CCP - MP2 - 2015 : exercice 1 corrigé Ds 11 ①

I. 1) $21 = 16 + 5 = 16 + 4 + 1 = \overline{10101}^{2}$

I. 2)

k	1	2	3
c_k	6	5	2
t_k	[6]	[6, 5]	[6, 5, 2]
n_k	25	2	0

I. 3, a) Supposons que la boucle ne se termine jamais, alors la suite $(n_k)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie ci-dessus est définie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et $n_k > 0$. Donc

$\forall k \in \mathbb{N}^* : n_{k+1} \leq \frac{n_k}{10} < n_k$ car $n_k > 0$

Cqs : la suite $(n_k)_{k \geq 1}$ est strictement décroissante et minorée par 0 donc converge et donc est stationnaire

absurde d $\boxed{\text{La boucle while se termine}}$

3, b) Raisonnons par récurrence (finie) : $H_k : n_k \leq \frac{n}{10^k}$

$n_0 = n \leq \frac{n}{10^0}$

Supposons que H_k vraie et $k < p$.

On a donc $n_k > 0$, d'où $n_{k+1} \leqslant \frac{n_k}{10} \leqslant \frac{n}{10^{k+1}}$

d'où $\boxed{\forall k \in [\![0, p]\!] ; \quad n_k \leqslant \frac{n}{10^k}}$

On a donc $n_p = 0$, c'est le premier qui vaut 0 et

donc $n_{p-1} \geqslant 1$ d'où $1 \leqslant n_{p-1} \leqslant \frac{n}{10^{p-1}}$ soit $10^{p-1} \leqslant n$

cqd $p-1 \leqslant \frac{\ln n}{\ln 10}$ d'où $\boxed{p \leqslant 1 + \frac{\ln n}{\ln 10}}$

rem, on peut montrer que $p = \lfloor \frac{\ln n}{\ln 10} \rfloor + 1$ $(= \lfloor \log_{10} n \rfloor + 1)$

I, 4) Les c_k sont les chiffres de n en base b, il suffit donc de les additionner au fur et à mesure,

```
def somme_chiffre(n): # en base 10
    s = 0
    while n > 0:
        s = s + n % b
        n = n // 10
    return s
```

I, 5) Si $n = \overline{c_{p-1} c_{p-2} \cdots c_1 c_0}^{10}$ ③

$$\text{somme\_rec}(n) = c_0 + \text{somme\_rec}\left(\overline{c_{p-1} \cdots c_1}^{10}\right)$$
$$= n \% 10 + \text{somme\_rec}(n // 10)$$

d'où

```
def somme_rec(n):
    if n <= 9:
        return n
    else:
        return n % 10 + somme_rec(n // 10)
```

exercice 2

①

II. 1. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2(2-x-y) - 2(1-x) - 4(1-2x-y)$

$= \underline{12x + 6y - 10}$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2(2-x-y) - 2(1-2x-y)$

$= \underline{6x + 4y - 6}$

$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 3y = 5 \\ 6x + 4y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 & L_2 - L_1 \\ x = \frac{5-3}{6} = \frac{1}{3} & L_1 \end{cases}$

d $\boxed{(x_0, y_0) = \left(\frac{1}{3}, 1\right)}$

$f(x_0, y_0) = \frac{4}{3}$ d'où $\boxed{\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) = \frac{4}{3}}$

II 1. Si $b = p_F(a)$, $a - b \in F^\perp$ or $F = \text{vect}(u, v)$,

donc $a - b \in F^\perp \Leftrightarrow \begin{cases} a-b \perp u \\ a-b \perp v \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} (a-b|u) = 0 \\ (a-b|v) = 0 \end{cases}}$

Résolvons ce système en posant $b = xu + yv$ $(\in F)$

$\begin{cases} (xu + yv - a | u) = 0 \\ (xu + yv - a | v) = 0 \end{cases}$

2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\|u\|^2 + y(u|v) = (a|u) \\ x(u|v) + y\|v\|^2 = (a|v) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 3y = 5 \\ 3x + 2y = 3 \end{cases}$$ c'est le même système qu'au II.2.

d' $\boxed{b = \frac{1}{3}u + v = \left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right)}$

On remarque que $f(x,y) = \left\| \begin{pmatrix} 2-x-y \\ 1-x \\ 1-2x-y \end{pmatrix} \right\|^2$

$$= \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - y\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2$$

$$= \|a - (xu + yv)\|^2$$

En conséquence : $m = \min_{\mathbb{R}^2} f(x,y) = \min_{z \in F} \|a - z\|^2$

$$= d(a,F)^2 = \|a-b\|^2$$

$$= \left\| \left(\frac{2}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{-2}{3}\right) \right\|^2$$

$$= \frac{4}{9}\|(1,-1,-1)\|^2 = \frac{4}{9} \times 3 = \frac{4}{3}$$

d' $\boxed{m = \frac{4}{3}}$ (la m̂ valeur qu'au II.1.!)

CCP - MP$_2$ - 2015 - problème

III. 1 Si $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ alors $AB = (c_{ij})$ et

$c_{i,j} = \sum_{\alpha=1}^{n} a_{i\alpha} b_{\alpha j}$ donc $|c_{ij}| \leq \sum_{\alpha=1}^{n} \|A\|_\infty \cdot \|B\|_\infty = n\|A\|_\infty \cdot \|B\|_\infty$

d'où $\|AB\|_\infty \leq n \|A\|_\infty \|B\|_\infty$

donc $\frac{\|AB\|}{\cancel{n}} \leq \cancel{n} \frac{\|A\|}{\cancel{n}} \frac{\|B\|}{\cancel{n}}$ d $\boxed{\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|}$

III. 2) Voir le cours

III. 3) $0 \leq \|\frac{1}{k!} M^k\| \leq \frac{a^k}{k!}$ avec $a = \|M\| \geq 0$

Comme $\left(\sum \frac{a^k}{k!}\right)$ cvg, par TC, $\left(\sum \|\frac{M^k}{k!}\|\right)$ cvg

On conclut avec le 2) : $\boxed{\left(\sum \frac{1}{k!} M^k\right) \text{ cvg}}$

III. 4) M est trigonalisable car son polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{C}$, (Th de d'Alembert-Gauss)

Donc $\exists P \in GL_n(\mathbb{C})$, $\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ | $M = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}$

②

d'où $\forall i \in \mathbb{N}$ $M^i = P \begin{pmatrix} \lambda_1^i & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^i \end{pmatrix} P^{-1}$ et par C.L. et

TG (limite dans un evn) : $e^M = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1}$

Ainsi $\det e^M = \det \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} = e^{\lambda_1 + \dots + \lambda_n} = e^{Tr(M)}$

d'où $\boxed{\det(e^M) = e^{Tr(M)}}$

III 4) $\det A = 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & -9 & 11 \\ 0 & -5 & 7 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -7 & 9 \\ 0 & -5 & 7 \end{vmatrix}$ $L_2 + L_1$

factorisation 1re ligne

d'où $\boxed{\det A = -12}$

s'il existait $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid B^2 = A$, alors $\det A = -12 = (\det B)^2 \geq 0$: contradiction

s'il existait $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid e^M = A$, alors $\det A = e^{Tr(M)} > 0$: contradiction

d'où $\boxed{\nexists B \text{ et } \nexists M \text{ dans } \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid B^2 = A \text{ ou } e^M = A}$

III 6 a) Comme $(-3)^n = e^{in\pi} 3^n$,

$$\boxed{f(x) = \alpha e^{i\pi x} 3^x + \beta x^2 2^x \text{ convient dans } F}$$

6 b) Si $f \in F$, elle est combinaison linéaire (finie) des fonctions $f_{k,\rho,\theta} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, $x \longmapsto x^k \rho^x e^{i\theta x}$

Il suffit donc de prouver le résultat pour $f_{k,\rho,\theta}$:

$$\forall x \in \mathbb{R} : f_{k,\rho,\theta}(x+x_0) = (x+x_0)^k \rho^{x+x_0} e^{i\theta(x+x_0)}$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} x_0^{k-j} x^j \rho^{x_0} \rho^x e^{i\theta x_0} e^{i\theta x}$$

donc $f_{k,\rho,\theta} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} x_0^{k-j} \rho^{x_0} e^{i\theta x_0} f_{j,\rho,\theta} \in F$

car somme finie, $j \in [\![0,k]\!] \subset [\![0,2]\!]$, $\rho > 0$, θ cm

d'où $\boxed{f \in F \Rightarrow \forall x_0 \in \mathbb{R}, [x \longmapsto f(x+x_0)] \in F}$

III.7. a) $0 \leq \left| n^2 \left(\frac{2}{3}\right)^n e^{i\theta n} \right| = n^2 \left(\frac{2}{3}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ par C.C.

par thm d'encadrement : $\boxed{\left(n^2 \left(\frac{2}{3}\right)^n e^{i\theta n}\right) \text{ cvg vers } 0}$

7.b) 1er cas $0 < \rho_1 < \rho_2$, on factorise par ρ_2^n : (4)

$$\rho_2^n \left[\alpha n^{k_1} \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^n e^{i\theta_1 n} + \beta n^{k_2} e^{i\theta_2 n} \right] = 0$$

donc $\alpha n^{k_1} q^n e^{i\theta_1 n} = -\beta n^{k_2} e^{i\theta_2 n}$ avec $q = \frac{\rho_1}{\rho_2}$

d'où $\underbrace{|\alpha| n^{k_1} q^n}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \text{ par cc (comme au 7a))}} = |\beta| n^{k_2}$.

si $\beta \neq 0$, alors $|\beta| n^{k_2} \longrightarrow \begin{cases} |\beta| & \text{si } k_2 = 0 \\ +\infty & \text{si } k_2 \geq 1 \end{cases}$

absurde donc $\beta = 0$, d'où $\alpha = 0$ d'où $\boxed{\alpha = \beta = 0}$

2e cas : $0 < \rho_1 = \rho_2$, on simplifie par ρ_1^n :

$$\alpha n^{k_1} e^{i\theta_1 n} + \beta n^{k_2} e^{i\theta_2 n} = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \underbrace{\alpha n^{k_1 - k_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)n}}_{\alpha_n} + \beta = 0$$

si $k_1 \neq k_2$ $|\alpha_n| \longrightarrow \begin{cases} 0 & \text{si } k_1 < k_2 \\ +\infty & \text{si } \alpha \neq 0 \text{ et } \underline{k_1 > k_2} \\ 0 & \text{si } \alpha = 0 \end{cases}$

ceci impose $k_1 = k_2$

d'où $\alpha e^{i(\theta_1-\theta_2)n} + \beta = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$

posons $\theta = \theta_1 - \theta_2 \in]-2\pi, 2\pi[- \{0\}$, on a

$$\begin{matrix} n=0 \\ n=1 \end{matrix} \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha e^{i\theta} + \beta = 0 \end{cases}$$ le déterminant de ce système

vaut $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{i\theta} & 1 \end{vmatrix} = 1 - e^{i\theta} \neq 0$ donc $\underline{\alpha = \beta = 0}$

d'ou : $\boxed{\text{dans tous les cas } \alpha = \beta = 0}$

7c) $\varphi = f - g \in F$ (sev) et $\forall n \in \mathbb{N}$ $\varphi(n) = 0$, avec le point admis : d'où $\boxed{\varphi = 0 \text{ soit } f = g}$

III.8) On s'inspire de l'exemple :

$$X^n = \chi_A(X)Q(X) + a_n X^2 + b_n X + c_n \quad \text{(div. euclid.)}$$

et donc $\underline{A^n = a_n A^2 + b_n A + c_n I_3}$ (C. H.)

Détermination de a_n, b_n, c_n :

$\underset{\sim\sim\sim}{1^{er} \text{ cas}}$: 3 racines complexes α, β, γ distinctes 2 à 2 de χ_A

⑥

On a 3 équations linéaires : $\lambda^n = \lambda^2 a_n + \lambda b_n + c_n$

avec $\lambda = \alpha, \beta, \gamma$.

Le déterminant de ce système vaut :

ou $\boxed{\text{VDM}}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha^2 & \alpha & 1 \\ \beta^2 & \beta & 1 \\ \gamma^2 & \gamma & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha^2 & \alpha & 1 \\ \beta^2-\alpha^2 & \beta-\alpha & 0 \\ \gamma^2-\alpha^2 & \gamma-\alpha & 0 \end{vmatrix} = (\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta) \neq 0$$

Par Cramer :

a_n, b_n, c_n s'exprime donc comme C. L. de

$\alpha^n, \beta^n, \gamma^n$ d'où les 9 coefficients de A^n sont

des C. L. de $\alpha^n, \beta^n, \gamma^n$: $w_{i,j}(n) = \lambda_{i,j}\,\alpha^n + \mu_{i,j}\,\beta^n + \nu_{i,j}\,\gamma^n$

donc, comme au III 6 a), on peut choisir $w_{i,j} \in F$.

2ème cas : 2 racines 2 à 2 distinctes, c'est comme dans l'exemple $\chi_A(x) = (x-\alpha)^2(x-\beta)$, les 3 éq. sont :

$$\begin{cases} \alpha^2 a_n + \alpha b_n + c_n = \alpha^n \\ 2\alpha a_n + b_n = n\alpha^{n-1} \\ \beta^2 a_n + \beta b_n + c_n = \beta^n \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha^2 & \alpha & 1 \\ 2\alpha & 1 & 0 \\ \beta^2 & \beta & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha^2 & \alpha & 1 \\ 2\alpha & 1 & 0 \\ \beta^2-\alpha^2 & \beta-\alpha & 0 \end{vmatrix} = -(\alpha-\beta)^2 \neq 0$$

donc (idem) $w_{ij}(n) = \lambda_{i,j}\,\alpha^n + \mu_{i,j}\,n\alpha^{n-1} + \nu_{ij}\,\beta^n$

⑦

3^{e} cas $\chi_A(x) = (x-\alpha)^3$, on dérive 2 fois

d'où $\begin{cases} \alpha^2 a_n + \alpha b_n + c_n = \alpha^n \\ 2\alpha a_n + b_n = n\alpha^{n-1} \\ 2a_n = n(n-1)\alpha^{n-2} \end{cases}$ $\Delta = \begin{vmatrix} \alpha^2 & \alpha & 1 \\ 2\alpha & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$

donc $w_{ij}(n) = \lambda_{ij}\alpha^n + \mu_{ij} n\alpha^{n-1} + \nu_{ij} n^2 \alpha^{n-2}$

rem: comme A inversible toute racine (ds les 3 cas) est non nulle et donc $\lambda^n = \rho^n e^{in\theta}$

$n\lambda^{n-1} = \frac{1}{\lambda} n \rho^n e^{in\theta} \ldots$

d'où $\boxed{\text{Ds tous les cas, il existe des applic. } w_{ij} \in F}$

III.9.a) $\underline{\gamma(0) = A^0 = I_3}$ et $\underline{\gamma(1) = A^1 = A}$

9.b) $\gamma(m+n) = (w_{ij}(m+n)) = A^{m+n} = A^m \times A^n$

$= (w_{ij}(m)) \times (w_{ij}(n)) = \gamma(m)\gamma(n)$

d'où $\boxed{\gamma(m+n) = \gamma(m) \times \gamma(n)}$

9.c) $\forall n \in \mathbb{N}$ $\delta(n) = g(n)$ car $g(n)$ est l'expression matricielle de $A^n \times A^m$ et la formule du 9b),

$$g = \sum_{k=1}^{3} \underbrace{w_{k,j}(m)}_{\in \mathbb{C}} \underbrace{w_{i,k}}_{\in F} \in F \quad (\text{CL et } F \text{ sev})$$

Avec le 7c), $\boxed{\delta = g}$, Comme c'est vrai pour tout couple $(i,j) \in [\![1, 3]\!]^2$, on conclut

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \forall m \in \mathbb{N}\quad \gamma(x+m) = \gamma(x)\gamma(m)}$$

9.d) De la même manière, toujours avec le 7c), on peut remplacer le $m \in \mathbb{N}$ par $y \in \mathbb{R}$ au c)

d $\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \gamma(x+y) = \gamma(x)\gamma(y)}$

III.10) $\gamma(1+(-1)) = \gamma(0) = \underline{I_3} = \gamma(1)\gamma(-1) = \underline{A\gamma(-1)}$

d'où $\boxed{A^{-1} = \gamma(-1)}$

Par récurrence, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ $\gamma(nx) = \gamma(x)^n$

d'où pour $x = \frac{1}{p}$ et $n = p$: $\gamma(1) = A = \gamma(\frac{1}{p})^p$ (9)

<u>d</u> $\boxed{A = \gamma(\frac{1}{p})^p}$

III, 11) Toutes les fonctions $f_{n,p,\theta}$ sont C^1 sur $\mathbb{R}$ par TG, d'où (thm T.G. et C.L.), toutes les fct de F sont $C^1/\mathbb{R}$ et donc (erreur de simplifie) : $\boxed{\gamma \ C^1 \text{ sur } \mathbb{R}}$

Dérivons l'expression du 9 d) par rapport à x (y fixé) :

$\gamma'(x+y) = \gamma'(x)\gamma(y)$

puis posons $x = 0$ et $y = t \in \mathbb{R}$: $\underline{\gamma'(t) = \gamma'(0)\gamma(t)}$

<u>cqs</u> $\boxed{\gamma \text{ sol. de } u' = \gamma'(0)u}$

La solution unique de ce problème de Cauchy est $\underline{u(t) = u(0)e^{t\gamma'(0)}}$

d'où pour $t = 1$, on conclut : $u(1) = \gamma(1) = A = I_3 e^{\gamma'(0)}$

<u>d'</u> : $\boxed{A = e^{\gamma'(0)}}$

III . 12) $\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x-3 & 0 & -1 \\ -1 & x+1 & 2 \\ 1 & 0 & x-1 \end{vmatrix}$ dev. $2^{\text{ème}}$ col. (10)

$$= (x+1)\left((x-3)(x-1)+1\right)$$

d' $\boxed{\chi_A(x) = (x+1)(x^2-4x+4) = (x+1)(x-2)^2}$

Calculons $rg(A-2I_3) = 3 - \dim E_2(A)$

$$rg(A-2I_3) = rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \underset{C_3-C_1}{=} rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -3 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{C_3-C_2}{=} rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

d $\dim E_2(A) = 1 < 2 = m(2)$ d'où ($2^{\text{ème}}$ cas) $\boxed{A \text{ non diagonalisable}}$

III 13 a) b) c) $X^n = \chi_A(X)Q(X) + \underbrace{a(X-2)^2 + b(X-2) + c}_{\text{astuce pour écrire le reste } R_n(X)}$

d'où $X=2$: $\underline{c = 2^n}$

on dérive puis $X=2$: $n2^{n-1} = 0+0+b$ .. $\underline{b = n2^{n-1}}$

$X=-1$: $(-1)^n = 9a - 3b + c$ soit $a = \dfrac{3n2^{n-1} - 2^n + (-1)^n}{9}$

(11)

On en déduit $R_n(X) = \left[\frac{3n2^{n-1} - 2^n + (-1)^n}{9}\right](X-2)^2$
$$+ n2^{n-1}(X-2) + 2^n$$

d'où $R_n(X) = \frac{3n2^{n-1} - 2^n + (-1)^n}{9} X^2 + \frac{-3n2^{n-1} + 4.2^n - 4(-1)^n}{9} X +$
$$+ \frac{-6n2^{n-1} + 5.2^n + 4(-1)^n}{9}$$

d'où
$$\gamma(n) = A^n \overset{CH}{=} R_n(A) = \begin{pmatrix} 2^n + n2^{n-1} & 0 & n2^{n-1} \\ n2^{n-1} & (-1)^n & (-1)^n - 2^n + n2^{n-1} \\ -n2^{n-1} & 0 & 2^n - n2^{n-1} \end{pmatrix}$$

d'où
$$\boxed{\gamma(t) = \begin{pmatrix} 2^t + t2^{t-1} & 0 & t2^{t-1} \\ t2^{t-1} & e^{i\pi t} & e^{i\pi t} - 2^t + t2^{t-1} \\ -t2^{t-1} & 0 & 2^t - t2^{t-1} \end{pmatrix}}$$

On a donc * $\boxed{A^{-1} = \gamma(-1) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & -7 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}}$

* $\boxed{B = \gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 4i & -3\sqrt{2} + 4i \\ -\sqrt{2} & 0 & 3\sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ vérifie } B^2 = A}$

* Pour déterminer Γ, calculons $\gamma'(t)$:

(12)

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} \ln 2\left(2^t + t2^{t-1}\right) + 2^{t-1} & 0 & 2^{t-1} + \ln 2 . t . 2^{t-1} \\ 2^{t-1} + \ln 2 . t . 2^{t-1} & i\pi e^{i\pi t} & i\pi e^{i\pi t} + \ln 2\left(-2^t + t2^{t-1}\right) + 2^{t-1} \\ -2^{t-1} - \ln 2 . t . 2^{t-1} & 0 & \ln 2\left(2^t - t2^{t-1}\right) - 2^{t-1} \end{pmatrix}$$

d'où

$$\boxed{\Pi = \gamma'(0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \ln 2 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & i\pi & i\pi - \ln 2 + \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \ln 2 - \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{vérifie } e^{\Pi} = A}$$

I Inégalité de Hoffman-Wielandt

Corrigé Ds11*

I.A -

Q 1. Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit P et $\mathrm{Q} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Par propriétés de la trace et des matrices orthogonales, on a :

$$\|\mathrm{PMQ}\|_{\mathrm{F}}^2 = \mathrm{tr}\left(\mathrm{PMQ}(\mathrm{PMQ})^\top\right) = \mathrm{tr}\left(\mathrm{MQQ}^\top \mathrm{M}^\top \mathrm{P}^\top \mathrm{P}\right) = \mathrm{tr}\left(\mathrm{MI}_n \mathrm{M}^\top \mathrm{I}_n\right) = \|\mathrm{M}\|_{\mathrm{F}}^2$$

On a ainsi : $\boxed{\|\mathrm{PMQ}\|_{\mathrm{F}} = \|\mathrm{M}\|_{\mathrm{F}}}$

Q 2. Comme A et $\mathrm{B} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, le théorème spectral nous fournit U et $\mathrm{V} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tel que : $\mathrm{A} = \mathrm{UD_A U}^\top$ et $\mathrm{B} = \mathrm{VD_B V}^\top$.

On a alors avec la question 1 et comme $\mathrm{U}^\top = \mathrm{U}^{-1} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

$$\|\mathrm{A}-\mathrm{B}\|_{\mathrm{F}}^2 = \left\|\mathrm{U}^\top\left(\mathrm{UD_A U}^\top - \mathrm{VD_B V}^\top\right)\mathrm{V}\right\|_{\mathrm{F}}^2 = \left\|\mathrm{D_A U}^\top \mathrm{V} - \mathrm{U}^\top \mathrm{VD_B V}^\top\right\|$$

or $\mathrm{U}^\top\mathrm{V} = \mathrm{U}^{-1}\mathrm{V} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ car $(\mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \times)$ est un groupe

ainsi $\boxed{\text{il existe une matrice orthogonale } \mathrm{P} = (p_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \text{ telle que } \|\mathrm{A}-\mathrm{B}\|_{\mathrm{F}}^2 = \|\mathrm{D_A P} - \mathrm{PD_B}\|_{\mathrm{F}}^2}$

Q 3. Pour toute matrice $\mathrm{M} = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\|\mathrm{M}\|_{\mathrm{F}}^2 = \sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} m_{i,j}^2$ (vu en cours).

De plus, selon la question précédente, on a :

$$\mathrm{D_A P} - \mathrm{PD_B} = (\lambda_i(\mathrm{A})p_{i,j} - p_{i,j}\lambda_j(\mathrm{B}))_{1\leqslant i,j\leqslant n} = (p_{i,j}\left(\lambda_i(\mathrm{A}) - \lambda_j(\mathrm{B})\right))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$$

ainsi $\boxed{\|\mathrm{A}-\mathrm{B}\|_{\mathrm{F}}^2 = \sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} p_{i,j}^2\left(\lambda_i(\mathrm{A}) - \lambda_j(\mathrm{B})\right)^2}$

I.B -

Q 4. Soit $\mathrm{M} = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{B}_n(\mathbb{R})$.

On a $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ m_{i,j} \geqslant 0$ et $\forall i \in [\![1,n]\!],\ \sum\limits_{j=1}^n m_{i,j} = \sum\limits_{j=1}^n m_{j,i} = 1$

Ainsi $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ 0 \leqslant m_{i,j} \leqslant 1$. Par conséquent $\|\mathrm{M}\|_{\mathrm{F}} = \sqrt{\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} m_{ij}^2} \leqslant \sqrt{n^2} = n$

Ainsi $\mathcal{B}_n(\mathbb{R})$ est un bornée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (notion indépendante de la norme car $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie).

Pour k et $i \in [\![1,n]\!]$, les applications $\varphi_i : \mathrm{M} \mapsto \sum\limits_{j=1}^n m_{i,j}$, $\varphi_i' : \mathrm{M} \mapsto \sum\limits_{j=1}^n m_{j,i}$ et $\psi_{i,k} : \mathrm{M} \mapsto m_{i,k}$ sont continues car ce sont des formes linéaire en dimension finie au départ or

$$\mathcal{B}_n(\mathbb{R}) = \left(\bigcap_{1\leqslant i\leqslant n} \varphi_i^{-1}(\{1\})\right) \bigcap \left(\bigcap_{1\leqslant i\leqslant n} (\varphi_i')^{-1}(\{1\})\right) \bigcap \left(\bigcap_{1\leqslant i,k\leqslant n} \psi_{i,k}^{-1}(\mathbb{R}^+)\right)$$

De plus $\{1\}$ et $\mathbb{R}^+$ sont des fermés de $\mathbb{R}$ et l'image réciproque d'un fermé par une application continue est un fermé de l'ensemble d'arrivée. De plus une intersection de fermés est un fermé

d'où $\mathcal{B}_n(\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Ainsi $\mathcal{B}_n(\mathbb{R})$ est un fermé borné de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie alors $\mathcal{B}_n(\mathbb{R})$ est un compact.

L'application f est une forme linéaire en dimension finie au départ elle est donc continue.

Ainsi selon le **théorème des bornes atteintes**, $\boxed{f \text{ admet un minimum sur } \mathcal{B}_n(\mathbb{R})}$

Q 5. On a par linéarité $f\left(\mathrm{M}+x\mathrm{E}_{ii}+x\mathrm{E}_{jk}-x\mathrm{E}_{ik}-x\mathrm{E}_{ji}\right)-f(\mathrm{M})=x\left(f(\mathrm{E}_{ii})+f(\mathrm{E}_{jk})-f(\mathrm{E}_{ik})-f(\mathrm{E}_{ji})\right)$. Or

$$\begin{aligned} f(\mathrm{E}_{ii})-f(\mathrm{E}_{ik})+f(\mathrm{E}_{jk})-f(\mathrm{E}_{ji}) &= (\lambda_i(\mathrm{A})-\lambda_i(\mathrm{B}))^2-(\lambda_i(\mathrm{A})-\lambda_k(\mathrm{B}))^2+(\lambda_j(\mathrm{A})-\lambda_k(\mathrm{B}))^2-(\lambda_j(\mathrm{A})-\lambda_i(\mathrm{B}))^2 \\ &= (2\lambda_i(\mathrm{A})-\lambda_i(\mathrm{B})-\lambda_k(\mathrm{B}))(\lambda_k(\mathrm{B})-\lambda_i(\mathrm{B}))+(2\lambda_j(\mathrm{A})-\lambda_k(\mathrm{B})-\lambda_i(\mathrm{B}))(\lambda_i(\mathrm{B})-\lambda_k(\mathrm{B})) \\ &= (\lambda_k(\mathrm{B})-\lambda_i(\mathrm{B}))(2\lambda_i(\mathrm{A})-\lambda_i(\mathrm{B})-\lambda_k(\mathrm{B})-2\lambda_j(\mathrm{A})+\lambda_k(\mathrm{B})+\lambda_i(\mathrm{B})) \end{aligned}$$

donc $\boxed{f\left(\mathrm{M}+x\mathrm{E}_{ii}+x\mathrm{E}_{jk}-x\mathrm{E}_{ik}-x\mathrm{E}_{ji}\right)-f(\mathrm{M})=2x\left(\lambda_i(\mathrm{A})-\lambda_j(\mathrm{A})\right)\left(\lambda_k(\mathrm{B})-\lambda_i(\mathrm{B})\right)\leqslant 0}$

car $x\geqslant 0$, $\lambda_i(\mathrm{A})-\lambda_j(\mathrm{A})\geqslant 0$ et $\lambda_k(\mathrm{B})-\lambda_i(\mathrm{B})\leqslant 0$ car $j\geqslant i$ et $k\geqslant i$

Q 6. Par l'absurde si on avait $\forall k\in[\![1,n]\!],\ m_{k,k}=1$, on aurait $\forall i\neq j\in[\![1,n]\!],\ m_{i,j}=0$ vu la positivité et les sommes 1 selon les lignes (ou selon colonnes). D'où $\mathrm{M}=\mathrm{I}_n$ ce qui est absurde.

Ainsi $\{k\in[\![1,n]\!]\mid m_{k,k}\neq 1\}\neq\emptyset$

Ceci justifie l'existence de i minimum de la partie non vide de $\mathbb{N}$: $\{k\in[\![1,n]\!]\mid m_{k,k}\neq 1\}$

On a alors $\forall j\in[\![1,i-1]\!]$, $m_{j,j}=1$ (il se peut que $i-1=0$)

Comme $\forall j\in[\![1,n]\!]$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}m_{k,j}=\sum_{k=1}^{n}m_{j,k}=1$ et que $\forall k,j\in[\![1,n]\!]$, $m_{j,k}\geqslant 0$

On a alors $\forall j\in[\![1,i-1]\!]$, $\forall k\in[\![1,n]\!]\setminus\{j\}$, $m_{k,j}=m_{j,k}=0$

Par l'absurde si on avait $i=n$, alors on aurait $m_{n,n}=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}m_{k,n}=1$ et $m_{n,n}=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}m_{n,k}=1$

On aurait alors $\mathrm{M}=\mathrm{I}_n$ ce qui n'est pas

Ainsi $i<n$ et $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}m_{j,i}=\sum_{j=i}^{n}m_{j,i}=1$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}m_{i,k}=\sum_{k=i}^{n}m_{i,k}=1$

Comme $m_{i,i}\neq 1$ ceci nous fournit $j\in[\![i,n]\!]$ et $k\in[\![i,n]\!]$ tels que $m_{i,k}>0$ et $m_{j,i}>0$.

On pose $x=\min\left(m_{i,k},m_{j,i}\right)$ de sorte que la matrice $\mathrm{M}_1=\mathrm{M}+x\mathrm{E}_{ii}+x\mathrm{E}_{jk}-x\mathrm{E}_{ik}-x\mathrm{E}_{ji}$ est à coefficients positifs.

Cette matrice vérifie les conditions de sommes égales à 1 sur les lignes et les colonnes donc $\mathrm{M}_1=\left(m_{i,j}^{(1)}\right)\in\mathcal{B}_n(\mathbb{R})$.

De plus selon Q5, on a $f(\mathrm{M}_1)\leqslant f(\mathrm{M})$ et on remarque qu'un des coefficients (d'indice (i,k) ou (j,i)) de M_1 est « devenu »nul. En réitérant le procédé, on obtient ainsi une suite de matrices de $\mathcal{B}_n(\mathbb{R})$ telle que $f(\mathrm{M})\geqslant f(\mathrm{M}_1)\geqslant\cdots f(\mathrm{M}_p)$.

Comme le nombre de coefficients non nuls sur les rangées i décroît strictement, l'algorithme fini par s'arrêter sur une matrice $\mathrm{M}'\in\mathcal{B}_n(\mathbb{R})$ dont le coefficient en position (i,i) vaut 1 car les autres coefficients des rangées i seront nuls.

$\boxed{\text{Il existe bien une matrice } \mathrm{M}'=\left(m'_{\ell,k}\right)_{1\leqslant\ell,k\leqslant n}\in\mathcal{B}_n(\mathbb{R}) \text{ telle que } f(\mathrm{M}')\leqslant f(\mathrm{M}) \text{ et } m'_{j,j}=1 \text{ pour tout } j\in[\![1,i]\!]}$

Q 7. Soit $\mathrm{M}\in\mathcal{B}_n(\mathbb{R})$. On note $\mathrm{M}=\mathrm{M}^{(0)}$.

On construit par récurrence $\mathrm{M}^{(k+1)}=\left(\mathrm{M}^{(k)}\right)'$ si $\mathrm{M}^{(k)}=\left(m_{i,j}^{(k)}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}\neq\mathrm{I}_n$ comme ci-dessus.

On remarque que là encore l'algorithme termine car le nombre de coefficients diagonaux distincts de 1 est strictement décroissant car dans Q6, seul le coefficient diagonal en position (i,i) change.

Autrement dit la suite $\left(\left|\left\{j\in[\![1,n]\!]\;\middle|\;m_{j,j}^{(k)}\neq 1\right\}\right|\right)_{k\geqslant 0}$ est une suite d'entiers naturels strictement décroissante, elle s'annule donc. Ainsi il existe $p\in\mathbb{N}$ tel que $\mathrm{M}^{(p)}=\mathrm{I}_n$.

De plus la suite finie $\left(f\left(\mathrm{M}^{(k)}\right)\right)_{k\in[\![0,p]\!]}$ est décroissante toujours selon Q6

ainsi $f(\mathrm{I}_n)=f\left(\mathrm{M}^{(p)}\right)\leqslant f\left(\mathrm{M}^{(0)}\right)=f(\mathrm{M})$ de plus on a clairement $\mathrm{I}_n\in\mathcal{B}_n(\mathbb{R})$

On en déduit que $\boxed{\min\{f(\mathrm{M})\mid\mathrm{M}\in\mathcal{B}_n(\mathrm{R})\}=f(\mathrm{I}_n)}$

I.C -

Q 8. On note la matrice $\mathrm{Q}=\left(p_{i,j}^2\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ comme $\mathrm{P}\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, on a $\mathrm{Q}\in\mathcal{B}_n(\mathbb{R})$.

De plus, on a $\|\mathrm{A}-\mathrm{B}\|_{\mathrm{F}}^2=f(\mathrm{Q})$ selon Q3 or $f(\mathrm{Q})\geqslant f(\mathrm{I}_n)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\lambda_i(\mathrm{A})-\lambda_i(\mathrm{B})\right)^2$ selon Q7

On en déduit que $\boxed{\forall(\mathrm{A},\mathrm{B})\in\mathrm{S}_n(\mathbb{R})^2,\quad \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\lambda_i(\mathrm{A})-\lambda_i(\mathrm{B})\right)^2\leqslant\|\mathrm{A}-\mathrm{B}\|_{\mathrm{F}}^2}$

Séries et caractères

1. Avec **C.** , $\chi(1) = \chi(1 \times 1) = \chi(1)^2$; donc $\chi(1)$ vaut 0 ou 1.

   Comme $\forall k \in \mathbb{Z}, \chi(k) = \chi(1 \times k) = \chi(1).\chi(k)$ et que χ n'est pas identiquement nulle, $\chi(1) \neq 0$.

   Conclusion: $\boxed{\chi(1) = 1}$.

2. Avec **B.** , $\chi(2k) = 0$ car $2k$ n'est pas premier avec 2.

   Comme $\chi(1) = 1$ et que χ est 2-périodique, $\chi(2k+1) = 1$

   Inversement, cette application vérifie les 4 axiomes.

   Conclusion: $\boxed{\forall k \in \mathbb{Z}, \chi(k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ est pair} \\ 1 & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}}$

3. $\chi(3) = \chi(-1)$. De plus, $\chi(-1)^2 = \chi((-1) \times (-1)) = \chi(1) = 1$.

   Conclusion: $\boxed{\chi(3) = \chi(-1) \in \{1, -1\}}$.

4. Avec les propriétés de χ et le 1. , $\forall k \in \mathbb{Z}, \chi(k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ est pair} \\ 1 & \text{si } k \equiv 1\ [4] \\ -1 & \text{si } k \equiv 3\ [4] \end{cases}$.

   On en déduit que $\chi(2k+1) = (-1)^k$.

   Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\chi(k)}{k} = \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \frac{\chi(2k+1)}{2k+1} = \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \frac{(-1)^k}{2k+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ d'après les rappels et la composée des limites (*Attention* ($S_{\lfloor (n-1)/2 \rfloor}$) *n'est pas une suite extraite de* (S_n)).

   Conclusion: $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\chi(k)}{k} = \frac{\pi}{4}}$.

5. On va "transférer" le problème dans le groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^* = \{\overline{k}, k \in P\}$:

   Comme $\overline{a}$ est inversible dans $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, l'application $x \longmapsto \overline{a}x$ est une bijection de $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$. Donc $\overline{\prod_{k \in P} ak} = \prod_{x \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*} \overline{a}x = \prod_{x \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*} x$. Or $\overline{\prod_{k \in P} ak} = \overline{a}^{\varphi(N)} \prod_{x \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*} x$.

   Comme $\prod_{x \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*} x$ est inversible, de l'égalité $\prod_{x \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*} x = \overline{a}^{\varphi(N)} \prod_{x \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*} x$, on tire $\overline{a}^{\varphi(N)} = \overline{1}$.

   Conclusion: $\boxed{N \text{ divise } a^{\varphi(N)} - 1}$.

6. D'après la question précédente et le **D.**, $\chi(a^{\varphi(n)}) = \chi(1 + iN) = \chi(1) = 1$ Par périodicité, $\chi(a^{\varphi(N)}) = \chi(1)$; avec le **C.**, $\chi(a^{\varphi(N)}) = \chi(a)^{\varphi(N)}$. Comme $\chi(a)$ est un réel, $\chi(a) = \pm 1$.

   Conclusion: $\boxed{|\chi(a)| = 1}$.

7. Soient $1 \leqslant k < \ell \leqslant N-1$ tels que $r_k = r_\ell$, donc $N \Big| a(k-\ell)$, comme $a \wedge N$, par Gauss $N \Big| k - \ell$, d'où $\exists i \in \mathbb{N}$ tel que $k - \ell = iN$ et comme $0 < \ell - k < N$, on en déduit que $k = \ell$.

   Conclusion: $\boxed{\text{Les restes } r_k \text{ sont deux à deux disjoints}}$.

8. Par périodicité, $\sum_{k=1}^{N-1} \chi(ak) = \sum_{k=1}^{N-1} \chi(r_k)$.

   Avec le **7.**, l'application $k \longmapsto r_k$ est une injection de l'ensemble fini $\{1, \dots, N-1\}$ dans lui-même, donc une bijection.

   On en déduit donc que $\boxed{\sum_{k=1}^{N-1} \chi(r_k) = \sum_{k=1}^{N-1} \chi(k)}$.

9. Pour $n = 0$: $S = \sum_{k=0}^{N-1} \chi(k) = \sum_{k=1}^{N-1} \chi(k) = \sum_{k=1}^{N-1} \chi(ak) = \chi(a) \sum_{k=1}^{N-1} \chi(k) = \chi(a) S$.

   En choisissant a tel que $\chi(a) \neq 1$, ce qui est possible d'après l'énoncé :

   $\sum_{k=1}^{N-1} \chi(k) = 0$ et $\sum_{k=0}^{N-1} \chi(k) = 0$ également car $\chi(0) = 0$.

   Montrons la relation par récurrence sur n :

   - C'est vrai pour $n = 0$,
   - Si c'est vrai pour n,
     $$\sum_{k=n+1}^{n+1+N-1} \chi(k) = \sum_{k=n}^{n+N-1} \chi(k) - \chi(n) + \chi(n+1+N-1) = 0 - \chi(n) + \chi(n+N) = 0.$$

   Conclusion: $\boxed{\sum_{k=n}^{n+N-1} \chi(k) = 0}$.

10. L'idée, c'est que chaque tranche de N termes consécutifs donne une somme égale à 0.

    On considère l'entier q tel que $qN \leqslant m < (q+1)N$.

    $$\sum_{k=1}^{m} \chi(k) = \sum_{k=0}^{m} \chi(k) = \sum_{k=0}^{qN-1} \chi(k) + \sum_{k=qN}^{m} \chi(k) = \sum_{i=0}^{q-1} \sum_{k=iN}^{iN+N-1} \chi(k) + \sum_{k=qN}^{m} \chi(k)$$
    $$= \sum_{k=qN}^{m} \chi(k) = \sum_{k=0}^{m-qN} \chi(k) = \sum_{k=1}^{m-qN} \chi(k).$$

    Comme avec le **6.** et $\chi(0) = 0$, on a donc $\chi(k) \in \{-1, 0, 1\}$. Comme $m - qN \leqslant N-1$, et qu'entre 1 et $N-1$ il y a exactement $\varphi(N)$ valeurs de k telles que $\chi(k) \neq 0$,

    $$\left| \sum_{k=1}^{m} \chi(k) \right| = \left| \sum_{k=1}^{m-qN} \chi(k) \right| \leqslant \sum_{k=1}^{m-qN} |\chi(k)| \leqslant \varphi(N).$$

    Conclusion: $\boxed{\left| \sum_{k=1}^{m} \chi(k) \right| \leqslant \varphi(N)}$.

11. On pose $T_n = \sum_{k=0}^{n} \chi(k) = \sum_{k=1}^{n} \chi(k)$ et on utilise la transformation d'Abel (c'est le lemme rappelé en préambule) avec $u_k = \frac{1}{k}$; pour $n \geqslant 2$, on a :

    $$\sum_{k=2}^{n} \frac{\chi(k)}{k} = -\frac{T_1}{2} + \sum_{k=2}^{n-1} T_k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) + \frac{T_n}{n}.$$

    Comme (T_n) est une suite bornée (par $\varphi(N)$), $\frac{T_n}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

Comme $\left|T_k\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\right| \leqslant \varphi(N)\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$, que $\varphi(N)$ est une constante,
on a $T_k\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) = O\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) = O(\frac{1}{k^2})$, car $\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) \sim \frac{1}{k^2} \geqslant 0$.
Comme la série $\sum\left(\frac{1}{k^2}\right)$ converge, par T.C. , la série $\sum T_k\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$ converge absolument, donc converge.

Conclusion: $\boxed{\text{La suite } \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\chi(k)}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est convergente}}$.

12. Montrons que si n et m sont premiers entre eux, alors

$$d\,\Big|\,mn \textbf{ si et seulement si } d = d_1d_2 \text{ avec } d_1\,\Big|\,m \text{ et } d_2\,\Big|\,n.$$

Démonstration. Le sens indirect est évident.

Pour le sens direct, on a $m = p_1^{s_1}\cdots p_k^{s_k}$ et $n = q_1^{t_1}\cdots q_\ell^{t_\ell}$ avec $p_1,\ldots,p_k,q_1\ldots q_\ell$ nombres premiers deux à deux distincts , $s_i \geqslant 1$ et $t_j \geqslant 1$.

Si $d\,\Big|\,mn$ alors $d = p_1^{u_1}\cdots p_k^{u_k}q_1^{v_1}\cdots q_\ell^{v_\ell}$ avec $u_i \leqslant s_i$ et $v_j \leqslant t_j$.

Posons $d_1 = p_1^{u_1}\cdots p_k^{u_k}$ et $d_2 = q_1^{v_1}\cdots q_\ell^{v_\ell}$, on a bien $d = d_1d_2$. □

On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} f_{nm} &= \sum_{d\,|\,nm}\chi(d) = \sum_{d_1\,|\,n \text{ et } d_2\,|\,m}\chi(d_1d_2) = \sum_{d_1\,|\,n \text{ et } d_2\,|\,m}\chi(d_1)\chi(d_2) = \sum_{d_1\,|\,n}\sum_{d_2\,|\,m}\chi(d_1)\chi(d_2) \\ &= \sum_{d_1\,|\,n}\chi(d_1)\sum_{d_2\,|\,m}\chi(d_2) = f_nf_m. \end{aligned}$$

Conclusion: $\boxed{f_{nm} = f_nf_m}$.

13. Comme p est premier, les diviseurs de p^α sont les p^β avec $0 \leq \beta \leq \alpha$.

Comme $\chi(p^\beta) = \chi(p)^\beta$ et que $\chi(p) \in \{-1,0,1\}$ d'après **B.** et le **6.**), on a donc :

$$f_{p^\alpha} = \sum_{\beta=0}^{\alpha}\chi(p)^\beta = \begin{cases} \alpha+1 & \text{si } \chi(p)=1 \\ \dfrac{1-\chi(p)^{\alpha+1}}{1-\chi(p)} & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} \alpha+1 & \text{si } \chi(p)=1 \\ 1 & \text{si } \chi(p)=0 \\ 0 & \text{si } \chi(p)=-1 \text{ et } \alpha \text{ impair} \\ 1 & \text{si } \chi(p)=-1 \text{ et } \alpha \text{ pair} \end{cases}$$

14. D'après la fin du **13.** on a $f_{p^\alpha} \geqslant 0$ pour tout nombre premier et tout $\alpha \in \mathbb{N}^*$.

Si $n \geqslant 2$: on utilise la décomposition de n : $n = \prod_{i=1}^{q}p_i^{\alpha_i}$, où les p_i sont des nombres premiers distincts et les α_i des entiers au moins égaux à 1. Par multiplicativité de f, comme les $p_i^{\alpha_i}$ sont premiers entre eux deux à deux, $f_n = \prod_{i=1}^{q}f_{p_i^{\alpha_i}}$. Donc $f_n \geqslant 0$.

Enfin comme n possède au plus n diviseurs dans $\mathbb{N}$ et que $\chi \leq 1$, on a : $f_n \leqslant n$.

Conclusion: $\boxed{0 \leqslant f_n \leqslant n}$.

15. Pour $n \geqslant 2$, on reprend les notations de la question précédente. Alors $f_{n^2} = \prod_{i=1}^{q} f_{p_i^{2\alpha_i}}$. Or, à la question **13.**, avec α pair, quelle que soit la valeur de $\chi(p) \in \{-1, 0, 1\}$, $f_{p^\alpha} > 0$. Donc $f_{n^2} > 0$. Comme f_{n^2} est dans $\mathbb{Z}$, **<u>conclusion</u>**: $\boxed{f_{n^2} \geqslant 1}$.

16. Si $|x| < 1$, alors la suite $(f_n x^n)$ converge vers 0 (puisque $|f_n x^n| \leq n\,|x|^n$). Donc le rayon de convergence de la série entière vaut au moins 1.

    Si $|x| > 1$, alors la suite $(f_{n^2} x^{n^2})$ tend vers l'infini (puisque $\left|f_{n^2} x^{n^2}\right| \geqslant |x|^{n^2}$). Donc le rayon de convergence de la série entière vaut au plus 1.

    <u>Conclusion</u>: $\boxed{\text{le rayon de convergence vaut 1}}$.

17. Comme $x \geqslant 0$ et $f_n \geqslant 0$, on a : $f(x) \geqslant \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_{n^2} x^{n^2} \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} x^{n^2}$.

    On définit la fonction g par $g(t) = x^{t^2} = \mathrm{e}^{t^2 \ln x}$; g est continue sur $[1, +\infty[$, décroissante, intégrable ($\ln x < 0$).

    Pour tout $n \geqslant 1$, on a : $g(n) = \displaystyle\int_n^{n+1} g(n)\ \mathrm{d}t \geqslant \int_n^{n+1} g(t)\ \mathrm{d}t$.

    Donc $f(x) \geqslant \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} g(n) \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} g(t)\ \mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} g(t)\ \mathrm{d}t$.

    Le changement de variable affine $u = t\sqrt{-\ln x}$ s'écrit :

    $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(t)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{-\ln x}} \int_{\sqrt{-\ln x}}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\ \mathrm{d}u \geqslant \frac{1}{\sqrt{-\ln x}} \int_{\sqrt{\ln 2}}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\ \mathrm{d}u$ (car $-\ln x \leq \ln 2$).

    <u>Conclusion</u>: $\boxed{f(x) \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{-\ln x}} \displaystyle\int_{\sqrt{\ln 2}}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\ \mathrm{d}u}$.