Centrale PSI (1) 2019

On notera $\begin{cases} CV : \text{converge} \\ SE : \text{série entière} \end{cases}$

I A **Q1** $f_\alpha(x) = (1-x)^{-\alpha} = e^{-\alpha \ln(1-x)}$ si $1-x>0$ ($\Leftrightarrow x<1$)

$\boxed{D =]-\infty, 1[}$, et mieux : si $-\alpha \in \mathbb{N}$, $D=\mathbb{R}$ et si $\alpha \in \mathbb{N}^*$, $D = \mathbb{R}\setminus\{1\}$.

$x \mapsto 1-x$ est C^1 sur $]-\infty, 1[$, $\ln$ est C^1 sur $]0,+\infty[$ et

exp est C^1 sur $\mathbb{R}$ donc par composition $\boxed{f_\alpha \text{ est } C^1 \text{ sur }]-\infty, 1[}$.

{Rem : attention aux espaces d'arrivée $D \to]0,+\infty[$: est l'espace de départ de ln}
$x \mapsto 1-x$

$\forall x<1$, $f_\alpha'(x) = (-\alpha)(-1)(1-x)^{-\alpha-1} = \alpha(1-x)^{-\alpha} \times (1-x)^{-1}$

donc $(1-x) f_\alpha'(x) = \alpha f_\alpha(x)$: $\boxed{f_\alpha \text{ est solution de } (1-x)y' - \alpha y = 0}$

Q2 Pour une équation différentielle $\boxed{(E) \text{ de la forme } y' + a(x)y = b(x)}$, avec a et b des fonctions $\underline{C^0}$ sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, on a le résultat suivant, théorème de Cauchy :

$\boxed{\forall y_0 \in \mathbb{R}, \forall x_0 \in I, \text{ il existe une unique fonction solution de } (E) \text{ telle que } f(x_0) = y_0}$

$f_\alpha(0) = 1$, f_α est donc la seule solution de $\mathcal{S}$ $\begin{cases} (E)\ y' - \dfrac{\alpha}{1-x} y = 0 \quad \text{pour } x \in]-1,1[\\ y(0) = 1 \end{cases}$

car pour $x \in]-1,1[$, $x \mapsto \frac{\alpha}{1-x}$ est C^0 sur $]-1,1[$.

On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} L_n(\alpha) \frac{x^n}{n!}$ et $u_n = L_n(\alpha)\frac{x^n}{n!}$

si $x \neq 0$, $\dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \dfrac{|L_{n+1}(\alpha)|}{(n+1)!} \times \dfrac{n!}{|L_n(\alpha)|} \times |x|$ or $L_{n+1}(\alpha) = \alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n) = L_n(\alpha) \times (\alpha+n)$

donc $\dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \dfrac{|\alpha+n|}{n+1}|x| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{|n|}{n}|x| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |x|$ donc $\boxed{R=1}$.

{ • si $|x|<1$ alors $\sum u_n$ CVA et • si $|x|>1$, $\sum u_n$ DVG }

on conclut grace à la règle de d'Alembert

donc f est bien définie sur $]-1,1[$ et en tant que S.E., on peut dériver terme à terme : $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} L_n(\alpha)\, n \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} L_n(\alpha) \frac{x^n}{(n-1)!}$

donc $(1-x)f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} L_n(\alpha)\dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!} - \sum_{\substack{n=1 \\ \text{ou } 0}}^{+\infty} L_n(\alpha)\dfrac{x^n}{(n-1)!}$

$n' = n-1$

$$= \sum_{n'=0}^{+\infty} L_{n'+1}(\alpha)\frac{x^{n'}}{n'!} - \sum_{n=0}^{+\infty} L_n(\alpha)\frac{x^n}{(n-1)!} \times \frac{n}{n}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(L_{n+1}(\alpha) - n L_n(\alpha)\right)\frac{x^n}{n!}$$

or $L_{n+1}(\alpha) - nL_n(\alpha) = L_n(\alpha)(\alpha+n) - nL_n(\alpha) = \alpha L_n(\alpha)$, donc

$(1-x)f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha L_n(\alpha)\dfrac{x^n}{n!} = \alpha f(x)$ donc f est solution de (E)

et $f(0) = L_0(\alpha) \times 1 = 1$ donc f vérifie $\mathcal{S}$ donc $f = f_\alpha$.

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ f_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} L_n(\alpha)\frac{x^n}{n!}}$$

Q3 Soient 2 SE : $\sum a_n x^n$ de rayon de CV : R_a

$\sum b_n x^n$ ——— : R_b

alors la série produit de Cauchy : $\sum \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) x^n$ a pour rayon de CV : $\rho \geq \min(R_a, R_b)$ noté r et $\forall x \in]-r, r[$.

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)x^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n\right)$$

(vraie aussi avec des séries complexes)

Q4 On considère la série produit correspondant à $f_\alpha(x) \times f_\beta(x)$

Ici $R_a = R_b = 1$ donc $r = 1$ et $\forall x \in]-1,1[$: $\left\{a_n = \dfrac{L_n(\alpha)}{n!}, b_n = \dfrac{L_n(\beta)}{n!}\right\}$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{L_k(\alpha)}{k!}\frac{L_{n-k}(\beta)}{(n-k)!}\right)x^n = f_\alpha(x) f_\beta(x) \quad \text{donc}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} L_k(\alpha) L_{n-k}(\beta)\right)\frac{x^n}{n!} = (1+x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta} = (1+x)^{-(\alpha+\beta)}$$

$$= f_{\alpha+\beta}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} L_n(\alpha+\beta)\frac{x^n}{n!}.$$

et par unicité des coefficients d'une S.E :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2,\ L_n(\alpha+\beta) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} L_k(\alpha) L_{n-k}(\beta)}$$

après avoir multiplié par $n!$ $\left\{\text{car on obtient en fait : } \dfrac{L_n(\alpha+\beta)}{n!} = \dots\right\}$

B **Q5** $\boxed{\forall x \in]-1,1[\ ,\ \sum_{p=1}^{+\infty} x^p = \sum_{p=0}^{+\infty} x^p - 1 = \frac{1}{1-x} - 1}$ {pour dériver, c'est mieux que de mettre x en facteur}

donc $\boxed{\sum_{p=1}^{+\infty} p x^{p-1} = \frac{1}{(1-x)^2}}$ {Ne traînons pas}.

Q6 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note H_n : " $\exists R_n \in \mathbb{R}_n[X] \,/\, \forall x \in]-1,1[, \sum_{p=1}^{+\infty} p^n x^n = \frac{R_n(x)}{(1-x)^{n+1}}$ "

- $n=1$: d'après Q5 : $\sum_{p=1}^{+\infty} p^n x^p = \frac{x}{(1-x)^2}$: $R_1(x) = x$, donc $R_1 \in \mathbb{R}_1[X]$.

  H_1 est vraie

- soit $n \geq 1$, n fixé, supposons H_n vraie alors en dérivant :

$$\sum_{p=1}^{+\infty} p^n \times p \ x^{p-1} = R_n'(x) \times \frac{1}{(1-x)^{n+1}} + R_n(x) \times \frac{n+1}{(1-x)^{n+2}}$$

donc en multipliant par x :

$$\sum_{p=1}^{+\infty} p^{n+1} x^p = x\left(\frac{(1-x)\, R_n'(x) + (n+1) R_n(x)}{(1-x)^{n+2}}\right)$$

On pose $R_{n+1}(X) = X(1-X)R_n'(X) + (n+1) X R_n(X)$ or $d°R_n \leq n$ donc $d°R_n' \leq n-1$ donc $d° X(1-X)R_n'(X) \leq n+1$ et de même $d° X R_n(X) \leq n+1$

donc $d° R_{n+1} \leq n+1$.

alors $\sum_{p=1}^{+\infty} p^{n+1} x^p = \frac{R_{n+1}(x)}{(1-x)^{n+2}}$ et $d° R_{n+1} \leq n+1$ donc H_{n+1} est vraie

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, H_n est vraie

Unicité : si $Q_n \in \mathbb{R}_n[X]$ vérifie la même relation alors $\forall x \in]-1,1[$

$\frac{R_n(x)}{(1-x)^{n+1}} = \frac{Q_n(x)}{(1-x)^{n+1}}$ donc $(R_n - Q_n)(x) = 0$: $R_n - Q_n$ a une infinité de racines donc $R_n = Q_n$

donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists! R_n \in \mathbb{R}_n[X] \,/\, \forall x \in]-1,1[\quad \sum_{p=1}^{+\infty} p^n x^n = \frac{R_n(x)}{(1-x)^{n+1}}}$

Rem : H_0 est vraie aussi avec $R_0(x) = x$, on aurait pu démarrer à $n=0$

II

1 N
1 Bl

Si Bl : + 1 Bl , si N : + 1 N.
On note N_k : on a tiré 1 boule noire au $k^{\text{ème}}$ tirage.
De même pour B_k.

Q7 $X_1(\Omega) = \{1, 2\}$: au mieux, on tire 1 boule blanche, et on en remet 1.

$P(X_1 = 1) = P(N_1) = \frac{1}{2}$, $P(X_1 = 2) = P(B_1) = \frac{1}{2}$ $\boxed{X_1 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,2]\!])}$

$X_2(\Omega) = [\![1,3]\!]$

$P(X_2=1) = P(N_1 \cap N_2) = P(N_1)\, P(N_2 / \underset{\substack{2N \\ 1\,Bl}}{N_1})$ d'après la formule des proba composées

donc $P(X_2=1) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

$P(X_2 = 2) = P(N_1 \cap B_2$ ou $B_1 \cap N_2)$: on a ajouté exactement 1 Bl.

$= P(N_1)\, P(B_2/N_1) + P(B_1) P(N_2/\underset{\substack{1N \\ 2\,Bl}}{B_1})$ car $(N_1 \cap B_2)$ et $(B_1 \cap N_2)$ sont incompatibles

$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

$P(X_2 = 3) = P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) P(B_2/\underset{\substack{1N \\ 2\,Bl}}{B_1}) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$: $\boxed{X_2 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,3]\!])}$

$X_3(\Omega) = [\![1,4]\!]$ {pfff, en regardant Q8, on pourrait varier}

$(X_2 = k)_{1 \leq k \leq 3}$ est un système complet d'événements, on applique la formule des proba totales :

$P(X_3=1) = \sum_{k=1}^{3} P(X_2=k)\, \underbrace{P(X_3 = 1 / X_2 = k)}_{=0 \text{ si } k>1} = P(X_2=1) \times P(X_3=1 / \underset{\substack{3N \\ 1\,Bl}}{X_2=1})$

Si $X_2=1$, pour avoir $X_3=1$, on doit tirer une boule noire, donc

$P(X_3=1) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ et on recommence {rapidement}.

$P(X_3=2) = P(X_2=1) P(X_3=2/X_2=1) + P(X_2=2)\, P(X_3=2 / \underset{\substack{2N \\ 2\,Bl}}{X_2=2}) = \frac{1}{3}\,\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\,\frac{2}{4} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

$P(X_3=3) = P(X_2=2)\, P(X_3=3/\underset{\substack{2N \\ 2\,Bl}}{X_2=2}) + P(X_2=3)\, P(X_3=3/\underset{\substack{1N \\ 3\,Bl}}{X_2=2}) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{4} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$

$P(X_3=4) = P(X_2=3)\, P(X_3=4/\underset{\substack{1N \\ 3\,Bl}}{X_2=3}) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ $\boxed{X_3 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,4]\!])}$

{ Rappel : $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!]) \iff G_X(t) = \frac{1}{n}(t + t^2 + \dots + t^n)$ }

Pour $n \in \{1,2,3\}$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n+1]\!])$ donc $g_n(t) = \frac{1}{n+1}(t + t^2 + \dots + t^{n+1})$

$\forall t \in \mathbb{R}$, $\boxed{g_n(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} t^k}$ pour $n \in [\![1,4]\!]$.

Q8 Comme en Q7, $(X_{n-1}=j)_{0\leq j\leq n}$ est un SCE pour $n\geq$:, en ajoutant $X_{n-1}=0$ de proba nulle si $n-1\geq 1$ et $X_0=1$

FPT : $\forall n\geq 2, \forall k\geq 1$, $P(X_n=k)=\sum_{j=0}^{n} P(X_{n-1}=j)P(X_n=k / X_{n-1}=j)$

or si $j\geq k+1$, $P(X_n=k / X_{n-1}=j)=0$ (on n'enlève pas de boule blanche)

et comme en 1 étape, on en ajoute au plus une, si $j\leq k-2$, $P(X_n=k / X_{n-1}=j)=0$

si $X_{n-1}=k-1$, on a dans l'urne $\left|\begin{array}{l} k-1 \text{ boules blanches} \\ (n+1) \text{ boules en tout } (2 \text{ au départ} + n-1) \end{array}\right.$

donc $P(X_n=k / X_{n-1}=k-1)=\frac{k-1}{n+1}$ car au $n^{\text{ème}}$ tirage, on a tiré 1 blanche

De même si $X_{n-1}=k$, on a dans l'urne $\left|\begin{array}{l} k \text{ boules blanches.} \\ n+1-k \text{ boules noires.} \end{array}\right.$

$P(X_n=k / X_{n-1}=k)=\frac{n+1-k}{n+1}$

d'où $\boxed{P(X_n=k)=\frac{k-1}{n+1}P(X_{n-1}=k-1)+\frac{n+1-k}{n+1}P(X_{n-1}=k)}$ $\left|\begin{array}{l}\forall k\geq 1\\ \forall n\geq 1\end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{l} \text{Pour } n=1, \text{ et } 1\leq k\leq 2, \ P(X_1=k)=\frac{1}{2} \\ \text{formule OK si } n=1 \\ \text{De même si } k\geq n+1. \end{array}\right.$

$\left.\begin{array}{l} k=1 : \frac{0}{2}P(X_0=0)+\frac{1}{2}P(X_0=1)=\frac{1}{2} \\ k=2 : \frac{1}{2}P(X_0=1)+0\,P(X_0=2)=\frac{1}{2} \end{array}\right\}$

Rem : ne pas passer trop de temps dans les cas particuliers }.

Q9 On multiplie par t^k puis on somme de $k=0$ à $+\infty$ (ce qu'on peut faire car les sommes sont finies), $\forall t\in\mathbb{R}$, $\forall n\geq 1$.

$\sum_{k=1}^{+\infty} P(X_n=k)t^k=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k-1}{n+1}P(X_{n-1}=k-1)t^k+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{n+1-k}{n+1}P(X_{n-1}=k)t^k$

(ou 0 mais $P(X_n=0)=0$)

$g_n(t)=\frac{1}{n+1}\sum_{k'=0}^{+\infty} k' P(X_{n-1}=k')t^{k'+1}+\sum_{k=1}^{+\infty}\left(1-\frac{k}{n+1}\right)P(X_{n-1}=k)t^k$

$(k'=k-1)$

$=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{+\infty} k P(X_{n-1}=k)(t^{k+1}-t^k)+\sum_{k=1}^{+\infty}P(X_{n-1}=k)t^k$

or : $\sum_{k=0}^{+\infty} k P(X_{n-1}=k)t^k(t-1)=(t-1)t\sum_{k=0}^{+\infty} k P(X_{n-1}=k)t^{k-1}$

$=(t^2-t)g_{n-1}'(t)$ donc $\boxed{g_n(t)=\frac{t^2-t}{n+1}g_{n-1}'(t)+g_{n-1}(t)}$

Q10 Récurrence : pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose H_n : " $g_n(t)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}t^k$ "

- $n=1$, d'après Q7, H_1 est vraie

• soit $n \geqslant 2$, n fixé, on suppose que H_{n-1} est vraie

alors $g_{n-1}(t) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} t^k$ et d'après Q9 :

$$g_n(t) = \frac{t^2-t}{n+1}\,\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k\,t^{k-1} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} t^k$$

$$= \frac{1}{n(n+1)}\left[\sum_{k=1}^{n} k\,t^{k+1} - \sum_{k=1}^{n} k\,t^k + (n+1)\sum_{k=1}^{n} t^k\right]$$

$k' = k+1$

$$= \frac{1}{n(n+1)}\left[\sum_{k'=2}^{n+1} (k'-1)\,t^{k'} + \sum_{k=1}^{n} (n+1-k)\,t^k\right]$$

ou 1 ; ou $n+1$

$$= \frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n+1} (k-1+n+1-k)\,t^k = \frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n+1} n\,t^k = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} t^k$$

donc H_{n+1} est vraie

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad g_n(t) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} t^k}$

Q11 g_n est la fonction de répartition d'une v.a. $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n+1]\!])$ donc $\boxed{X_n \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n+1]\!]) \text{ loi uniforme}}$

donc $\boxed{E(X_n) = \frac{n+2}{2}}$ (ou $E(X_n) = g_n'(1) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} k\,1^{k-1} = \frac{1}{n+1}\frac{(n+1)(n+2)}{2}$)

III

a_0 Bl, b_0 N

si Bl, $+\, a$ Bl $+\, b$ N

si N, $+\, c$ Bl $+\, d$ N

$s = a+b = c+d$.

Q12 1 Bl ; si Bl, + 1 N ; si N ; + 1 Bl

$\omega_1 = (B_0, B_0, B_0)$: $X_3 = 1$

$\omega_2 = (B_0, B_0, N_0)$: $X_3 = 2$

$\omega_3 = (B_0, B_0, N_1)$: $X_3 = 2$

$\omega_4 = (B_0, N_0, B_0)$: $X_3 = 2$

$\omega_5 = (B_0, N_0, B_1)$: $X_3 = 2$

$\omega_6 = (B_0, N_0, N_0)$: $X_3 = 3$

Pour les 3 premiers tirages, on a dans l'urne, après le 2ème tirage $B_0 N_0 N_1$

$P(X_1 = 1) = P(\omega_1) = 1 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$ comme en Q7 (proba composées)

$P(X_1 = 2) = \sum_{k=2}^{5} P(\omega_k) = 4 \times \left(1 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{6}$

$P(X_1 = 3) = P(\omega_6) = \frac{1}{6}$

$\boxed{X_1(\Omega) = [\![1,3]\!],\quad P(X_1=1) = P(X_1=3) = \frac{1}{6} \text{ et } P(X_1=2) = \frac{4}{6}}$ Vérif : $\{\Sigma = 1\}$

Q13 $P_3(u,v) = \sum_{k=1}^{6} u^{b(\omega_k)} v^{n(\omega_k)} = uv^3 + \sum_{k=2}^{5} u^2v^2 + u^3 v$.

$$\boxed{P_3(u,v) = uv^3 + 4u^2v^2 + u^3v}$$

Q14 Au départ, avant le 1er tirage, on a dans l'urne a_0+b_0 boules, donc (a_0+b_0) choix possibles puis on ajoute s boules donc avant le 2ème tirage, on a (a_0+b_0+s) choix possibles etc ...

Sans tenir compte de leur couleur, on note les boules $\ell_1, \ell_2, \dots$

et on peut modéliser $\Omega_n = \{(\ell_{i_1}, \ell_{i_2}, \dots, \ell_{i_n}) \,/\, 1 \leq i_j \leq a_0+b_0+(j-1)s\}$.

$\{$vérif : $1 \leq i_1 \leq a_0+b_0\}$.

donc $\Omega_n = \{\ell_1, \dots, \ell_{a_0+b_0}\} \times \{\ell_1, \dots, \ell_{a_0+b_0+s}\} \times \dots$

$= \prod_{j=1}^{n-1} \{\ell_1, \dots, \ell_{a_0+b_0+(j-1)s}\}$ et le cardinal d'1 produit cartésien est le produit des cardinaux

$$\boxed{\operatorname{card} \Omega_n = (a_0+b_0) \times \dots \times (a_0+b_0+(n-1)s)}$$

$$= \prod_{j=1}^{n} \left(a_0+b_0+(j-1)s\right) = s^n \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{a_0+b_0}{s} + j - 1\right)$$

$$\boxed{\operatorname{card} \Omega_n = s^n L_n\left(\frac{a_0+b_0}{s}\right)} \quad \text{car } L_n(X) = \prod_{j=1}^{n} (X+j-1)$$

Q15 La proba des tirages est uniforme : il y a équiprobabilité

donc
$$\boxed{P(X_n = k) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} = \frac{\operatorname{card}\{\omega \in \Omega_n \,/\, b(\omega) = k\}}{\operatorname{card} \Omega_n}}.$$

Q16 $g_n(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\operatorname{card}\{\omega \in \Omega_n \,/\, b(\omega) = k\}}{\operatorname{card} \Omega_n} t^k$

$$= \frac{1}{\operatorname{card} \Omega_n} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{\omega / b(\omega) = k} t^{b(\omega)} \right) = \frac{1}{\operatorname{card} \Omega_n} \sum_{\omega \in \Omega_n} t^{b(\omega)}.$$

or $P_n(t,1) = \sum_{\omega \in \Omega_n} t^{b(\omega)}$ donc $\boxed{g_n(t) = \frac{1}{\operatorname{card} \Omega_n} P_n(t,1)}$

$\{$ Pour comprendre, utiliser la question Q12 $\}$.

$E(X_n) = g_n'(1)$ car g_n est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc $\boxed{E(X_n) = \frac{1}{\operatorname{card} \Omega_n} \frac{\partial P_n}{\partial u}(1,1)}$

Q17 {Le jour du concours, j'admettrais cette question pour faire les suivantes, quitte à y revenir plus tard}.

On va décomposer Ω_{m+1} et l'écrire à l'aide de Ω_m en fonction de la dernière boule tirée.

On note $B_{m,k} = \{\omega \in \Omega_m \,/\, b(\omega) = k\}$. {il faudrait noter $b_m(\omega)=k$}.

alors $B_{m+1,k} = \{\omega \in \Omega_{m+1} \,/\, b(\omega) = k\} = B'_{m+1,k} \cup N_{m+1,k}$ en notant

$B'_{m+1,k} = \{\omega \in \Omega_{m+1} \,/\, b(\omega) = k$ et la dernière boule tirée est blanche$\}$.

$= \{(\omega', B_j) \,/\, \omega' \in E_{m,k-a}$ et $0 \leqslant j \leqslant k-a-1\}$.

car avant le $(m+1)^{\text{ème}}$ tirage, il y a $k-a$ boules blanches.

$N_{m+1,k} = \{(\omega', N_j) \,/\, \omega' \in E_{m,k-c}$ et $0 \leqslant j \leqslant a_0+b_0+ms-(k-c)-1\}$.

car avant le $(m+1)^{\text{ème}}$ tirage, il y a en tout a_0+b_0+ms boules (dont $k-c$ boules blanches, donc $a_0+b_0+ms-(k-c)$ boules noires)

Ces 2 ensembles étant disjoints :

$$\text{card } B_{m+1,k} = \text{card } B'_{m+1,k} + \text{card } N_{m+1,k}$$
$$= \text{card } B_{m,k-a} \times (k-a) + \text{card } B_{m,k-c}\,(a_0+b_0+ms-k+c)$$

On note $T_m = a_0+b_0+ms$: le nbre total de boules après m tirages.

donc $P_{m+1}(u,v) = \sum_{k=1}^{+\infty} \text{card } B_{m+1,k}\, u^k v^{T_{m+1}-k}$, les termes étant nuls à partir d'1 certain rang, donc

$$P_{m+1}(u,v) = \sum_{k=a+1}^{+\infty} (k-a)\,\text{card } B_{m,k-a}\, u^k v^{T_m-(k-a)+b}$$
$$+ \sum_{k=c+1}^{+\infty} (T_m-(k-c))\,\text{card } B_{m,k-c}\, u^k v^{T_m-(k-c)+d}$$

$k'=k-a \rightarrow$

$k'=k-c \rightarrow$

$$= \sum_{k'=1}^{+\infty} k'\,\text{card } B_{m,k'}\, u^{k'+a} v^{T_m+b-k'} + \sum_{k'=1}^{+\infty} (T_m-k')\,\text{card } B_{m,k'}\, u^{k'+c} v^{T_m-k'+d}$$

$$= u^{a+1} v^b \sum_{k=1}^{+\infty} k\,\text{card } B_{m,k}\, u^{k-1} v^{T_m-k} + u^c v^{d+1} \sum_{k=1}^{+\infty} (T_m-k)\, u^k v^{T_m-k-1} \times \text{card } B_{m,k}$$

or $P_m(u,v) = \sum_{k=1}^{+\infty} \text{card } B_{m,k}\, u^k v^{T_m-k}$ donc on reconnait les dérivées partielles : $\boxed{P_{m+1}(u,v) = u^{a+1} v^b \frac{\partial P_m}{\partial u}(u,v) + u^c v^{d+1} \frac{\partial P_m}{\partial v}(u,v)}$

(Q18) On reprend la notation du Q17 :

$P_n(u,v) = \sum_{k=1}^{T_n} \text{card } B_{n,k}\, u^k v^{T_n-k}$ où $T_n = a_0+b_0+sn$.

$|P_n(u,v)| \leqslant \sum_{k=1}^{T_n} \text{card } B_{n,k}\, |u|^k |v|^{T_n-k}$ et si $0<u<2$, $0<v<2$, on obtient

$|P_n(u,v)| \leqslant \sum_{k=1}^{T_n} \text{card } \Omega_n\, 2^k 2^{T_n-k}$ car $B_{n,k} \subset \Omega_n$.

$\leqslant s^n L_n\left(\frac{a_0+b_0}{s}\right) 2^{T_n} \underbrace{\sum_{k=1}^{T_n} 1}_{T_n}$.

donc $\left|P_n(u,v)\frac{x^n}{n!}\right| \leqslant L_n\left(\frac{a_0+b_0}{s}\right) s^n\, 2^{a_0+b_0+sn} \times T_n \times \frac{x^n}{n!}$

$0 \leqslant \left|P_n(u,v)\frac{x^n}{n!}\right| \leqslant L_n\left(\frac{a_0+b_0}{s}\right) \frac{(s2^s x)^n}{n!} \times 2^{a_0+b_0} \times (a_0+b_0+sn)$

or d'après Q2, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall t \in]-1,1[$, $\sum L_n(\alpha)\frac{t^n}{n!}$ CV : $R \geqslant 1$.

donc pour $t = s2^s x$ et $\alpha = \frac{a_0+b_0}{s}$, $\sum L_n(\alpha)\frac{t^n}{n!}$ CV, on ne change pas la CV en multipliant par $c = 2^{a_0+b_0}(a_0+b_0)$ ni en multipliant par n, donc par règle de comparaison, si $|s2^s x| < 1$ alors $\sum P_n(u,v)\frac{x^n}{n!}$ CVA.

$|s2^s x| < 1 \iff |x| < \frac{1}{s2^s}$: $\boxed{\rho = \frac{1}{s2^s} \text{ convient}}$

(Q19) On note $S(x) = H(x,u,v) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(u,v)\frac{x^n}{n!}$

$S(x)$ est la somme d'une S.E. de rayon de CV : $R \geqslant \rho$

donc S est C^1 (et même C^∞) sur $]-\rho,\rho[$ et on peut dériver terme à terme donc :

$\boxed{\text{H admet une dérivée partielle par rapport à } x \text{ et } \frac{\partial H}{\partial x}(x,u,v) = \sum_{n=1}^{+\infty} P_n(u,v)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}}$

(Q20) On pose $f(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(u)$ où $f_n(u) = P_n(u,v)\frac{x^n}{n!}$, $x \in D_\rho$, $v \in]0,2[$

- $\forall n \geqslant 0$, f_n est C^1 sur $]0,2[$ en tant que fonction polynomiale.
- $\sum f_n$ CV simplement sur $]0,2[$ d'après Q18.
- $\forall n \geqslant 1$, $\forall u \in]0,2[$, $f_n'(u) = \frac{\partial P_n}{\partial u}(u,v)\frac{x^n}{n!} = \sum_{k=1}^{T_n} \text{card } B_{n,k}\, k\, u^k v^{T_n-k}$

Comme à la question Q18, on montre que

$|f_n'(u)| \leqslant \alpha_n$ avec $\sum \alpha_n$ une série qui CV, α_n constante par rapport à u

donc $\|f_n'\|_{\infty,]0,2[} \leqslant \alpha_n$ ce qui prouve que

$\sum f_n'$ CV normalement sur $]0,2[$

Conclusion : f est C^1 sur $]0,2[$ et f' s'obtient en dérivant terme à terme donc $\boxed{H \text{ admet une dérivée partielle par rapport à } u \text{ et } \frac{\partial H}{\partial u}(x,u,v) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\partial P_n}{\partial u}(u,v)\frac{x^n}{n!}}$

Q21 $H(0,u,v) = P_0(u,v)\dfrac{0^0}{0!} = \sum_{\omega \in \Omega_0} u^{b(\omega)} v^{n(\omega)} = u^{a_0} v^{b_0}$.

D'après Q19 et en posant $n' = n-1$, $\dfrac{\partial H}{\partial x}(x,u,v) = \sum_{n'=0}^{+\infty} P_{n'+1}(u,v)\dfrac{x^{n'}}{n'!}$

$= \sum_{n=0}^{+\infty}\left[u^{a+1}v^{b}\dfrac{\partial P_n}{\partial u}(u,v) + u^c v^{d+1}\dfrac{\partial P_n}{\partial v}(u,v)\right]\dfrac{x^n}{n!}$ d'après Q17.

et d'après Q20, $\boxed{\dfrac{\partial H}{\partial x}(x,u,v) = u^{a+1}v^b\dfrac{\partial H}{\partial u}(x,u,v) + u^c v^{d+1}\dfrac{\partial H}{\partial v}(x,u,v)}$

{Cette dernière ne rapportera peut-être pas beaucoup de points, mais ce n'est que du recopiage}

IV $\begin{matrix} a_0 \text{ Bl} \\ b_0 \text{ N}\end{matrix}$ $\begin{cases} \text{si Bl}, +a \text{ Bl} \\ \text{si N}, +a \text{ N}\end{cases}$

Q22 $(1-x)^{-\alpha} = f_\alpha(x)$: Ici $\alpha = \dfrac{a_0}{a}$ et x est remplacé par axu^a.

$|axu^a| < 1$ or $|axu^a| < a|x|2^a$ donc si $|x| < \dfrac{1}{a2^a}$ alors $|axu^a| < 1$

De même, on pose $\beta = \dfrac{b_0}{a}$ et de même, si $|x| < \dfrac{1}{a2^a}$ alors $|axv^a| < 1$

On pose $\boxed{\rho = \dfrac{1}{a2^a}}$ alors $\forall (x,u,v) \in D_\rho$, on peut appliquer Q4 :

$G(x,u,v) = u^{a_0}v^{b_0} f_\alpha(axu^a) f_\beta(axv^a)$ {mais ce n'est pas le même x : zut !}.

$= u^{a_0}v^{b_0}\sum_{n=0}^{+\infty} L_n(\alpha)\dfrac{(axu^a)^n}{n!}\sum_{n=0}^{+\infty} L_n(\beta)\dfrac{(axv^a)^n}{n!}$

$= u^{a_0}v^{b_0}\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} L_k(\alpha)\dfrac{(axu^a)^k}{k!} L_{n-k}(\beta)\dfrac{(axv^a)^{n-k}}{(n-k)!}$ par produit de Cauchy.

$$G(x,u,v)=\sum_{n=0}^{+\infty} u^{a_0} v^{b_0}\left(\sum_{k=0}^{n} L_k\left(\frac{a_0}{a}\right)L_{n-k}\left(\frac{b_0}{a}\right)\frac{u^{ak}\,v^{a(n-k)}}{k!\,(n-k)!}\right)a^n \times n! \times \frac{x^n}{n!}$$

donc on pose $\boxed{Q_n(u,v)=u^{a_0}v^{b_0}\sum_{k=0}^{n} L_k\left(\frac{a_0}{a}\right)L_{n-k}\left(\frac{b_0}{a}\right)\binom{n}{k}u^{ak}v^{a(n-k)}a^n}$

Q23 On reconnait une S.E. (on a la même réponse qu'en Q19)

$$\boxed{\frac{\partial G}{\partial x}(x,u,v)=\sum_{n=1}^{+\infty} Q_n(u,v)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}} \underset{n'=n-1}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} Q_{n+1}(u,v)\frac{x^n}{n!} \quad \text{pour Q25}$$

Q24 Comme en Q20

$$\frac{\partial G}{\partial u}(x,u,v)=\sum_{n=1}^{+\infty} v^{b_0}\sum_{k=0}^{n} L_k\left(\frac{a_0}{a}\right)L_{n-k}\left(\frac{b_0}{a}\right)\binom{n}{k}(a_0+ak)u^{a_0+ak-1}v^{a(n-k)}a^n$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\partial Q_n(u,v)}{\partial u}\frac{x^n}{n!}$$

Q25 Par hypothèse, G est solution de IV (1) donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} Q_{n+1}(u,v)\frac{x^n}{n!}=u^{a+1}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\partial Q_n(u,v)}{\partial u}\frac{x^n}{n!}+v^{a+1}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\partial Q_n(u,v)}{\partial v}\frac{x^n}{n!}$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(u^{a+1}\frac{\partial Q_n(u,v)}{\partial u}+v^{a+1}\frac{\partial Q_n(u,v)}{\partial v}\right)\frac{x^n}{n!}$$

Par unicité des coefficients d'une SE :

$Q_{n+1}(u,v)=u^{a+1}\frac{\partial Q_n(u,v)}{\partial u}+v^{a+1}\frac{\partial Q_n}{\partial v}(u,v)$ que vérifie aussi $P_n(u,v)$ d'après Q17 avec les hyp du IV

Récurrence : $\forall n\geq 0$, H_n : " $P_n(u,v)=Q_n(u,v)$ "

- $P_0(u,v)=u^{a_0}v^{b_0}$

  et $G(0,u,v)=Q_0(u,v)\frac{0^0}{0!}$ d'après Q22.

  donc $u^{a_0}v^{b_0}=Q_0(u,v)$ donc H_0 est vraie.

- soit $n\geq 0$, n fixé. On suppose H_n vraie alors d'après la relation III (1), $P_{n+1}(u,v)=Q_{n+1}(u,v)$: H_{n+1} vraie

Conclusion : $\boxed{\forall n\geq 0,\ P_n(u,v)=Q_n(u,v)}$

donc $\boxed{H=G}$ sur D_ρ par définition de H et d'après Q22

Q26 En reprenant les notations de Q17

$$P_n(u,v)=\sum_{k=1}^{+\infty}\operatorname{card} B_{n,k}\, u^k v^{T_n-k} \quad \text{et} \quad P(X_n=k)=\frac{\operatorname{card} B_{n,k}}{\operatorname{card}\Omega_n}.$$

donc $P(X_n=a_0+ka)=\dfrac{\operatorname{card} B_{n,a_0+k}}{\operatorname{card}\Omega_n}$.

or d'après Q22, le coeff. de $\underline{u^{a_0+ka}}\, v^{a(n-k)+b_0}$ est :

$$L_k\left(\frac{a_0}{a}\right)L_{n-k}\left(\frac{b_0}{a}\right)\binom{n}{k}a^n$$

et le card Ω_n est donné par Q14 avec $s=a$, donc

$$\boxed{P(X_n=a_0+ka)=\binom{n}{k}\frac{L_k\left(\frac{a_0}{a}\right)L_{n-k}\left(\frac{b_0}{a}\right)a^n}{a^n L_n\left(\frac{a_0+b_0}{a}\right)}=\binom{n}{k}\frac{L_k\left(\frac{a_0}{a}\right)L_{n-k}\left(\frac{b_0}{a}\right)}{L_n\left(\frac{a_0}{a}+\frac{b_0}{a}\right)}}$$

Q27 $g_n(t)=\sum_{k=0}^{+\infty}P(X_n=a_0+ka)\,t^{a_0+ka}$ avec $a_0=1$, $a=1$.

$$=\sum_{k=0}^{+\infty}P(X_n=1+k)\,t^{1+k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{L_k(1)L_{n-k}(1)}{L_n(2)}t^{k+1}$$

or pour $x\in]-1,1[$:

$$f_1(x)=(1-x)^{-1}=\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{+\infty}x^n=\sum_{n=0}n!\,\frac{x^n}{n!} \quad \text{donc } L_n(1)=n! \text{ d'après Q2}$$

$$f_2(x)=\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{p=1}^{+\infty}p\,x^{p-1} \quad \text{d'après Q5 - On pose } n=p-1$$

$$f_2(x)=\sum_{n=0}^{n}(n+1)x^n=\sum_{n=0}^{n}(n+1)\,n!\,\frac{x^n}{n!} \quad \text{donc } L_n(2)=(n+1)\,n!\text{, donc}$$

$$g_n(t)=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\times\frac{k!\,(n-k)!}{(n+1)\,n!}t^{k+1}=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}t^{k+1}=\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}t^k$$

$\boxed{\text{On a retrouvé Q10}}$

Q28 Calculons $\frac{\partial P_n}{\partial u}(1,1)$ avec Q19 (plutôt Q20 ?)

$$\frac{\partial H}{\partial x}(x,u,v)=\sum_{n=1}^{+\infty}P_n(u,v)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \quad \text{or } H=G \text{ donc}$$

$$\frac{\partial H}{\partial x}(x,u,v)=u^{a_0}v^{b_0}\Big[-\frac{a_0}{a}(-a\,u^a)(1-ax\,u^a)^{-\frac{a_0}{a}-1}(1-ax\,v^a)^{-\frac{b_0}{a}}$$
$$+(1-ax\,u^a)^{-\frac{a_0}{a}}\times\left(-\frac{b_0}{a}\right)(-a\,v^a)(1-ax\,v^a)^{-\frac{b_0}{a}-1}\Big].$$

et après avoir déterminé le coeff de $\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$ (à l'aide de $f_\alpha(x)$),

il n'y a plus qu'à dériver par rapport à u {coeff de $\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$? n'aboutit pas}

D'où $\boxed{E(X_n)=a_n\frac{n+a_0+b_0}{\ldots}.}$ long !

$\boxed{\text{V}}$ (A) $n \in \mathbb{N}$, $0 < u < v$.

On note $S(u,v) = \sum_{p=1}^{+\infty} p^n (v-u)^{n+1} \left(\frac{u}{v}\right)^p$. or $0 < \frac{u}{v} < 1$ donc $\frac{u}{v} \in]-1,1[$:

D'après Q6, $\exists ! R_n \in \mathbb{R}_n[X]$ / $\sum_{p=1}^{+\infty} p^n \left(\frac{u}{v}\right)^p = \dfrac{R_n\left(\frac{u}{v}\right)}{\left(1-\frac{u}{v}\right)^{n+1}}$

or $d^\circ R_n \leq n$: on écrit $R_n(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

alors $S(u,v) = (v-u)^{n+1} \dfrac{\sum_{k=0}^{n} a_k \left(\frac{u}{v}\right)^k}{\frac{(v-u)^{n+1}}{v^{n+1}}} = v^{n+1} \sum_{k=0}^{n} a_k u^k v^{-k}$

$S(u,v) = \sum_{k=0}^{n} a_k u^k v^{n+1-k}$ or $n+1-k \geq n+1-n \geq 0$ donc.

$$\boxed{\sum_{p=1}^{+\infty} p^n (v-u)^{n+1} \left(\frac{u}{v}\right)^p \text{ est polynomiale en } u \text{ et } v.}$$

(Q30) On note $\underset{m}{S}(t) = \sum_{p=n+1}^{+\infty} p^n t^p (1-t)^{n+1}$ pour $t \in]-1,1[$ alors

$S_m(t) = (1-t)^{n+1} \sum_{p=n+1}^{+\infty} p^n t^p \underset{t\to 0}{\sim} \sum_{p=n+1}^{+\infty} p^n t^p$ notée $s_m(t)$

$\dfrac{s_m(t)}{t^{n+1}} = \sum_{p=n+1}^{+\infty} p^n t^{p-(n+1)} \underset{k=p-(n+1)}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} (k+n+1)^n t^k$: il s'agit de la somme d'une série entière, donc C° sur $]-1,1[$, donc C° sur le segment $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ donc bornée sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

$\dfrac{s_m(t)}{t^{n+1}}$ est bornée sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ donc $\dfrac{S_m(t)}{t^{n+1}}$ aussi donc

$s_m(t) \underset{t\to 0}{=} O(t^{n+1})$ donc $\boxed{S_m(t) \underset{t\to 0^+}{=} O(t^{n+1})}$

(Q31) $g_m(t) = \dfrac{1}{n!} \sum_{p=1}^{n} p^n t^p (1-t)^{n+1} + O(t^{n+1})$ d'après Q30.

et d'après la formule du binôme :

$g_m(t) = \dfrac{1}{n!} \sum_{p=1}^{n} p^n t^p \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^k t^k + O(t^{n+1})$.

$= \dfrac{1}{n!} \sum_{p=1}^{n} \sum_{k=0}^{n+1} p^n \binom{n+1}{k} (-1)^k t^{p+k} + O(t^{n+1})$.

{ et on regarde la question suivante }

On cherche le coeff. de t^m pour $m \leq n$ dans

$\sum_{p=1}^{n} \sum_{k=0}^{n+1} \alpha_p \beta_k t^{p+k} = \sum_{p=1}^{n} \sum_{m=p}^{p+n+1} \alpha_p \beta_{m-p} t^m$; on a posé : $m = p+k$. $(k = m-p)$

or si $m \geqslant n+1$, $t^m = O(t^{n+1})$ donc

$$g_n(t) = \frac{1}{n!}\sum_{p=1}^{n}\sum_{m=p}^{n} p^n \binom{n+1}{m-p}(-1)^{m-p} t^m + O(t^{n+1})$$

$$\boxed{= \frac{1}{n!}\sum_{m=1}^{n}\left(\sum_{p=1}^{m} p^n \binom{n+1}{m-p}(-1)^{m-p}\right) t^m + O(t^{n+1})}$$

$\left(\begin{cases} 1\leqslant p \leqslant n \\ p \leqslant m \leqslant n \end{cases} \iff 1 \leqslant p \leqslant m \leqslant n \iff \begin{cases} 1 \leqslant m \leqslant n \\ 1 \leqslant p \leqslant m \end{cases} \right.$: Explication $\Big)$.

Q32 or $g_n(t) = \sum_{m=1}^{+\infty} P(X_n = m)\, t^m$ qui est une fonction polynomiale car $X_n(\Omega)$ est fini $\left(X_n(\Omega) \subset \{\underbrace{a_0 + b_0 + a_n}_{>n}\}\right)$.

$\exists d > n \ / \ g_n(t) = \sum_{m=1}^{d} P(X_n = m)\, t^m$

$$= \sum_{m=1}^{n} P(X_n=m)\, t^m + t^{n+1} Q(t)$$ où Q est une fonction polynomiale donc C^0 sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ donc bornée sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

$$g_n(t) = \sum_{m=1}^{n} P(X_n = m)\, t^m + O(t^{n+1})$$: DL à l'ordre n.

donc par unicité des coefficients d'1 DL :

$$P(X_n = m) = \frac{1}{n!}\sum_{p=1}^{m} p^n \binom{n+1}{m-p}(-1)^{m-p}$$: on pose $k = m-p$

$$\boxed{P(X_n = m) = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{m-1} (m-k)^n \binom{n+1}{k}(-1)^k}$$

V B

Q33 $(u_0, u_1, \dots u_i, u_{i+1}, \dots, u_k)$ devient $(u_0, \dots, u_i, a, u_{i+1}, \dots u_k)$ que l'on pourrait noter $(u'_0, \dots, u'_i, u'_{i+1}, u'_{i+2}, \dots, u'_{k+1})$

Les changements de montées et de descente s'effectuent entre u_i, u_{i+1} et u'_i, u'_{i+1} et u'_{i+2} c à dire : u_i, a et u_{i+1}.

On note M le nombre de montées initiales et

D —— descentes ——

et on rappelle que $\forall p \in [\![0, k]\!]$, $a > u_p$ donc $a > u_i$

et $a > u_{i+1}$

Si $u_i < u_{i+1}$: c'est 1 montée remplacée par $u_i < a$ ($= u'_{i+1}$)
mais de plus $a > u_{i+1}$: on a une descente en plus.

donc $\boxed{\text{si } u_i < u_{i+1}\text{, on a le même nombre de montées et 1 descente en plus}}$

Si $u_i > u_{i+1}$: c'est 1 descente remplacée par : $u_i < a$, on a une montée en plus, et $a > u_{i+1}$: on ne change pas le nbre de descente

donc $\boxed{\text{si } u_i > u_{i+1}\text{, on a le même nombre de descentes et 1 montée de plus}}$

Q34 card $S_3 = 3! = 6$. On va représenter les éléments de S_3 par leur images $(\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3))$ et on note encore σ ce triplet.

$\sigma_1 = (1,2,3)$ (c'est donc l'identité) : $\sigma_1 \in A_{3,2}$.

$\sigma_2 = (1,3,2) \in A_{3,1}$

$\sigma_3 = (2,1,3) \in A_{3,1}$

$\sigma_4 = (2,3,1) \in A_{3,1}$

$\sigma_5 = (3,1,2) \in A_{3,1}$

$\sigma_6 = (3,2,1) \in A_{3,0}$

Conclusion :
$$\boxed{\begin{matrix} A_{3,2} = 1 \\ A_{3,1} = 4 \\ A_{3,0} = 1 \end{matrix}}$$
et si $m \geqslant 3$ alors $A_{3,m} = 0$

On reconnait les coefficients de $P_3(X,1) = A_{3,0}X + A_{3,1}X^2 + A_{3,2}X^3$.

Q35 $\boxed{A_{n,0} = 1}$ car s'il n'y a aucune montée, c'est que les images par σ sont toujours décroissantes donc $(\sigma(1), \dots, \sigma(n)) = (n, n-1, \dots, 2, 1)$.

$\boxed{A_{n,n-1} = 1}$ car il y a $n-1$ montées donc $(\sigma(1), \dots, \sigma(n)) = (1, 2, \dots, n)$

$\boxed{A_{n,m} = 0 \text{ si } m \geqslant n}$ car on a vu le maximum avec $A_{n,n-1}$

Q36 On démarre comme dans l'exemple :

tirage 1 : B_0, suite $(0,1,0)$

tirage 2 : B_0, suite $(0,2,1,0)$. (on insère 2 à la 1ère montée)

tirage 3 : N_1, suite $(0,2,1,3,0)$ (— 3 — 2ème descente).

tirage 4 : N_0, suite $(0,2,4,1,3,0)$ (— 4 — 1ère descente)

tirage 5 : B_2, suite $(0,2,4,1,5,3,0)$. (— 5 — 3ème montée)

on obtient $\boxed{\sigma = (2,4,1,5,3)}$

Q37 On construit la suite du départ pour obtenir au final $(0,7,1,3,6,5,4,2,0)$

suite $(0,1,0) \Rightarrow$ tirage 1 : B_0.

suite $(0,1,2,0) \Rightarrow$ — 2 : N_0 (on a inséré 2 à la 1ère descente).

— $(0,1,3,2,0) \Rightarrow$ — 3 : B_1 (— 3 — 2ème montée)

$(0,1,3,4,2,0) \Rightarrow$: N_0 (1ère descente)

$(0,1,3,5,4,2,0) \Rightarrow$: B_2 (3ème montée)

$(0,1,3,6,5,4,2,0) \Rightarrow$: B_2

$(0,7,1,3,6,5,4,2,0) \Rightarrow$: B_0 (1ère montée)

$\boxed{\omega = (B_0, N_0, B_1, N_0, B_2, B_2, B_0)}$

Q38 Résumons : si on tire une boule blanche, on insère une valeur $a >$ aux autres valeurs lors d'une montée donc d'après Q33, on aura 1 descente de plus, ce qui correspond à une boule noire en plus dans l'urne

si on tire une boule noire, à l'aide de Q33..., on aura une montée de plus, et une boule blanche en plus dans l'urne

or après le tirage n° 1 on a une boule blanche et 1 boule noire et dans la suite $(0,1,0)$ on a 1 montée et une descente

donc il y aura p boules blanches s'il y a p montées dans la suite $(0,\sigma,0)$ or on enlève les 2 zéros donc il y a une montée en moins, donc p boules blanches correspond à $p-1$ montées dans ω, soit $\boxed{m+1 \text{ boules blanches pour } m \text{ montées}}$ {Vérif sur l'exo Q36}

Q39 $\operatorname{card} A_{n,m} = \operatorname{card} \text{“}B_{n,m+1}\text{”} = \operatorname{card}(X_n = m+1)$

$= P(X_n = m+1) \times \operatorname{card} \Omega_n$: on utilise Q32 et

Q14 avec $a_0 = 1$, $b_0 = 0$ et $s = 1$ $\operatorname{card} \Omega_n = 1 \times 2 \times \dots (1 + (n-1)) = n!$

$$\boxed{\operatorname{card} A_{n,m} = n! \times \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{n+1}{k} (m+1-k)^n}$$

Rem : le dénombrement de la partie V est plus élémentaire et plus “amusant” que celui de la partie III et IV