Mines 2003 Math 2 MP

Première partie

1. Soit u l'endomorphisme canoniquement associé à M. u est diagonalisable (T.S, car M est symétrique !) dans une base $\mathcal{B}' = (u_1, \dots, u_n)$ OTN de vect. propres de $\mathbb{R}^n$, on peut supposer que $\forall i \in [\![1, n]\!]$ $u(u_i) = \lambda_i u_i$ avec $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$. Si $x \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$

$$(Mx|x) = \left(\begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 \\ \vdots \\ \lambda_n x_n \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_n x_i^2 = \lambda_n \|x\|^2$$

et $(Mx|x) \geq \lambda_1 \|x\|^2$. d. $\boxed{p = \min sp(M) \text{ et } q = \max sp(M) \text{ conviennent}}$

2. * Si $\forall i \in [\![1, n]\!]$ $\lambda_i > 0$ alors $0 \notin sp(M)$ donc M inversible et $(Mx|x) \geq p\|x\|^2 \geq 0$, $\forall x$ donc

<u>M inversible et positive</u>

* Réciproquement $\forall x \in \mathbb{R}^n$ $(Mx|x) \geq 0$, pour $x = u_i$ de la base $\mathcal{B}'$ du 1, on a $(Mu_i|u_i) = \lambda_i \|u_i\|^2 \geq 0$ donc $\lambda_i \geq 0$ d'où $sp(M) \subset \mathbb{R}_+$ et comme M est inversible, $0 \notin sp(M)$ donc <u>$sp(M) \subset \mathbb{R}_+^*$</u>

3. Si $\|x\| = 1$ on a dans la base $\mathcal{B}'$: ②

$$x\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} \quad \text{et} \quad \|\Pi x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 x_i^2 \leq \lambda_n^2 \|x\|^2$$

d'où $\|\Pi x\| \leq |\lambda_n| \times 1$

pour $x = u_n$, on a $\|\Pi u_n\| = |\lambda_n|$ d'où $\boxed{N(\Pi) = |\lambda_n|}$

4. $x^{k+1} = x^k + \alpha(b - Ax^k) \Leftrightarrow x^{k+1} = (I_n - \alpha A)x^k + \alpha b$

Posons $\boxed{B = I_n - \alpha A}$, si on note $0 < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ les valeurs propres de A, $1 - \alpha\lambda_1, \dots, 1 - \alpha\lambda_n$ sont les valeurs propres de B car λ vp de $A \Rightarrow P(\lambda) = 1 - \alpha\lambda$ vp de $P(A) = B$ et réciproquement ; λ vp de $B \Rightarrow Q(\lambda) = \frac{1}{\alpha} - \frac{\lambda}{\alpha}$ est vp de $Q(B) = A$.

On $0 < \alpha < \frac{2}{\lambda_n} \leq \frac{2}{\lambda_{n-1}} \leq \dots \leq \frac{2}{\lambda_1}$

d'où $0 < \alpha < \frac{2}{\lambda_i} \quad \forall i \in [\![1, n]\!]$

donc $0 < \alpha\lambda_i < 2$

d'où $-1 < 1 - \alpha\lambda_i < 1$ csq $\underline{Sp(B) \subset]-1, 1[}$

D'autre part la suite (x^k) vérifie $x^{k+1} = Bx^k + \alpha b$: "suite arithmético-géométrique"

Soit $l \in \mathbb{R}^n$ tel que $l = Bl + \alpha b$. l existe (et est unique) car $l = Bl + \alpha b \iff -\alpha A l + \alpha b = 0 \iff Al = b$

$$\iff l = A^{-1} b$$

On a donc $\begin{cases} x^{k+1} = Bx^k + \alpha b \\ l = Bl + \alpha b \end{cases}$

d'où $x^{k+1} - l = B(x^k - l)$ et par une récurrence immédiate, $\forall k \in \mathbb{N} : x^k - l = B^k (x^0 - l)$

d'où $\|x^k - l\| \leq N(B^k) \|x^0 - l\|$ et d'après le 3.

$N(B^k) = \sup\limits_{\lambda \in sp(B^k)} |\lambda| = |\alpha|^k$ où $|\alpha| = \max\limits_{\mu \in sp(B) \subset]-1,1[} (|\mu|) \in [0,1[$

Comme $0 < |\alpha| < 1$, on a $\lim\limits_{k \to \infty} N(B^k) = 0$ et

$\|x^k - l\| \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$ (Th. d'encadrement)

cl $\boxed{(x^k) \text{ cvg vers } l = A^{-1} b \text{ donc } Al = b}$

5. $f(x+u) - f(x) = \frac{1}{2}(Ax + Au \mid x+u) - (b \mid x+u)$

$$-\frac{1}{2}(Ax \mid x) + (b \mid x)$$

$= \frac{1}{2}(Ax \mid u) + \frac{1}{2}(Au \mid x) + \frac{1}{2}(Au \mid u) - (b \mid u)$

Or $(Au \mid x) = (\varphi(u) \mid x) = (u \mid \varphi^*(x))$ avec $A = M_{\mathcal{B}_0}(\varphi)$

Comme A symétrique $\varphi^* = \varphi$ $\quad$ ↑ base cano. OTN

4

d'où $(Au|x) = (Ax|u)$

et $\boxed{f(x+u) - f(x) = (Ax|u) + \frac{1}{2}(Au|u) - (b|u)}$

6. $f(x)$ est une expression polynomiale (de degré au plus 2 par rapport à chaque coord. x_i) donc f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^n$ et $\boxed{f \text{ admet des dérivées partielles}}$

7. Grâce au 5°) avec $u = te_k$, $t \neq 0$ on a :

$$\frac{f(x+te_k) - f(x)}{t} = (Ax|e_k) + \frac{1}{2}t(Ae_k|e_k) - (b|e_k)$$

$$\xrightarrow[t \neq 0]{t \to 0} (Ax|e_k) - (b|e_k) = (Ax-b|e_k)$$

Or cette limite est par définition : $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$. Grâce à la formule $y = \sum_{k=1}^{n}(y|e_k)e_k$ on a : $\boxed{g(x) = Ax - b}$

8. $I(x,u) = (\cancel{Ax}|u) + \frac{1}{2}(Au|u) \cancel{-(b|u)} - (\cancel{Ax-b}|u)$

$= \frac{1}{2}(Au|u)$ d'après le 5°) et le 7°)

Grâce au 1. Soit $r = \frac{1}{2}\min_{\lambda \in sp(A)}(\lambda)$ et $s = \frac{1}{2}\max_{\lambda \in sp(A)} \lambda$

On a $\boxed{r\|u\|^2 \leqslant I(x,u) \leqslant s\|u\|^2}$

(5)

9. f est différentiable et C^1 sur $\mathbb{R}^n$. Si f admet en z un minimum alors $g(z)=0$ (cond. nécessaire des points critiques)

d'où avec 7) : $\underline{Az=b}$

Réciproquement si $Az=b$ alors $\forall u\in\mathbb{R}^n$:

$$f(z+u)-f(z)\underset{\uparrow\, g(z)=0}{=}I(z,u)\geqslant r\|u\|^2\geqslant 0$$

donc $\forall u\in\mathbb{R}^n$: $f(z)\leq f(z+u)$ donc z minimum (global) de f

$\underline{cl}$. $\boxed{z \text{ minimum de } f \iff Az=b}$

10. On a $\underline{\underline{X}}=f(x-\alpha g(x))-f(x)=I(x,-\alpha g(x))+(g(x)|-\alpha g(x))$

$$=I(x,-\alpha g(x))-\alpha\|g(x)\|^2$$

Grâce à l'encadrement du 8) on a donc :

$$r\alpha^2\|g(x)\|^2\leqslant I(x,-\alpha g(x))\leq s\|g(x)\|^2$$

d'où $(r\alpha-1)\alpha\|g(x)\|^2\leqslant f(x-\alpha g(x))-f(x)\leq(s\alpha-1)\alpha\|g(x)\|^2$

Or $s=\frac{\lambda_n}{2}$ d'où $s\alpha=\frac{\lambda_n}{2}\alpha<1$ donc $s\alpha-1<0$

$\underline{cl}$ $\boxed{f(x-\alpha g(x))-f(x)<0}$

11. L'idée est de remplacer x par $x-\alpha g(x)$ puisque $f(x-\alpha g(x))<f(x)$ donc $x-\alpha g(x)$ se rapproche de z

d'où la suite $y^0 \in \mathbb{R}^n$ quelconque et pour tout $k \in \mathbb{N}$ $y^{k+1} = y^k - \alpha g(y^k)$

Rem. On peut voir facilement que c'est la suite définie au 4°)

Seconde partie

12. (La question revient à montrer que $\lim\limits_{\substack{\|x\| \to +\infty \\ x \in F}} f(x) = +\infty$)

Rappelons f : $\forall x \in F \quad f(x) \geqslant \frac{1}{2}\lambda_1 \|x\|^2 - (b|x)$
c'est le 1°)

d'après Cauchy-Schwarz : $(b|x) \leqslant \|b\|\,\|x\|$ donc :

$\forall x \in F$; $f(x) \geqslant \frac{1}{2}\lambda_1 \|x\|^2 - \|b\|\,\|x\| = \varphi(t)$ avec

$\varphi(t) = \frac{\lambda_1}{2} t^2 - \|b\| t \underset{+\infty}{\sim} \frac{\lambda_1}{2} t^2 \xrightarrow[t \to \infty]{} +\infty$ d'où :

$\forall c \in \mathbb{R}\ \exists \rho \geqslant 0$ tel que $\forall t \geqslant \rho$: $\varphi(t) \geqslant c$ et

donc $\boxed{\forall x \in F,\ \|x\| (= t) \geqslant \rho \Rightarrow f(x) \geqslant \varphi(t) \geqslant c}$

13. Il suffit de prendre $c = f(y) \in \mathbb{R}$ et $r = \rho$ du 12°)

14. f est continue et $B_F(0,r) = \{x \in E \mid \|x\| \leqslant r\}$ est compact, F est un sev de $\mathbb{R}^n$ donc fermé (c'est le noyau de B qui est linéaire donc continue)

d'où $K = B_F(0, r) \cap F$ est fermé (intersection de fermé) et borné donc K compact non vide ($y \in K$) et où f est bornée et atteint ses bornes sur K ; $\exists x_0 \in K$ tel que $\forall x \in K : f(x) \geq f(x_0)$

Posons $\bar{x} = x_0$ si $f(x_0) \leq f(y)$ et $\bar{x} = y$ sinon
(le y du 13')

On a donc $\underline{\forall x \in F}$; si $\|x\| \leq r$ alors $x \in K$ donc $f(x) \geq f(x_0) \geq f(\bar{x})$ et si $\|x\| > r$ — $f(x) \geq f(y) \geq f(\bar{x})$

$\underline{d}$ $\boxed{\forall x \in F \quad f(x) \geq f(\bar{x})}$

15, Si $\bar{x}$ et $\bar{y}$ vérifient le 14. alors posons $\bar{z} = \frac{\bar{x}+\bar{y}}{2}$ $(\lambda = \frac{1}{2})$

On a $\bar{z} \in F$ (sev) et si $\bar{x} \neq \bar{y}$ alors $f(\bar{z}) < \underbrace{\frac{f(\bar{x}) + f(\bar{y})}{2}}_{= f(\bar{x}) = \min_F f}$

absurde d'où $\boxed{\text{l'unicité de } \bar{x}}$

16. On a avec le 5. $\forall y \in F \ \forall u \in F$;

$$f(y+u) - f(y) = (Ay - b \mid u) + \frac{1}{2}(Au \mid u)$$

si $\begin{cases} Ay - b \in F^\perp \\ y \in F \end{cases}$ alors $\forall x \in F$ en posant $u = x - y \in F$

on a $f(x) - f(y) = \frac{1}{2}(Au \mid u) \geq \frac{1}{2}\lambda_1 \|u\|^2 = \frac{\|x-y\|^2}{2}\lambda_1 \geq 0$

d'où f minimum sur F en y.

<u>Réciproquement</u> : si f minimum sur F en y, on a

donc $\forall u \in F$ $f(y+u) - f(y) = (Ay - b|u) + \frac{1}{2}(Au|u) \geqslant 0$

d'où si on fixe u non nul dans F alors on doit

avoir $\forall t \in \mathbb{R}$: $(Ay - b|tu) + \frac{1}{2}(Atu|tu) \geq 0$

soit ——— : $\underbrace{ta + bt^2 \geq 0}_{\text{poly. du 2nd degré}}$ avec $\begin{cases} a = (Ay - b|u) \\ b = \frac{1}{2}(Au|u) \end{cases}$

il faut donc que $\Delta = a^2 - 4 \times b \times 0 = a^2 \leqslant 0$

d'où $a = 0$ soit $(Ay - b|u)$ et ceci $\forall u \in F$: $Ay - b \in F^\perp$

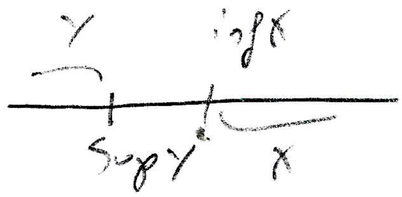
cl $\boxed{f \text{ minimum sur } F \text{ en } y \text{ ssi } Ay - b \in F^\perp}$

17. D'après le 16, avec $y = \bar{x}$: $(A\bar{x} - b|\bar{x}) = 0$

donc $(A\bar{x}|\bar{x}) = (b|\bar{x})$ et $f(\bar{x}) = \frac{1}{2}(A\bar{x}|\bar{x}) - (A\bar{x}|\bar{x}) = -\frac{1}{2}(A\bar{x}|\bar{x})$

cl $\boxed{f(\bar{x}) = -\frac{1}{2}(A\bar{x}|\bar{x}) = \frac{-1}{2}(b|\bar{x})}$

18. On doit montrer $\sup\limits_{y \in \mathbb{R}^n} Y \leq \inf\limits_{x \in \mathbb{R}^n} X$



ce qui revient à montrer $\forall y \in Y \ \forall x \in X \ y \leq x$

⑨

$\forall (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \quad \inf_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, y_0) \leq L(x_0, y_0) \leq \sup_{y \in \mathbb{R}^n} L(x_0, y)$

d'où $\sup_{y \in \mathbb{R}^n} L(x_0, y)$ majore $\{ \inf_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, y_0),\ y_0 \in \mathbb{R}^n \}$ d'où

$$\underline{\sup_{y_0 \in \mathbb{R}^n} \left(\inf_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, y_0) \right)} \leq \sup_{y \in \mathbb{R}^n} L(x_0, y) \quad \leftarrow \text{ceci } \forall x_0 \in \mathbb{R}^n$$

ceci ↗ minore donc $\{ \sup_{y \in \mathbb{R}^n} L(x_0, y),\ x_0 \in \mathbb{R}^n \}$

d'où $$\boxed{\sup_{y_0 \in \mathbb{R}^n} \left(\inf_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, y_0) \right) \leq \inf_{x_0 \in \mathbb{R}^n} \left(\sup_{y \in \mathbb{R}^n} L(x_0, y) \right)}$$

19. $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2 \quad L(x^*, y) \leq L(x^*, y^*)$ donc

$L(x^*, y^*)$ majore $\{ L(x^*, y),\ y \in \mathbb{R}^n \}$ donc

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^n} L(x^*, y) \leq L(x^*, y^*)$$

Or $\inf_{x \in \mathbb{R}^n} \left(\sup_{y \in \mathbb{R}^n} L(x, y) \right) \leq \sup_{y \in \mathbb{R}^n} L(x^*, y)$ ($\inf X$ minore X)

Donc $\underline{\hspace{6cm}} \leq L(x^*, y^*)$

de même $L(x^*, y^*) \leq L(x, y^*)$ donne :

$$L(x^*, y^*) \leq \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \left(\inf_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, y) \right)$$

on a donc $\inf_x(\sup_y L) \leq L(x^*, y^*) \leq \sup_y(\inf_x L) \leq \inf_x(\sup_y L)$

c'est le 1°)

d $\boxed{\inf_x(\sup_y L) = \sup_y(\inf_x L) = L(x^*, y^*)}$

2°) * si $L(x_1, y) \leq L(x_1, y_1)$ alors $(y|Bx_1) \leq (y_1|Bx_1)$

donc $\forall y \in \mathbb{R}^n$ $(y-y_1|Bx_1) \leq 0$

pour $y = y_1 + Bx_1$ on obtient $(Bx_1|Bx_1) = \|Bx_1\|^2 \leq 0$

d'où $Bx_1 = 0$

réciproquement : si $Bx_1 = 0$ alors $L(x_1, y) = L(x_1, y_1) = f(x_1)$

donc $\leq$!

d'où la première équivalence

* $L(x,y) = \frac{1}{2}(Ax|x) - (b|x) + (y|Bx)$

on a comme au 5°), avec l'adjoint, $(y|Bx) = (B^Ty|x)$

d'où $L(x,y) = \frac{1}{2}(Ax|x) - (b - B^Ty|x) = f_1(x)$ avec

la fonction f_1 définie comme dans tout le problème

avec $b - B^Ty$ à la place de b.

d'où $\forall x \in \mathbb{R}^n$ $L(x_1, y_1) \leq L(x, y_1) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n$ $f_1(x_1) \leq f_1(x)$

$\Leftrightarrow$ x_1 minimum global de f_1

$\Leftrightarrow$ $Ax_1 = b - B^T y_1 \Leftrightarrow Ax_1 + B^T y_1 = b$

avec le g°)

cl $\boxed{\text{On a les 2 équivalences}}$

21. Si (x_1, y_1) est un point selle alors : $x_1 \in F = \ker B$

(*) $\forall x \in F \quad L(x_1, y_1) \leq L(x, y_1)$. Comme $Bx_1 = 0$

on a donc $\forall x \in F$: $f(x_1) \leq f(x)$ et x_1 minimum de f sur F et avec le 20 l'inégalité (*) donne :

$Ax_1 + B^T y_1 = b$

réciproquement comme $x_1 \in F$, $Bx_1 = 0$ et (20°)) :

$\forall y \in \mathbb{R}^n \quad L(x_1, y) \leq L(x_1, y_1)$

et tj) de 20°) : $\forall x \in \mathbb{R}^n \quad L(x_1, y_1) \leq L(x, y_1)$

csq (x_1, y_1) pt selle

cl $\boxed{\text{On a l'équivalence}}$

22. x^0 rend minimum $x \mapsto L(x, y^0)$ ssi

$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad L(x^0, y^0) \leq L(x, y^0)$ ce qui est équivalent

avec le 20°) à $Ax^0 + B^T y^0 = b$

Comme A est inversible un tel vecteur x^0 existe

et $x_0 = A^{-1}(b - B^T y^0)$

Supposons construit $y^0, x^0, y^1, x^1, \dots, y^m, x^m$. On définit $y^{m+1} = y^m + \rho_m B x^m$ puis x^{m+1} exactement comme x^0 : $x^m = A^{-1}(b - B^T y^m)$, D'où $\boxed{\text{l'existence des 2 suites}}$

Si (x^*, y^*) est un point selle d'après le 21°) on a :

$$A x^* + B^T y^* = b \quad (1)$$

On vient de voir que x^m est défini par :

$$A x^m + B^T y^m = b \ (2)$$

On retranche (2) - (1) : $\boxed{A(x^m - x^*) + B^T(y^m - y^*) = 0}$

D'après la première équivalence on a $B x^* = 0$

d'où $\boxed{y^{m+1} - y^* = y^m - y^* + \rho_m B(x^m - x^*)}$

23) Rappel $\|X + Y\|^2 = \|X\|^2 + 2(X|Y) + \|Y\|^2$

Avec $X = y^m - y^*$ et $Y = \rho_m B(x^m - x^*)$

$$(X|Y) = (y^m - y^* | \rho_m B(x^m - x^*)) = \rho_m (B^T(y^m - y^*) | x^m - x^*)$$

l'adjoint

or $B^T(y^m - y^*) = -A(x^m - x^*)$ d'après 22 (1re égalité)

d'où l'égalité demandé

24. classique $A = PDP^T$ avec $P \in O(n)$ et $D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$ (c'est le théorème spectral). Comme A positive et inversible d'après le 2°) (ou le cours !) $\forall i \in [\![1, n]\!]$ $d_i > 0$. Soit $\Delta = \begin{pmatrix} \sqrt{d_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{d_n} \end{pmatrix}$ et

$B = P\Delta P^T$, On a $B^2 = P\Delta^2 P^T = PDP^T = A$,

$B^T = (P^T)^T \Delta^T P^T = P\Delta P^T = B$ donc B symétrique et

$Sp(B) = \{\sqrt{d_1}, \dots, \sqrt{d_n}\} \subset \mathbb{R}_+^*$ donc B positive inversible

(toujours avec le 2°)) d $\boxed{A^{1/2} = B \quad \text{convient}}$

25. * $C^T = (A^{-1/2})^T B^T B (A^{-1/2})^T$. Or l'inverse d'1 matrice symétrique est symétrique (car $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$) donc

$C^T = A^{-1/2} B^T B A^{-1/2} = C$ et C symétrique

* $C = (BA^{-1/2})^T BA^{-1/2}$ donc $(Cx|x) = \|BA^{-1/2}x\|^2 \geqslant 0$

d $\boxed{C \text{ symétrique et positive}}$

$\forall u \in \mathbb{R}^n \quad \|Bu\|^2 = \|BA^{-1/2}(A^{1/2}u)\|^2 = (CA^{1/2}u \mid A^{1/2}u)$

(Voir juste au dessus)

D'après le 1) $\exists q \in \mathbb{R} \mid \forall y \in \mathbb{R}^n \ (Cy|y) \leq q\|y\|^2$.

Donc $\|Bu\|^2 \leq q\|A^{1/2}u\|^2 = q\,(A^{1/2}u \mid A^{1/2}u)$

$\leq q\,((A^{1/2})^T A^{1/2}u \mid u)$ (tjs l'adjoint)

$\leq q\,(Au|u)$ car $A^{1/2}$ symétrique et $(A^{1/2})^2 = A$

$\underline{d}$ $\boxed{\|Bu\|^2 \leq q(Au|u), \forall u \in \mathbb{R}^n}$

26. Posons $\varepsilon_n = \|y^m - y^*\|^2$, on a d'après le 23°) :

$\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n = -2\rho_m (Au^m|u^m) + \rho_m^2 \|Bu^m\|^2$

$\leq -2\rho_m (Au^m|u^m) + \rho_m^2 \nu\, (Au^m|u^m)$ d'après 25°)

$\leq \rho_m (Au^m|u^m)\left[-2 + \rho_m \nu\right]$

- A étant positive, $(Au^m|u^m) \geq 0$

- Comme $\rho_m < \beta_n \leq \frac{2}{\nu}$ d'où $\rho_m \nu \leq 2$: $-2 + \rho_m \nu \leq 0$

$\underline{d}$ $\boxed{\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n \leq 0 : (\|y^m - y^*\|^2) \text{ décroissante}}$

27) La suite $\|y^m - y^*\|^2$ est positive et décroissante donc

elle converge vers un réel $l \geq 0$.

Avec les notations du 2b°) : $\lim_{n \to \infty} q_{n+1} - q_n = l - l = 0$

d'où $\rho_m (Au^m | u^m)(-2 + \rho_m \nu) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

Or $\rho_m \geq \alpha > 0$ et $|-2 + \rho_m \nu| = 2 - \rho_m \nu \geq 2 - \beta\nu > 0$

d'où $0 \leq \alpha(2-\beta\nu)(Au^m|u^m) \leq |\rho_m(-2+\rho_m \nu)(Au^m|u^m)|$

Par théorème d'encadrement et comme $\alpha(2-\beta\nu) \neq 0$,

on a $\lim_{m \to \infty} (Au^m|u^m) = 0$

Or $\exists p \in \mathbb{R}_*^+$ (c'est le 1°) $\backslash$ $0 \leq p\|u^m\|^2 \leq (Au^m|u^m)$

$\hookrightarrow p = \min(Sp(A)) > 0$

re- Par théorème d'encadrement, $\lim \|u^m\| = 0$

Comme $u^m = x^m - x^*$, on a donc

$$\boxed{(x^m) \text{ qui converge vers } x^*}$$

<u>Remarque</u> : ceci prouve-t-il l'existence d'1 point selle ?