SPE MP ····· 2025-2026

PROGRAMME DE COLLE 22

DEUX EN UN

1. Cours et Exercices : ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELS LINÉAIRES SCALAIRES D'ORDRE $1, 2, N$

Équations différentielles scalaires d'ordre 1 :

Formules générales pour une équation régulière (ou de forme résolue). **Problème de raccord.**

Équations différentielles scalaires d'ordre 2 :

Définitions, formules générales pour une équation régulière (ou résolue). Structure, wronskien d'un couple de solution de l'équation homogène. Caractérisation des bases de l'ensemble des solutions de l'équation homogène. Méthode de Lagrange (variation de la constante) pour trouver une "autre" solution de l'équation homogène lorsque l'on en connait déjà une ne s'annulant pas.

Utilisation des **séries entières**.

Méthode de variation DES 2 constantes.

Équations différentielles d'ordre 2 à coefficients constants.

Problème de raccord.

Équations différentielles scalaires d'ordre n.

2. Cours : GROUPES

Définition de groupe, de sous-groupe, de morphisme de groupe, noyau, image d'un morphisme, de sous-groupe engendré, de partie génératrice, de groupe monogène, de groupe cyclique.

Exemples de générateurs de $\mathcal{S}_n$, de $O(E)$ (réflexions).

- Les sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ sont monogènes.
- Les sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$ sont monogènes ou denses dans $\mathbb{R}$.

Relation de congruence modulo n, ensemble quotient : $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, lois $+$ et $\times$.

Structure d'anneau de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Morphisme canonique de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

- Générateur de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$.

Ordre d'un élément d'un groupe quelconque.

- L'ordre d'un élément divise le cardinal du groupe (2 démonstrations : abélien ou pas)
- Éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Indicateur d'Euler : $\varphi(n)$.

Théorème chinois : version avec le système de congruence $\begin{cases} x \equiv a\ (m) \\ x \equiv b\ (n) \end{cases}$ avec $m \wedge n = 1$

- Calcul de $\varphi(n)$ à l'aide de l'isomorphisme d'anneaux de $\mathbb{Z}/nm\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ et du calcul direct de $\varphi(p^n)$.
- Théorème d'Euler-Fermat : Si $a \wedge n = 1$ alors $a^{\varphi(n)} \equiv 1\ (n)$

Corollaire : Petit théorème de Fermat.

Prévisions : Pas de prévisions