}P(x_i)^2\geqslant 0$

et $\varphi(P,P)=0 \Rightarrow x_1,\dots,x_{n+1}$ racines 2 à 2

distincts de P. Or $d^\circ P\leq n$ donc $P=0$

cl $\boxed{\varphi \text{ P, S, sur } \mathbb{R}_n[X]}$

2) $P_1=(x_2-X)\dots(x_{n+1}-X);\dots;P_n=(x_{n+1}-X)$ et $P_{n+1}=1$

a) classique car les d° des P_i sont 2 à 2 $\neq$:
Si $(\lambda_1,\dots,\lambda_{n+1})\in\mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1}\lambda_iP_i=0$. Si $\exists i \mid$
$\lambda_i\neq 0$ soit $s=\min(i,\lambda_i\neq 0)$ on a alors ;
$Q=\lambda_sP_s+\dots=0$ et $d^\circ Q=s\geqslant 0$ absurde

donc $\lambda_1=\dots=\lambda_{n+1}=0$ et $(P_1,\dots,P_{n+1})$ libre. Comme
$\dim\mathbb{R}_n[X]=n+1$: cl : $\boxed{(P_1,\dots,P_{n+1}) \text{ base de } \mathbb{R}_n[X]}$

b) * $L_i(x_j) = \delta_{i,j}$ donc $\varphi(L_{i_0}, L_{j_0}) = \sum_{i=1}^{n+1} \delta_{i_0,i}\, \delta_{j_0,i}$ (2)

$= \delta_{i_0,j_0} \times \delta_{j_0,j_0} + 0 \dots$

donc $\varphi(L_{i_0}, L_{j_0}) = \delta_{i_0,j_0}$ d'où

$(L_1, \dots, L_{n+1})$ est OTN.

* Notons $(M_1, ---, M_{n+1})$ la base OTN "schmidtée" de $(P_1, ---, P_{n+1})$

$M_1 = \dfrac{P_1}{\|P_1\|}$ or $\|P_1\|^2 = P_1(x_1)^2 = \prod_{j=2}^{n}(x_j - x_1)^2$

d'où $\|P_1\| = \prod_{j=2}^{n}(x_j - x_1)$ car $x_1 < \dots < x_{n+1}$

et donc $\underline{M_1 = L_1}$

Supposons que $M_i = L_i$ pour $i \in [\![1, p]\!]$ et $p < n+1$

on a grâce au procédé de Schmidt :

$$Q_{p+1} = P_{p+1} - \sum_{j=1}^{p} \varphi(M_j, P_{p+1}) M_j$$

$$= P_{p+1} - \sum_{j=1}^{p} \varphi(L_j, P_{p+1}) L_j.$$

Or $\varphi(L_j, P_{p+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \delta_{i,j} \cdot P_{p+1}(x_i) = P_{p+1}(x_j)$

donc $Q_{p+1} = P_{p+1} - \sum_{j=1}^{p} P_{p+1}(x_j) L_j$

d'où $Q_{p+1}(x_i) = P_{p+1}(x_i) - \sum_{j=1}^{p} P_{p+1}(x_j) \underbrace{L_j(x_i)}_{\delta_{i,j}}$

si $i \leq p$: $Q_{p+1}(x_i) = P_{p+1}(x_i) - P_{p+1}(x_i) \times 1 - 0 = 0$

si $i > p+1$: $Q_{p+1}(x_i) = P_{p+1}(x_i) = \prod_{j=p+2}^{n+1} (x_j - x_i) = 0$

car $i \in [\![p+2, n]\!]$

si $i = p+1$; $Q_{p+1}(x_i) = P_{p+1}(x_{p+1})$

d'où $Q_{p+1}(X) = \lambda \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq p+1}}^{n+1} (X - x_j) = \lambda' L_{p+1}$

$Q_{p+1}(x_{p+1}) = \lambda \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq p+1}}^{n+1} (x_{p+1} - x_j) = P_{p+1}(x_{p+1}) = \prod_{j=p+2}^{n+1} (x_j - x_{p+1})$

enfin $\Pi_{p+1} = \dfrac{Q_{p+1}}{\|Q_{p+1}\|}$ comme $\Pi_{p+1} = \lambda'' L_{p+1}$ et

que $\|\Pi_{p+1}\| = 1$ on a $|\lambda''| = \pm 1$ et $\Pi_{p+1} = \pm L_{p+1}$

$\varphi(\Pi_{p+1}, L_{p+1}) = \Pi_{p+1}(x_{p+1}) = \dfrac{Q_{p+1}(x_{p+1})}{\|Q_{p+1}\|} = \dfrac{Q_{p+1}(x_{p+1})}{\sqrt{Q_{p+1}(x_{p+1})^2}}$

or $x_1 < \dots < x_{n+1}$ donc $Q_{p+1}(x_{p+1}) = \prod_{j=p+2}^{n+1} (x_j - x_{p+1}) > 0$

donc $\varphi(\Pi_{p+1}, L_{p+1}) = 1$, comme $\Pi_{p+1} = \pm L_{p+1}$ on doit

avoir $\Pi_{p+1} = L_{p+1}$

cqfd $\Pi_i = L_i$ pour tout $i \in [\![1, n+1]\!]$

d $\boxed{\text{La base de Schmidt de } \mathcal{B} \text{ est } \mathcal{B}'}$

3a) Comme $\mathcal{B}'$ est OTN, $X^k = \sum_{i=1}^{n+1} \varphi(L_i, X^k) L_i$

d'où $\boxed{X^k = \sum_{i=1}^{n+1} x_i^k L_i}$

b) i) $C_n \leftarrow C_n - x_1 C_{n-1}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ 1 & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & & x_{n+1}^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^n - x_1 \cdot x_1^{n-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n - x_1 x_n^{n-1} \\ 1 & x_{n+1} & \cdots & x_{n+1}^n - x_1 x_{n+1}^{n-1} \end{vmatrix}$$

puis on fait $C_{n-1} \leftarrow C_{n-1} - x_1 C_{n-2}, \cdots, C_2 \leftarrow C_1 - x_1 C_2$

d'où $$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1 x_2 & & x_2^n - x_1 x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n+1} - x_1 & x_{n+1}^2 - x_1 x_{n+1} & & x_{n+1}^n - x_1 x_{n+1}^{n-1} \end{vmatrix}$$

on factorise la 2ème ligne par $x_2 - x_1$

$\vdots$

on factorise la $(n+1)$-ième ligne par $x_{n+1} - x_1$ et

on développe par rapport à la 1ère ligne d'où,

$$\boxed{\Delta = \prod_{i=2}^{n+1}(x_i - x_1)\begin{vmatrix} 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & & x_{n+1}^{n-1} \end{vmatrix}}$$

(5)

ii) $\det_{B'}(1, X, \dots, X^n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & & x_{n+1}^n \end{vmatrix} = \Delta$

Notons $\Delta = \Delta_{n+1}(x_1, \dots, x_{n+1})$. On a avec le i) :

$\Delta_{n+1}(x_1, \dots, x_{n+1}) = \prod_{i=2}^{n+1}(x_i - x_1)\Delta_n(x_2, \dots, x_{n+1})$

$= \prod_{i=2}^{n+1}(x_i - x_1) \times \prod_{i=3}^{n+1}(x_i - x_2) \times \cdots \times \prod_{i=n+1}(x_i - x_n) \times 1$

$= \prod_{1 \leq i < j \leq n+1}(x_j - x_i)$ (que l'on peut aussi démontrer par récurrence à partir de i))

d'$\boxed{\Delta = \prod_{1 \leq i < j \leq n+1}(x_j - x_i)}$ (rem. c'est VDM)

c) Si $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont 2 bases OTN de $\mathbb{R}_n[X]$,

$\det_{\mathcal{C}'}(1, X, \dots, X^n) = \det_{\mathcal{C}'}(\mathcal{C}) \times \det_{\mathcal{C}}(1, X, \dots, X^n)$

Or $M_{\mathcal{C}'}(\mathcal{C}) \in O_n(\mathbb{R})$ car $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont OTN donc

$\det_{\mathcal{C}'}(1, \dots, X^n) = \pm \det_{\mathcal{C}}(1, \dots, X^n)$

cl $\boxed{|\det_{\mathcal{C}'}(1, \dots, X^n)| = |\det(1, \dots, X^n)|}$

d) Soit $\mathcal{D}$ la base de Schmidt de $(1, \dots, X^n)$. On a $\boxed{M_{\mathcal{D}}(1, \dots, X^n) = \begin{pmatrix} \alpha_0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}}$ car si $\mathcal{D} = (P_0, \dots, P_n)$ $\mathrm{vect}(P_0, \dots, P_i) = \mathrm{vect}(1, \dots, X^i)$

e) On a donc

$$\left(\prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (x_j - x_i)\right)^2 = \Delta^2 = \det_{\mathcal{B}'}(1, \dots, X^n)^2 = \det_{\mathcal{D}}(1, \dots, X^n)^2$$

$$= \prod_{p=0}^{n} \alpha_p^2$$

On $X^p = \alpha_p P_p + * P_{p-1} + \dots + * P_0$ (d'après le d)) donc

$$(P_p | X^p) = \alpha_p \times 1 + 0 = \alpha_p$$

c'est Cauchy-Schwarz

d'où $\Delta^2 = \prod_{p=0}^{n} \alpha_p^2 = \prod_{p=0}^{n} (P_p | X^p)^2 \leq \prod_{p=0}^{n} \underbrace{\|P_p\|^2}_{=1} \times \underbrace{\|X^p\|^2}_{= \sum_{i=1}^{n+1} (x_i^p)^2}$

cl $\boxed{\Delta^2 = \left(\prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (x_j - x_i)\right)^2 \leq \prod_{p=0}^{n} \sum_{i=1}^{n+1} x_i^{2p}}$

exercice (X 2024 : début) Corrigé Ds 10*

1 a) $t \mapsto 1$, $t \mapsto q(t)$ sont continues sur $\mathbb{R}$, par le théorème de Cauchy-Lipschitz, le pb de Cauchy :

$$\begin{cases} y'' + q y = 0 \\ y(0) = a \\ y'(0) = b \end{cases}$$ admet une unique solution, $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$.

d' $\boxed{y_1 \text{ et } y_2 \text{ existent}}$

On sait que $\mathcal{Y}$, l'ensemble des solutions de (1) est un $\mathbb{R}$-ev de dimension 2.

Montrons que (y_1, y_2) libre dans $\mathcal{Y}$

$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus \lambda y_1 + \mu y_2 = 0$

en $t = 0$: $\underline{\lambda = 0}$

puis $\underline{\mu = 0}$ car $y_2 \neq 0$ $(y_2'(0) \neq 0)$

Donc (y_1, y_2) libre d $\boxed{\mathcal{Y} = \text{vect}(y_1, y_2)}$

b) Posons $\varphi(t) = y_1(t) y_2'(t) - y_1'(t) y_2(t)$

φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (TG) et

$\forall t \in \mathbb{R}$ $\varphi'(t) = \cancel{y_1'(t) y_2'(t)} + y_1(t) y_2''(t) - y_1''(t) y_2(t) - \cancel{y_1'(t) y_2'(t)}$

donc $\varphi'(t) = y_1(t)(-q(t)y_2(t)) - (-q(t)y_1(t))y_2(t)$

$= 0$

Comme $\mathbb{R}$ est un intervalle, φ constante sur $\mathbb{R}$.

Enfin $\varphi(0) = 1 \times 1 - 0 \times 0 = 1$

d'° $\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \quad y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t) = 1}$

2) Posons $z(t) = y(t+T)$, z est C^2 par composée et

$\forall t \in \mathbb{R} \quad z''(t) + \underbrace{q(t)} z(t) = y''(t+T) + \underbrace{q(t+T)} y(t+T) = 0$

$=$

d'° $\boxed{t \mapsto y(t+T) \text{ sol. de } (1)}$

Avec 1a) $\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \mid$

$\forall t \in \mathbb{R} \quad y(t+T) = \lambda y_1(t) + \mu y_2(t)$

en $t=0$: $y(T) = \lambda \times 1 + \mu \times 0 = \lambda$

on dérive puis $t=0$ $\quad y'(T) = \lambda \times 0 + \mu \times 1 = \mu$

d'° $\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \quad y(t+T) = y(T)y_1(t) + y'(T)y_2(t)}$

3) Si $\mu = \rho e^{i\theta}$, si on pose $\lambda = a + ib$, on doit avoir $\rho e^{i\theta} = e^{aT} e^{ibT}$

cqs $\boxed{\lambda = \frac{\ln \rho}{a} + i \frac{\theta}{T}}$ convient a ⇒ b

On a $\forall t \in \mathbb{R}$ $\quad y(t+T) = y(T)y_1(t) + y'(T)y_2(t) = \mu y(t)$ $(*)$

Donc en $t=T$: $\quad y(T)y_1(T) + y'(T)y_2(T) = \mu y(T)$ $\quad (1)$

On dérive $(*)$ puis $t=T$: $\quad y(T)y_1'(T) + y'(T)y_2'(T) = \mu y'(T)$ $\quad (2)$

On a donc le système ((1) et (2)) :

$$(S)\begin{cases} [y_1(T)-\mu]\,y(T) + [y_2(T)]\,y'(T) = 0 \\ [y_1'(T)]\,y(T) + [y_2'(T)-\mu]\,y'(T) = 0 \end{cases}$$

Si ce système d'inconnues $(y(T), y'(T))$ est de Cramer

alors $y(T) = y'(T) = 0$ d'où avec Cauchy $y = 0$: absurde

Donc $\begin{vmatrix} y_1(T)-\mu & y_2(T) \\ y_1'(T) & y_2'(T)-\mu \end{vmatrix} = 0$

$$\Rightarrow y_1(T)y_2'(T) - (y_1(T)+y_2'(T))\mu + \mu^2 - y_1'(T)y_2(T) = 0$$

$= 1$ avec le 1) b)

$$\Rightarrow \mu^2 - (y_1(T)+y_2'(T))\mu + 1 = 0$$: donc le b)

b ⇒ a Avec les notations ci-dessus, si on a le b), alors le système (S) n'est pas de Cramer, donc il possède une solution non nulle : $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$. Soit y la solution du Pb de Cauchy
$$\left\{\begin{array}{l} y'' + qy = 0 \\ y(T) = \alpha \\ y'(T) = \beta \end{array}\right.$$
Le système (S) permet donc d'avoir (on remonte les calculs)
$$\left\{\begin{array}{l} y(T)y_1(T) + y'(T)y_2(T) = \mu\, y(T) \to (1) \\ y(T)y_1'(T) + y'(T)y_2'(T) = \mu\, y'(T) \end{array}\right.$$
Cqs $y(T)y_1 + y'(T)y_2$ et μy sont les solutions du m̂ pb de Cauchy associées à l'éq. $y'' + qy = 0$.

D'où $\underline{\forall t \in \mathbb{R} \quad y(t+T) = \mu\, y(t)}$ donc le a)

On a donc $\underline{(a) \Longleftrightarrow b}$

a ⇒ c posons $u(t) = e^{-\lambda t} y(t)$

$\forall t \in \mathbb{R}$ $u(t+T) = e^{-\lambda t} e^{-\lambda T} y(t+T)$

$= e^{-\lambda t} \frac{1}{\cancel{\mu}} \cancel{\mu} y(t) = u(t)$

d'où u T-périodique : c'est la c)

c ⇒ a $\forall t \in \mathbb{R}$ $y(t+T) = e^{\lambda t + \lambda T} u(t+T)$

$= e^{\lambda t} \mu u(t)$

$= \mu y(t)$ d'où la a)

d $\boxed{(a) \Leftrightarrow (b) \Leftrightarrow (c)}$

4 a) Avec le produit des racines de l'éq. la 3 b),

$\mu_1 \mu_2 = 1$, donc $\underline{\mu_1 = e^{\lambda T}}$ et $\underline{\mu_2 = e^{-\lambda T}}$

Avec la 3 c), $\exists (y_3, y_4) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, toutes 2 non nulles tel que $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} y_3(t) = e^{\lambda t} w_1(t) \\ y_4(t) = e^{-\lambda t} w_2(t) \end{cases}$$ avec w_1, w_2 T-périodiques.

Montons que (y_3, y_4) libre dans $\mathcal{S}$: $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$,

sev de l'ens. des sol de $y'' + qy = 0$

$\alpha y_3 + \beta y_4 = 0$ L_1

donc $\alpha y_3(t+T) + \beta y_4(t+T) = 0$

d'où avec le 3 a) : $\alpha \mu y_3(t) + \frac{\beta}{\mu} y_4(t) = 0 \quad L_2$

$\mu L_1 - L_2$: $\left(\beta\mu - \beta\frac{1}{\mu}\right) y_4(t) = 0$

$\Rightarrow \beta y_4(t) = 0 \quad \left(\mu = \mu_1 \neq \mu_2 = \frac{1}{\mu}\right)$

si $\beta \neq 0$, $y_4 = 0$: absurde donc $\beta = 0$ et

avec L_1 : $\alpha y_3 = 0 \Rightarrow \alpha = 0$

cqs (y_3, y_4) base de $\mathcal{Y}$ d'où

d $\boxed{\forall y \in \mathcal{Y}, \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \mid \forall t \in \mathbb{R}\ y(t) = \alpha e^{\lambda t} w_1(t) + \beta e^{-\lambda t} w_2(t)}$

b) Toujours avec le produit des racines $\mu_1^2 = \mu_1\mu_2 = 1$

<u>1er cas</u> : $\mu_1 = \mu_2 = 1 = e^{\lambda T}$ donc $\lambda = 0$

Avec le 3 c) $\exists y$ sol. de l'éq. diff. de la forme $y(t) = e^{0t} u(t) = u(t)$: <u>y T-périodique</u>

<u>2ème cas</u> : $\mu_1 = \mu_2 = -1 = e^{i\pi} = e^{\lambda T}$ donc $\lambda = \frac{i\pi}{T}$

Avec le 3 c) : $y(t) = e^{\frac{i\pi t}{T}} u(t)$: $y(t + 2T) = y(t)$

d $\boxed{y \text{ 2T- périodique}}$

CCP_MP2 - 2007

I 1 a) * $N(x+y)^2 = N(x)^2 + N(y)^2 + 2\varphi(x,y)$

$N(x-y)^2 = \text{——} + \text{——} - 2 \text{——}$

cl. $\boxed{N(x+y)^2 + N(x-y)^2 = 2(N(x)^2 + N(y)^2)}$

* Pour $x = (1,0,0,\dots,0)$ et $y = (1,0,0,\dots,0)$ on a :

$\|x\|_\infty = \|y\|_\infty = 1$, $\|x+y\|_\infty = 1$ et $\|x-y\|_\infty = 1$

Si N était euclidienne on aurait : $1+1 = 2(1+1)$ soit $2 = 4$; Absurde. cl. $\boxed{\|\ \|_\infty \text{ n'est pas euclidienne}}$

b) Voir page 14 (desolé !)

2) $\langle \cdot,\cdot \rangle_S$ est clairement défini positif, $\langle y,x\rangle_S = Y^T S X$

Comme $\langle y,x\rangle_S \in \mathbb{R}$, $\langle y,x\rangle_S^T = \langle y,x\rangle_S$, soit $X^T S Y = \langle y,x\rangle_S$: $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est symétrique, enfin on a facilement : $(\lambda X + X')^T S Y = \lambda X^T S Y + (X')^T S Y$: $\langle \cdot,\cdot\rangle_S$ bilinéaire

cl. $\boxed{\langle \cdot,\cdot\rangle_S \text{ est un produit scalaire}}$

3) c'est du cours ; S est la matrice du P.S. φ (on peut vérifier que $i \to \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}^T S \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} \leftarrow j = \varphi(e_i, e_j)$.

II 4) $u \in Isom(N)$, $u(x) = 0 \Rightarrow N(u(x)) = N(x) = 0 \Rightarrow x = 0$: $u \in GL(E)$

. $Id_E \in Isom(N)$ et si $u, v \in Isom(N)$ $N(u \circ v^{-1}(x)) = N(v^{-1}(x)) = N(v v^{-1}(x)) = N(x)$

5) ⇒] ⊂] $\forall x \in \Sigma(N)$ $N(u(x)) = N(x) = 1$, d'où $u(x) \in \Sigma(N)$

②

⇒] $\forall y \in \Sigma(N)$, $\exists x \in E \setminus y = u(x)$ avec le 4), u bijective et $N(y) = N(u(x)) = N(x) = 1$, donc $x \in \Sigma(N)$ et $y \in u(\Sigma(N))$

⇐] Soit $x \in E$, si $x = 0$ $\underbrace{N(u(x)) = N(0) = 0 = N(x)}_{=}$

Sinon $y = \frac{x}{N(x)} \in \Sigma(N)$ et $N(u(y)) = N(y) = 1$ donc

$N\left(u\left(\frac{x}{N(x)}\right)\right) = N\left(\frac{x}{N(x)}\right)$

↳ on le "sort" de u par linéarité puis de N (norme)

d'où $N(u(x)) = N(x)$; u N-isométrie sur E

d, $\boxed{u \ N\text{-isométrie} \Leftrightarrow u(\Sigma(N)) = \Sigma(N)}$

6) * $s(e_1 - e_2) = e_1 - e_2$ et comme $\langle e_1 - e_2 | e_1 + e_2 \rangle = 1 - 1 = 0$, on a $s(e_1 + e_2) = -e_1 - e_2$ donc par addition et soustraction, on a $s(e_1) = -e_2$ et $s(e_2) = -e_1$ donc $M_B(s) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et

$s\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ -x \end{pmatrix}$ d'où $\left\| s\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|_1 = |-y| + |-x| = |x| + |y| = \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|_1$ et

$\boxed{s \text{ est une } \|\ \|_1\text{-isométrie}}$

* On suppose $B = (e_1, e_2)$ directe donc $M_B(r) = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

donc $r\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x/2 - \sqrt{3}y/2 \\ \sqrt{3}x/2 + y/2 \end{pmatrix}$ d'où $\left\| r\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \neq 1 = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_1$

d. $\boxed{r \text{ n'est pas une } \|\ \|_1\text{-isométrie}}$

7 a) $\boxed{S = (\varphi(e_i, e_j)) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}}$ (φ forme bil. associée à q)

b) $\chi_S(x) = -\begin{vmatrix} 3-x & 0 & -1 \\ 0 & 2-x & 0 \\ -1 & 0 & 3-x \end{vmatrix} = -(2-x)\begin{vmatrix} 3-x & -1 \\ -1 & 3-x \end{vmatrix} = (x-2)(x^2-6x+8)$ $\begin{pmatrix} 6=2+4 \\ 8=2\times 4 \end{pmatrix}$

$= +(x-2)^2(x-4)$ donc $\underline{sp(S) = \{2, 2, 4\}}$

Recherche de E_4 et E_2 :

$* \begin{cases} 3x - z = 4x \\ 2y = 4y \\ -x+3z = 4z \end{cases} \iff \begin{cases} x = x \\ y = 0 \\ z = -x \end{cases} \iff \underline{E_4 = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)}$

$* \begin{cases} 3x - z = 2x \\ 2y = 2y \\ -x+3z = 2z \end{cases} \iff x - z = 0 \iff E_2 = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

Comme $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ et $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ sont des bases OTN de E_4 et E_2, le théorème spectral assure que

$\boxed{S = PDP^T, \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$

c) Si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, $X \neq 0$, posons $Y = PX$. On a $Y \neq 0$ sinon, comme P est inversible on aurait $X = 0$. Enfin $X^T S X = Y^T D Y = 4x_1^2 + 2y_1^2 + 2z_1^2$ avec $Y = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$. Donc $X^T S X \geq 0$ et si $X^T S X = 0$, alors $x_1 = y_1 = z_1 = 0$ soit $Y = 0$; absurde cl. $\boxed{S \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \text{ et (avec le 2°) } N_q \text{ norme euclid.}}$

~~c) si on pose $\mathcal{B}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ base OTN de E~~

~~$\Sigma(N_q)$ a pour équation : $4X^2+2Y^2+2Z^2=1$. C'est l'équation réduite d'une ellipsoïde.~~

~~c) c'est une surface de révolution d'axe $E_4 = \boxed{\text{Vect}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}}$~~

~~$\left(\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}=1 \text{ avec } b=c\right)$~~

d) Soit $u_\theta : E \longrightarrow E$ pour $\theta \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1} \longmapsto \begin{pmatrix}X\\ \cos\theta Y - \sin\theta Z\\ \sin\theta Y + \cos\theta Z\end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1}$$

$u_\theta \in \mathcal{L}(E)$, soit $\vec{x}\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1} \in E \setminus N_q(\vec{x}) = 1$, donc $4X^2+2Y^2+2Z^2=1$.

et l'on a $N_q(u_\theta(\vec{x})) = 4X^2 + 2(\cos\theta Y - \sin\theta Z)^2 + 2(\sin\theta Y + \cos\theta Z)^2$

$$= 4X^2 + 2Y^2 + 2Z^2 = 1$$

Donc $u_\theta(\Sigma(N_q)) \subset \Sigma(N_q)$ et comme $\det u_\theta = \begin{vmatrix}1&0&0\\0&\cos\theta&-\sin\theta\\0&\sin\theta&\cos\theta\end{vmatrix} = 1$,

$u_\theta \in GL(E)$, on a $u_\theta(\Sigma(N_q)) = \Sigma(N_q)$. Comme les u_θ sont 2 à 2 distincts pour $\theta \in [0, 2\pi[$, cl : $\boxed{\text{Isom}(N_q) \text{ infini}}$

8 a) c'est du cours avec l'identité de polarisation :

$$\langle x, y\rangle_S = \frac{1}{2}\left(N_q(x+y)^2 - N_q(x)^2 - N_q(y)^2\right)$$

b) matriciellement l'égalité du 8 a) s'écrit $\forall X, Y$:

$$(AX)^T S (AY) = X^T S Y \iff \forall X, Y : X^T A^T S A Y = X^T S Y$$

or on sait que si b est une forme bilinéaire et M sa matrice ds la base $\mathcal{B}$, on a :

$b(x,y) = X^T M Y$ donc $A^T S A$ et S sont matrice du p.s. $\langle\,,\,\rangle_S$ ds $\mathcal{B}$ donc $A^T S A = S$.

cl. $\boxed{u \in Isom(N_q) \Leftrightarrow A^T S A = S \quad (A = M_{\mathcal{B}}(u))}$

9) La base $\mathcal{B}$ est OTN pour $\|\;\|_2$ donc $S = I_n$ et donc

$ISOM(\|\;\|_2) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A^T A = I_n\} = O_n(\mathbb{R})$

$\forall \theta \in \mathbb{R}$ $A = \begin{pmatrix} R_\theta & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix} \in O_n(\mathbb{R})$ avec $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

2 à 2 $\neq$ pour $\theta \in [0, 2\pi[$

cl $\boxed{ISOM(\|\;\|_2) = O_n(\mathbb{R}) \text{ qui est infini}}$

10 a) Si $u(P) = 0$; $P(x_0) = \cdots = P(x_n) = 0$ donc P admet au moins $n+1$ racines et comme $d°P \leq n$, $P = 0$ et donc $\boxed{\ker u = \{0\}}$

Comme $\dim \mathbb{R}_n[X] = \dim \mathbb{R}^{n+1}$, $\boxed{u \text{ est bijective}}$

Csq $\forall (y_0, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ $\exists!\, L \in \mathbb{R}_n[X] \mid \forall i \in [\![0,n]\!]$ $L(x_i) = y_i$

10 b On a facilement $L(U) = \begin{pmatrix} L(u_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & L(u_n) \end{pmatrix}$

Soit $L_0 \in \mathbb{R}[X] \setminus \forall i \in [\![1, n]\!]$ $L_0(u_i) = \sqrt{u_i}$ (si $u_i = u_j$ alors $\sqrt{u_i} = \sqrt{u_j}$, donc si les (u_i) ne sont pas 2 à 2 distincts, on ne garde "qu'un exemplaire" de chaque)

cl $\boxed{L_0(U) = V}$

11 a) Comme S est symétique donc par le théorème spec-tral, S est diagonalisable. Soit $\lambda \in sp(S)$ et $X \neq 0 \setminus$ $SX = \lambda X$ donc $X^T S X = \lambda \|X\|_2^2 > 0$ et donc $\lambda > 0$ d'où $Sp(S) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subset \mathbb{R}_+^*$ $\quad S = P\begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix} P^T$

Posons $A = P\begin{pmatrix} \sqrt{\alpha_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\alpha_n} \end{pmatrix} P^T$, on a $\underline{A^2 = S}$, $A^T = A$ donc $A \in S_n(\mathbb{R})$ et comme $Sp(A) = \{\sqrt{\alpha_1}, \ldots, \sqrt{\alpha_n}\} \subset \mathbb{R}_+^*$, on a (revoir le cours) $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. cl $\boxed{A \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \text{ et } A^2 = S}$

b) Soit L tel que $\forall i \in [\![1, n]\!]$ $L(\alpha_i) = \sqrt{\alpha_i}$ (notation du 10b))

On a donc $\begin{pmatrix} \sqrt{\alpha_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\alpha_n} \end{pmatrix} = L\left(\begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}\right)$

d'où $$\underbrace{P\begin{pmatrix} \sqrt{\alpha_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\alpha_n} \end{pmatrix} P^T}_{= A} = \underbrace{P L\left(\begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}\right) P^T}_{= L(S) \text{ car } P^T = P^{-1} \text{ et } L = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i X^i \ldots)}$$

donc $A = L(S)$. Soit $B \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \setminus B^2 = S$

On a donc $A = L(B^2)$. Posons $\underline{Q(X) = L(X^2)}$

$\underline{d}$ $\boxed{Q \in \mathbb{R}[X] \text{ et } A = Q(B)}$

Comme $\mathbb{R}[B]$ est une $\underline{\text{algèbre commutative}}$, on a

$\boxed{AB = BA}$

c) Soit $(S_1, S_2) \in S_n^{++}(\mathbb{R})^2$ et soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ \
$(S_1 + S_2)X = 0$ donc $X^T(S_1 + S_2)X = 0$ soit :
$X^T S_1 X + X^T S_2 X = 0$. Si $X \neq 0$, alors $\underbrace{X^T S_1 X + X^T S_2 X}_{=0} > 0 + 0 = 0$:
Absurde donc $X = 0$ et $\boxed{S_1 + S_2 \text{ inversible}}$

d) $(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2 = S^2 - \underset{\uparrow\, 10\, b)}{0} - S^2 = 0$

Avec c), $A+B$ inversible donc $(A+B)^{-1}(A+B)(A-B) = 0$
donc $A - B = 0$ $\underline{d}$ $\boxed{A = B}$

12 a) Posons $B = \sqrt{S} \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ donc $B^2 = S$, $B^T = B$ et $(B^{-1})^T = B^{-1}$.
Utilisons le 8 b) :

$$((\sqrt{S})^{-1} \Pi \sqrt{S})^T S (\sqrt{S})^{-1} \Pi \sqrt{S} = B \Pi^T B^{-1} \overset{=B^2}{S} B^{-1} \Pi B = B \overbrace{\Pi^T \Pi}^{=I_n} B = \underset{=S}{B^2}$$

$\underline{d}$ $\boxed{(\sqrt{S})^{-1} \Pi \sqrt{S} \in \mathrm{ISOM}(M_S)}$

b) Avec le 12a), Ψ est bien définie. ⑧

$\forall N \in ISOM(N_S)$, résolvons $(\sqrt{S})^{-1} M \sqrt{S} = N$; (E)

(E) $\Leftrightarrow M = \sqrt{S}\, N (\sqrt{S})^{-1}$, on montre comme au a) que ${}^{T}M M = I_n$

donc $M \in O_n(\mathbb{R})$.

cl $\boxed{\Psi \text{ est une bijection et avec le 9), } ISOM(N_S) \text{ est infini}}$

IV 13 a) Soit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$; $u_{\sigma,\varepsilon}(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \varepsilon_i e_{\sigma(i)}$

donc $\|u_{\sigma,\varepsilon}(x)\|_p^p = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p = \|x\|_p^p$ cl. $\boxed{u_{\sigma,\varepsilon} \text{ p-isométrie}}$

b) $u_{\sigma,\varepsilon}(e_1) = 1 \times e_3$, $u_{\sigma,\varepsilon}(e_2) = e_4$, $u_{\sigma,\varepsilon}(e_3) = -e_1$ et $u_{\sigma,\varepsilon}(e_4) = e_2$

cl. $\boxed{M_{\mathcal{B}}(u_{\sigma,\varepsilon}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$

14 a) Si $a > 0$ et $b > 0$, $\ln ab = \ln a + \ln b = \frac{1}{p} \ln a^p + \frac{1}{q} \ln b^q$

or $t = \frac{1}{p} \in [0,1]$, car $p > 1$ et $\frac{1}{q} = 1 - t$; donc

$\ln ab = t \ln a^p + (1-t) \ln b^q$

Comme $t \overset{\varphi}{\mapsto} \ln t$ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$ $\left(\varphi''(t) = \frac{-1}{t^2} < 0\right)$:

On a donc $t \ln a^p + (1-t) \ln b^q \leq \ln(t a^p + (1-t) b^q)$

d'où $\ln ab \leq \ln\left(\frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q\right)$. Comme $\ln$ est st $\nearrow$,

on a $\underline{ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q}$

Si $t = 0$ et $\alpha > 0$, on convient (par continuité) que $0^\alpha = 0$. Avec cette convention, si $a = 0$ ou $b = 0$, l'inégalité devient triviale. $\underline{d}$ $\boxed{\forall a, b \geq 0 \quad ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q}$

b) si $\|x\|_p = \|y\|_q = 1$, $|\langle x, y\rangle| \leq \sum_{i=1}^n |x_i y_i|$

$$\leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{p}|x_i|^p + \frac{1}{q}|y_i|^q$$

$$\leq \frac{1}{p} \times 1 + \frac{1}{q} \times 1 = 1$$

d'où si $x \neq 0$ et $y \neq 0$, alors $\left\|\frac{x}{\|x\|_p}\right\|_p = \left\|\frac{y}{\|y\|_q}\right\|_q = 1$

d'où $\left|\left\langle \frac{x}{\|x\|_p}, \frac{y}{\|y\|_q} \right\rangle\right| \leq 1$. Par bilinéarité et comme les normes sont positives, on a donc

$\boxed{|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|_p \cdot \|y\|_q}$ inégalité qui est triviale si $x = 0$ ou $y = 0$

c) c'est $\underline{\text{Cauchy-Schwarz !}}$.

15) $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$ sont les coordonnées de $u(e_j)$ ds $\mathcal{B}$, donc

$$\left\|\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}\right\|_p = \|u(e_j)\|_p \overset{u \text{ p-isométrie}}{=} \|e_j\|_p = 1 \quad \text{donc} \quad \boxed{\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|^p = 1}$$

csq $\boxed{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^p = n}$

16 a) Comme E est de dim. finie, Σ_q boule fermé de rayon 1 pour $\|\ \|_q$ est fermée bornée et donc compact.

D'autre part, $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}$, $y \longmapsto |\langle x, y\rangle|$ est continue car le ps sur E est C^0 et $t \mapsto |t|$ aussi d'où φ par TG, aussi

csq φ est bornée et atteint ses bornes sur le compact Σ_q. cl $\boxed{\max_{y \in \Sigma_q} |\langle x, y\rangle| \text{ existe (ds } \mathbb{R})}$

b) $\forall y \in \Sigma_q \quad |\langle x, y\rangle| \underset{\text{par le 14 b)}}{\leq} \|x\|_p \times \|y\|_q = \|x\|_p$. ← donc c'est un majorant

cl $\boxed{\max_{y \in \Sigma_q} |\langle x, y\rangle| \leq \|x\|_p}$

si $x \neq 0$ $|\langle x, y\rangle| = \left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| = \left|\sum_{\substack{i=1\\ x_i\neq 0}}^{n} x_i y_i\right| = \left|\sum_{\substack{i=1\\ x_i\neq 0}}^{n} \overbrace{x_i \varepsilon_i}^{=|x_i|} |x_i|^{p-1} \cdot \|x\|_p^{1-p}\right|$

$$= \left|\sum_{\substack{i=1\\ x_i\neq 0}}^{n} |x_i|^p\right| \times \|x\|_p^{1-p} = \|x\|_p^p \cdot \|x\|_p^{1-p} = \|x\|_p$$

et si $x=0$, c'est trivial !

csq $\underline{|\langle x, y\rangle| = \|x\|_p}$

Posons ce y : y_0. On a $|\langle x, y_0\rangle| = \|x\|_p$.

$\|y_0\|_q^q = \sum_{\substack{i=1\\ y_i\neq 0}}^{n} |x_i|^{(p-1)q} \|x\|_p^{(1-p)q} = \|x\|_p^p \times \|x\|_p^{-p} = 1$. On a

$(p-1)q = p$ $\quad (1-p)q = -p$

donc $y_0 \in \Sigma_q$ et donc $|\langle x, y_0\rangle| = \|x\|_p \leq \max_{y\in\Sigma_q} |\langle x, y\rangle|$

On conclut avec le début de 16 b) : $\boxed{\max_{y\in\Sigma_q} |\langle x, y\rangle| = \|x\|_p}$

17) $\forall y \in E$ $\|u^*(y)\|_q \overset{16 b)}{=} \max_{x\in\Sigma_p} |\langle u^*(y), x\rangle|$

$$= \max_{x\in\Sigma_p} |\langle y, u(x)\rangle|$$

$$= \max_{x'\in u(\Sigma_p)} |\langle y, x'\rangle|$$

Or u étant une p-isométrie, avec le 5), on a $u(\Sigma_p) = \Sigma_p$ d'où $\|u^*(y)\|_q = \max\limits_{x' \in \Sigma_p} |\langle y, x' \rangle| = \|y\|_q$ (16 b)) (12)

d. $\boxed{u^* \ q\text{-isométrie}}$

On sait que comme $\mathcal{B}$ est OTN, si $A = M_{\mathcal{B}}(u)$ alors $M_{\mathcal{B}}(u^*) = {}^tA = (a_{ji})$. A l'aide du 15) et de u^* q-isométrie :
$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ji}|^q = n}$$

18 a) Par symétrie de p et q supposons $p \leq q$ et si $p = q$ alors $p = q = 2$, comme $p \neq 2$ on a donc $\underline{p < q}$.
$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^p = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^q \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^p - \alpha_k^q = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^p \left[1 - \alpha_k^{q-p}\right] = 0.$$

Comme au 14 a), posons $\varphi(t) = t^{q-p}$ et $\varphi(0) = 0$ (par continuité car $q-p>0$), on a $\forall t \in [0,1]\ 1 - \varphi(t) \geq 0$ donc $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^p = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^q \Rightarrow \forall k \in [\![1, n]\!] : \alpha_k^p (1 - \alpha_k^{q-p}) = 0$

d'où $\boxed{\forall k \in [\![1, n]\!]\ \alpha_k = 0 \text{ ou } \alpha_k = 1}$

b) Comme $n=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}|a_{i,j}|^{p}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}|a_{j,i}|^{q}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{j,i}|^{q}$

$\sum_i\sum_j=\sum_j\sum_i$

$=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}|a_{i,j}|^{q}$ cdv $i\leftrightarrow j$

d'autre part, $\forall j\in[\![1,n]\!]\ \sum_{i=1}^{n}|a_{i,j}|^{p}=1$ et donc $\forall i$,

$|a_{i,j}|\leq 1$ donc $\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]^2\ |a_{i,j}|\in[0,1]$

Grâce au a) : $\boxed{\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]^2\ |a_{i,j}|\in\{0,1\}}$

avec "$k=(i,j)$ et $n=n^2$

1 g) Si $A=M_B(u)\in ISOM(p)$, alors $a_{i,j}\in\{-1,0,1\}$, comme $\sum_{i=1}^{n}|a_{i,j}|^{p}=1$, $\exists!\, i_j\in[\![1,n]\!]\setminus a_{i_j,j}=\pm1$ et $a_{i,j}=0$ pour $i\neq i_j$

Comme A est inversible, $rg\,A=n$ et donc si $j\neq j'$ alors $i_j\neq i_{j'}$ donc $\sigma:[\![1,n]\!]\longrightarrow[\![1,n]\!]$, $j\longmapsto i_j$ est injective et donc bijective. On a donc $u=u_{\sigma,\varepsilon}$ avec $\varepsilon=(a_{i_1,1},\dots,a_{i_n,n})$ avec les notations du 13 a). Comme $u_{\sigma,\varepsilon}=u_{\sigma',\varepsilon'}\Rightarrow\sigma=\sigma'$ et $\varepsilon=\varepsilon'$

$$\boxed{Isom(p)=\{u_{\sigma,\varepsilon},\ \sigma\in\mathcal{S}_n\ \&\ \varepsilon\in\{-1,1\}^n\}\text{ et donc } card(Isom(p))=2^n\times n!}$$

1\. b) $\| \|_2$ euclidienne : cours ! et si $p \neq 2$:

pour $x = (1, 0, \dots, 0)$ et $y = (0, 1, \dots, 0)$, on a :

$\|x\|_p = \|y\|_p = 1$, $\|x+y\|_p = \|x-y\|_p = 2^{1/p}$

si $\| \|_p$ était une norme euclidienne, on aurait

avec le I 1) : $2^{2/p} + 2^{2/p} = 2(1^2 + 1^2)$ donc $2^{2/p} = 2$

d'où $\frac{2}{p} \ln 2 = \ln 2 \Rightarrow p = 2$; Absurde.

$\underline{\text{cl}}$ $\boxed{\forall p \neq 2,\ \| \|_p \text{ n'est pas euclidienne}}$