3*

$\boxed{\text{Centrale 2020 PSI}}$ (Un peu modifié) ①

I A)

Q1) : c'est le lemme des coalitions

$S_n = f(X_1, \dots, X_n)$ ind. de X_{n+1}.

Q2) $G_{X_1}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X_1 = n)\, t^n$

$= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-1/2} \frac{(1/2)^n}{n!} t^n = e^{-1/2} e^{t/2}$

d'où $\boxed{\forall t \in \mathbb{R} ;\ G_{X_1}(t) = e^{-\frac{1}{2} + t/2}}$

Q3) Récurrence sur n :

$n = 1$: oui.

Si c'est vrai pour n, $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$

et avec Q1, $G_{S_{n+1}}(t) = G_{S_n}(t) \times G_{X_1}(t) = G_{X_1}(t)^{n+1}$

d'où $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}\quad G_{S_n}(t) = (G_{X_1}(t))^n}$

Q4) On a donc $G_{S_n}(t) = e^{-n/2 + \frac{n}{2} t}$

Comme $G_X(t) = e^{-\lambda + \lambda t}$ si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$

d'où $\boxed{S_n \sim \mathcal{P}(n/2)}$

I B.

Q5.
$$n!\left(\frac{2}{n}\right)^n \mathbb{P}(S_n > n) = n!\left(\frac{2}{n}\right)^n \sum_{i=n+1}^{\infty} e^{-n/2} \frac{(n/2)^i}{i!}$$

$$= e^{-n/2} \sum_{i=n+1}^{\infty} n! \frac{(n/2)^{i-n}}{i!} \qquad \text{cdV (bijectif) } i = n+k$$

$$= e^{-n/2} \sum_{k=1}^{\infty} n! \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^k}{(n+k)!}$$

d'où $\boxed{n!\left(\frac{2}{n}\right)^n \mathbb{P}(S_n > n) = e^{-n/2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n!\, n^k}{(n+k)!} \left(\frac{1}{2}\right)^k}$

Q6. analyse
$$\left(\frac{n}{n+k}\right)^k \leq \frac{n!\, n^k}{(n+k)!} \leq 1$$

$$\iff \left(\frac{1}{n+k}\right)^k \leq \frac{n!}{(n+k)!} \leq \frac{1}{n^k}$$

$$\iff n^k \leq \frac{(n+k)!}{n!} \leq (n+k)^k$$

Synthèse : $\ast$
$$\frac{(n+k)!}{n!} = (n+1) \cdots (n+k) \geq \underbrace{n \times n \cdots \times n}_{k \text{ fois}}$$
$$\geq n^k$$

donc
$$\frac{n!\, n^k}{(n+k)!} \leq 1$$

3

$$* \quad \frac{(n+k)!}{n!} \leq \overbrace{(n+k)\cdots(n+k)}^{k \text{ fois}} = (n+k)^k$$

donc $\left(\frac{n}{n+k}\right)^k \leq \frac{n!\,n^k}{(n+k)!}$ d'où $\boxed{\left(\frac{n}{n+k}\right)^k \leq \frac{n!\,n^k}{(n+k)!} \leq 1}$

Q7. $\forall x \in [0,+\infty[,\ \forall k \in \mathbb{N}^*$

$$|u_k(x)| \leq \frac{1}{2^k}\frac{1}{(1+kx)^k} \leq \frac{1}{2^k} = \alpha_k$$

$(\sum \alpha_k)$ cvg d'où $\left(\|u_k\|_{\infty,[0,+\infty[} \leq 1/2^k\right)$:

$\boxed{(\sum u_k)_{k\geq 1} \text{ cvg normalement sur } \mathbb{R}^+.}$

Q8. $\left(1+\frac{k}{n}\right)^{-k}\frac{1}{2^k} = u_k\left(\frac{1}{n}\right)$, comme C.N. $\Rightarrow$ C.S,

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* : \left(\sum \left(1+\frac{k}{n}\right)^{-k}\frac{1}{2^k}\right) \text{ cvg (ds } \mathbb{R})}$

Si on pose $S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$, on cherche la limite de $S\left(\frac{1}{n}\right)$ lorsque n tend vers l'infini. Comme u_k est continue sur $[0,+\infty[$ par TG et que $(\sum u_k)$ C.N. sur $[0,+\infty[$, on a par le critère séquentiel

$$\lim_{n\to\infty} S(1/n) = S(0) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-1/2} = 1$$

d'où $\boxed{\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(1+\frac{k}{n}\right)^{-k} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1}$

Q9 $\forall n \geqslant 1$:

avec Q6

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+k}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^k \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n!\, n^k}{(n+k)!} \left(\frac{1}{2}\right)^k \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1$$

(les 3 séries cvg par TC et $\left(\sum \frac{1}{2^k}\right)$ cvg)

donc $0 \leqslant S(1/n) \leqslant e^{n/2}\, n! \left(\frac{2}{n}\right)^n P(S_n > n) \leqslant 1$

Q8 → 1, T.E. → 1

d'où $\boxed{P(S_n > n) \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^{-n/2}}{n!} \left(\frac{n}{2}\right)^n}$

Q10 $P(S_n > n) \sim \frac{e^{-n/2}}{\left(n/e\right)^n \sqrt{2\pi n}} \left(\frac{n}{2}\right)^n \sim \frac{e^{n/2}}{2^n} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$

$$\sim \left(\frac{\sqrt{e}}{2}\right)^n \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \underset{+\infty}{=} o(\alpha^n) \quad \text{avec } \alpha = \frac{\sqrt{e}}{2}$$

Comme $e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$

$\leqslant 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots$ — si $n! \geqslant 2^{n-1}$, $(n+1)! \geqslant 2^{n-1} \times 2$

$\leqslant 3$ d'où $0 < \alpha \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$

d $\boxed{\text{avec } \alpha = \frac{\sqrt{e}}{2}, \ P(S_n > n) = o(\alpha^n)}$

II A

Q11. Si $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $A = (a_{i,j})$

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11} x_1 + \cdots + a_{1n} x_n \\ \vdots \\ a_{n1} x_1 + \cdots + a_{nn} x_n \end{pmatrix}$$

$\forall i,j \ a_{i,j} > 0$
et $\exists i_0 \mid x_{i_0} > 0$ si $x \neq 0$
$\Rightarrow (Ax)_i \geq a_{i,i_0} x_{i_0} > 0$

d'où $\boxed{x \geq 0 \Rightarrow Ax \geq 0 \quad \text{et} \quad x > 0 \Rightarrow Ax > 0}$

Q12. Par récurrence : $k=1$; oui et si $A^k > 0$

$$A^{k+1} = A^k A = \Big(\sum_{\alpha=1}^{n} \underbrace{\underbrace{b_{i,\alpha}}_{>0} \underbrace{a_{\alpha j}}_{>0}}_{>0} \Big) \quad \text{avec } A^k = (b_{i,j})$$

d'où $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^* \ A^k > 0}$

Q13. * Si $\rho(A) = 0$, alors $\operatorname{sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{0\}$ d'où $\chi_A = X^n$

et avec C.H. : $A^n = (0)$ absurde car $A^n > 0$

d'où $\boxed{\rho(A) > 0}$

* Si $\alpha \in \mathbb{C}^*$ λ val propre de $A \Leftrightarrow \alpha\lambda$ val p. de αA.

⑥

d'où si $\rho(A) = |\lambda_0|$ alors $\frac{\lambda_0}{\rho(A)}$ vp de $\frac{1}{\rho(A)} A$
(λ_0 vp de A)

et $\left|\frac{\lambda_0}{\rho(A)}\right| = 1$. Si λ vp de $\frac{A}{\rho(A)}$, $\rho(A)\lambda$ vp de A donc $|\rho(A)\lambda| \leq \rho(A) \Rightarrow |\lambda| \leq 1$

d'où $\boxed{\rho\left(\frac{A}{\rho(A)}\right) = 1}$ (et $\frac{\lambda_0}{\rho(A)}$ vp de $\frac{A}{\rho(A)}$)

Q14. * $\exists P \in GL_n(\mathbb{C}), \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n \setminus$

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1} \quad \text{et } \forall i \in [\![1,n]\!] : |\lambda_i| \leq \rho(A) < 1$$

$$A^k = P \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix} P^{-1} \xrightarrow[k \to \infty]{TG} P \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$$

d'où $\boxed{\lim_{k \to \infty} A^k = (0)}$

<u>Remarque:</u> Plus précis que TG : $M \longmapsto PMP^{-1}$ C^0 car linéaire en dim. finie que l'on applique avec le critère séquentiel à $\begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$ qui tend vers (0).

* Soit $\varepsilon > 0 \setminus \rho(A) + \varepsilon = q < 1$ $\left(\varepsilon = \frac{1-\rho(A)}{2}\right)$

Avec la norme N_Σ admise :

$$0 \leq N_\Sigma(A^k) \leq N_\Sigma(A)^k \leq q^k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \text{ , par T.E. :}$$

d'où $\boxed{A^k \xrightarrow[k\to\infty]{} (0)}$

II B-

Q15 Posons $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $Ax = \lambda x$ donc

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n = \lambda x_1 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \cdots + a_{n,n}x_n = \lambda x_n \end{cases} \quad (|\lambda| = 1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |\lambda x_1| = |x_1| \leq |a_{1,1}||x_1| + \cdots + |a_{1,n}||x_n| = y_1 \\ \vdots \\ |\lambda x_n| = |x_n| \leq |a_{n,1}||x_1| + \cdots + |a_{1,n}||x_n| = y_1 \end{cases}$$

Comme $A > 0$, $|A| = A$ et $A|x| = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} |x_1| \\ \vdots \\ |x_n| \end{pmatrix} = |x|$

d'où $\boxed{|x| \leq A|x|}$

Q16. On a donc $z = A|x| - |x| \geq 0$ et $z \neq 0$, d'où

avec la Q_{11}, $Az = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} > 0$

Exercice 2

1. (a) Si $M = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{pmatrix}$ alors $M^T = \begin{pmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{pmatrix}$. On en déduit que $\boxed{M^T M = \begin{pmatrix} v_1^T v_1 & \cdots & v_1^T v_n \\ \vdots & & \vdots \\ v_n^T v_1 & \cdots & v_n^T v_n \end{pmatrix}}$.

   (b) Rappel le produit scalaire dans une base orthonormée s'exprime matriciellement par $< x, y >= X^T Y$.

   En conséquence si $v_1, \ldots, v_n$ sont deux à deux orthogonaux, $v_i^T v_j = \begin{cases} \|v_i\|^2 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et donc

   $M^T M = \begin{pmatrix} \|v_1\|^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \|v_n\|^2 \end{pmatrix}$ et donc $\det(M^T M) = \|v_1\|^2 \cdots \|v_n\|^2$.

   Or $\det(M^T M) = \det(M^T)\det(M) = \det(M)^2$, <u>**conclusion**</u>: $\boxed{|\det M| = \|v_1\| \cdots \|v_n\|}$

2. Si $M = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$, alors $M^T M = \begin{pmatrix} a_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n^2 \end{pmatrix}$ et comme on veut $M^T M = I_n$, on en déduit que pour tout i , $a_i = \pm 1$.

   <u>**Conclusion**</u>: Les matrices diagonales et orthogonales sont de la forme : $M = \begin{pmatrix} \pm 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \pm 1 \end{pmatrix}$

3.
```
def H(n,C): # C est la liste des colonne de la matrice
    for j in range(n):
        for i in range(n):
            if C[j][i]!=1 and C[j][i]!=-1:
                return 0
    for j in range(n-1):
        for k in range(j+1,n):
            s=0
            for i in range(n):
                s=s+C[j][i]*C[k][i]
            if s!=0:
                return 0
    return 1
```
```
Exemples de matrices:
M2=[[1,1],[1,-1]]
M3=[[1,1,1],[1,1,1],[1,1,1]]
M4=[[1,-1,1,-1],[1,-1,-1,1],[-1,-1,-1,-1],[1,1,-1,-1]]

In [2]: H(2,M2)
Out[2]: 1

In [3]: H(3,M3)
Out[3]: 0

In [4]: H(4,M4)
Out[4]: 1
```

4. (a) Soit v un vecteur colonne de M, $v = \begin{pmatrix} \pm 1 \\ \vdots \\ \pm 1 \end{pmatrix}$ donc $\|v\| = \sqrt{1 + \cdots + 1}$.

   <u>**Conclusion**</u>: $\boxed{\|v\| = \sqrt{n}}$

   (b) D'après la question 1.(b), on a : $\boxed{|\det M| = (\sqrt{n})^n = n^{n/2}}$

5. On a $< v_1, v_i >= \sum_{j=1}^{n} m_{j,i} = \sum_{j=1, m_{j,i}=1}^{n} m_{j,i} + \sum_{j=1, m_{j,i}=-1}^{n} m_{j,i} = 0$. Comme les $m_{j,i}$ valent tous ± 1, on conclut : $\boxed{\text{Le nombre de } m_{j,i} \text{ égaux à 1 est égal au nombre de } m_{j,i} \text{ égaux à } -1}$

6. Soit $M = (m_{i,j})$ une matrice de $\mathcal{H}_n$. Considérons la matrice $U = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$ avec pour tout j : $a_j = \pm 1$ et posons $M_0 = UM = \begin{pmatrix} a_1 m_{1,1} & \cdots & a_1 m_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_n m_{n,1} & \cdots & a_n m_{n,n} \end{pmatrix}$.

Montrons que $UM \in \mathcal{H}_n$

- Ses coefficients sont dans $\{-1, 1\}$ ($a_i m_{i,j} = \pm 1 \times \pm 1 = \pm 1$).
- $(UM)^T UM) = M^T (U^T U) M = M^T M$ car d'après le 2. , U est orthogonal.

D'après le 1. , on en déduit que les vecteurs colonnes de UM sont 2 à 2 orthogonaux : si on note $v_1, \ldots, v_n$ les colonnes de M et $v'_1, \ldots, v'_n$ les colonnes de UM alors pour tout $i \neq j$:

$< v'_i, v'_j >=< v_i, v_j >= 0$.

Il suffit pour finir de prendre pour tout i : $a_i = m_{i,1}$ de sorte que la première colonne de $M_0 = UM$ est le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

Conclusion: $\boxed{\text{Il existe une matrice dans } \mathcal{H}_n \text{ qui a pour première colonne le vecteur } \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}}$.

7. Si $\mathcal{H}_n$ est non vide avec le 6. , il existe une matrice dans $\mathcal{H}_n$ qui a pour première colonne le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ et avec le 5. la deuxième colonne a autant de termes égaux à 1 que de termes égaux à -1.

Conclusion: $\boxed{\text{Si } \mathcal{H}_n \text{ est non vide alors sa dimension doit être paire}}$

8. (a) $\det(M_0) = \begin{vmatrix} 1 & m_{1,2} & \cdots & m_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & m_{n,2} & \cdots & m_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & m_{1,2} - 1 & \cdots & m_{1,n} - 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & m_{n,2} - 1 & \cdots & m_{n,n} - 1 \end{vmatrix}$

en effectuant les opérations $C_j \longleftarrow C_j - C_1$ pour tout $j \in [\![2, n]\!]$

Or pour tout i et $j \geqslant 2$: $m_{i,j} - 1 \in \{0, -2\}$

On en déduit que $\det(M_0) = \begin{vmatrix} 1 & 2k_{1,2} & \cdots & 2k_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2k_{n,2} & \cdots & 2k_{n,n} \end{vmatrix}$ avec $k_{i,j} \in \mathbb{Z}$.

Par linéarité, on peut factoriser chaque colonne, de 2 à n, par 2 d'où

$\det(M_0) = 2^{n-1} \begin{vmatrix} 1 & k_{1,2} & \cdots & k_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & k_{n,2} & \cdots & k_{n,n} \end{vmatrix} = 2^{n-1} K$ avec $K \in \mathbb{Z}$ car le déterminant se calcul uniquement à l'aide de produits, sommes et différences de ses coefficients.

Conclusion: $\boxed{\det(M_0) \text{ est un entier relatif multiple de } 2^{n-1}}$.

(b) Si $\mathcal{H}_n$ est non vide, avec le 7. , $n = 2p$ est pair.

Avec le 4. (b) et le 8. (a) , on a : $\det(M_0) = n^{n/2} = (2p)^p = 2^{n-1}K$.
On en déduit que $p^p = 2^{p-1}K$ et comme $n > 2$ et pair $n \geqslant 4$ et donc $p \geqslant 2$ d'où $p-1 \geqslant 1$.
On a donc p^p qui est pair d'où p est pair : $p = 2q$ et $n = 4q$.
Conclusion: $\boxed{n \text{ est un entier naturel multiple de } 4}$

Exercice 3

1. (a) Pour tout événement ω , $U_2(\omega) = |\{X_1(\omega), X_2(\omega)\}|$ et selon que $X_1(\omega)$ et $X_2(\omega)$ soient égaux ou non , on a : $U_2(\omega) = 1$ ou $U_2(\omega) = 2$, **conclusion**: $\boxed{U_2(\Omega) = \{1, 2\}}$

   (b) On a : $P(U_2 = 1) = P(X_1 = X_2) = \displaystyle\sum_{i=1}^{\ell} P(X_1 = i, X_2 = i) = \sum_{i=1}^{\ell} (\frac{1}{\ell})^2$ par indépendance de X_1 et X_2. **Conclusion**: $\boxed{P(U_2 = 1) = \dfrac{1}{\ell}}$

   Avec le (a), on en déduit que $\boxed{P(U_2 = 2) = 1 - \dfrac{1}{\ell}}$

   (c) On a $\mathbf{E}(U_2) = 1 \times \dfrac{1}{\ell} + 2 \times (1 - \dfrac{1}{)}\ell = 2 - \dfrac{1}{\ell}$ d'où : **conclusion**: $\boxed{\mathbf{E}(U_2) = 2 - \dfrac{1}{\ell}}$

2. (a)
```
from random import *
def simulU():
    T=[]
    for i in range(10):
        t=randint(1,25)
        if t not in T:
            T.append(t)
    return len(T)

def simulUbis(): # autre version possible de simulU
    S={randint(1,25) for i in range(10)}
    return len(S)
```
   (b)
```
def espU(nb_simulation):
    s=0
    for i in range(nb_simulation):
        s=s+simulU()
    return s/nb_simulation
```

   Le théorème qui justifie cela est la loi faible des grands nombres. Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de **VADR 2 à 2 indépendantes** sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. On suppose que les **VADR** suivent toutes la loi de U_{10} . Posons $S_n = Y_1 + \cdots + Y_n$, $m = \mathbf{E}(U_{10})$ et $\sigma = \sigma(U_{10})$. On a , avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev : $\forall \varepsilon > 0$, $\mathbf{P}\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \dfrac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$.

   On en déduit que : $\forall \varepsilon > 0$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0$.

3. On a $\boxed{U_n(\Omega) = \{1, \ldots, \min(n, \ell)\}}$

4. On a : $(X_i \in S) = \displaystyle\bigcup_{s\in S} (X_i = s)$ (réunion disjointe) , comme $P(X_i = s) = \dfrac{1}{\ell}$ (loi uniforme) on conclut :
   $\boxed{P(X_i \in S) = \dfrac{|S|}{\ell}}$

5. On a : $(X_1 \neq a, \ldots, X_{n-1} \neq a) = \displaystyle\bigcap_{i=1}^{n-1} (X_i \neq a)$ et comme les X_i sont indépendantes, on conclut à l'aide du 4. pour $S = \{1, \ldots, \ell\} - \{a\}$: $\boxed{P(X_1 \neq a, \ldots, X_{n-1} \neq a) = \left(\dfrac{\ell - 1}{\ell}\right)^{n-1}}$

6. Appliquons la formule des probas totales avec le système complet $(X_n = a)_{a\in\{1,\dots,\ell\}}$:

$$P(X_1 \neq X_n, \dots, X_{n-1} \neq X_n) = \sum_{a=1}^{\ell} P\Big((X_1 \neq X_n, \dots, X_{n-1} \neq X_n)\Big/ X_n = a\Big) P(X_n = a)$$

$= \sum_{a=1}^{\ell} P(X_1 \neq a, \dots, X_{n-1} \neq a / X_n = a) = \sum_{a=1}^{\ell} P(X_1 \neq a, \dots, X_{n-1} \neq a) P(X_n = a)$ car $(X_1, \dots, X_{n-1})$ et X_n sont indépendants.

On a donc $P(X_1 \neq X_n, \dots, X_{n-1} \neq X_n) = \sum_{a=1}^{\ell} \Big(\frac{\ell - 1}{\ell}\Big)^{n-1} \times \frac{1}{\ell} = \Big(\frac{\ell - 1}{\ell}\Big)^{n-1} \times \frac{\ell}{\ell}$.

<u>**Conclusion**</u>: $\boxed{P(X_1 \neq X_n, \dots, X_{n-1} \neq X_n) = \Big(\frac{\ell - 1}{\ell}\Big)^{n-1}}$

7. On a $(X_1 \neq X_n, \dots, X_{n-1} \neq X_n) = \bigcup_{S \in \mathcal{P}_\ell} \Big(\{X_1, \dots, X_{n-1}\} = S\Big) \cap (X_n \notin S)$ (réunion disjointe), donc

$P(X_1 \neq X_n, \dots, X_{n-1} \neq X_n) = \sum_{S \in \mathcal{P}_\ell} P\Big((\{X_1, \dots, X_{n-1}\} = S) \cap (X_n \notin S)\Big)$.

Avec le lemme des coalitions , $(\{X_1, \dots, X_{n-1}\} = S)$ et $(X_n \notin S)$ sont indépendants, on en déduit que $P(X_1 \neq X_n, \dots, X_{n-1} \neq X_n) = \sum_{S \in \mathcal{P}_\ell} P\Big(\{X_1, \dots, X_{n-1}\} = S\Big) P\Big((X_n \notin S)\Big)$.

On conclut avec le 4. :

$$\boxed{P(X_1 \neq X_n, \dots, X_{n-1} \neq X_n) = \sum_{S \in \mathcal{P}_\ell} P\Big(\{X_1, \dots, X_{n-1}\} = S\Big)\Big(\frac{\ell - |S|}{\ell}\Big)}$$

8. On partitionne $\mathcal{P}_\ell$ à cardinal constant :

$$\sum_{S \in \mathcal{P}_\ell} P\Big(\{X_1, \dots, X_{n-1}\} = S\Big)\Big(\frac{\ell - |S|}{\ell}\Big) = \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{S \in \mathcal{P}_\ell, |S| = k} P\Big(\{X_1, \dots, X_{n-1}\} = S\Big)\Big(\frac{\ell - k}{\ell}\Big)$$

or $\sum_{S \in \mathcal{P}_\ell, |S| = k} P\Big(\{X_1, \dots, X_{n-1}\} = S\Big) = P(U_{n-1} = k)$. On a donc

$$\sum_{S \in \mathcal{P}_\ell} P\Big(\{X_1, \dots, X_{n-1}\} = S\Big)\Big(\frac{\ell - |S|}{\ell}\Big) = \sum_{k=1}^{\ell} P(U_{n-1} = k)\Big(\frac{\ell - k}{\ell}\Big)$$

$$= \sum_{k=1}^{\ell} P(U_{n-1} = k)\Big(1 - \frac{k}{\ell}\Big) = \sum_{k=1}^{\ell} P(U_{n-1} = k) - \frac{1}{\ell}\sum_{k=1}^{\ell} k P(U_{n-1} = k) = 1 - \frac{1}{\ell}\mathbf{E}(U_{n-1}).$$

Avec le 7. , on a donc $1 - \frac{1}{\ell}\mathbf{E}(U_{n-1}) = P(X_1 \neq X_n, \dots, X_{n-1} \neq X_n)$.

<u>**Conclusion**</u>: $\boxed{\mathbf{E}(U_{n-1}) = \ell(1 - P(X_1 \neq X_n, \dots, X_{n-1} \neq X_n))}$

9. Avec le 6. et le 8., on a directement que $\mathbf{E}(U_{n-1}) = \ell\Big(1 - (1 - \frac{1}{\ell})^{n-1}\Big)$ d'où en décalant :

<u>conclusion</u>: $\boxed{\mathbf{E}(U_n) = \ell\Big(1 - (1 - \frac{1}{\ell})^n\Big)}$

10. La suite géométrique $((1 - \frac{1}{\ell})^n)$ est de raison q avec $0 < q < 1$, on en déduit immédiatement : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbf{E}(U_n) = \ell}$.

Si n est très grand par rapport à ℓ alors pour chaque valeur de $[\![1, \ell]\!]$ l'une des X_i prendra cette valeur et donc toutes les valeurs de $[\![1, \ell]\!]$ seront atteintes et on aura $U_n = \ell$ presque à chaque tirage.

11. De l'équivalent $1 - (1 - x)^\alpha \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x$, on en déduit que $\mathbf{E}(U_n) \underset{\ell\to+\infty}{\sim} \ell \times \frac{n}{\ell}$. On en conclut :

$\boxed{\lim_{\ell\to+\infty} \mathbf{E}(U_n) = n}$

Si ℓ est très grand face à n , les $X_1, \dots, X_n$ se placeront sur n valeurs du grand intervalle $[\![1, \ell]\!]$ et ces valeurs seront certainement 2 à 2 distinctes.

12. (a) Ici $\ell = 365$ et la i-ème personne est représentée par la variable X_i. Le nombre moyen de dates d'anniversaire d'un groupe de n personnes est donc U_n avec $\ell = 365$.

Conclusion: $\boxed{\text{Ce nombre moyen est donc égal à } \mathbf{E}(U_n) = 365\left(1 - (\frac{364}{365})^n\right)}$

(b) On a immédiatement avec le 10. , $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbf{E}(U_n) = 365}$.

Mines MP 2009 (1)

A 1) Posons $g(t,x) = e^{itx} f(x)$ définie sur $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. g admet des dérivées à tout ordre % à t et $\forall k \in \mathbb{N}^*$ $\frac{\partial^k g}{\partial t^k}(t,x) = (ix)^k e^{itx} f(x)$

On a :

i) $g(\cdot, x)$ et $\forall k \geq 1$ $\frac{\partial^k g}{\partial t^k}(\cdot, x)$ sont $C^0 / \mathbb{R}$ par TG. $\forall x \in \mathbb{R}$

ii) $g(t,\cdot)$ et —— $\frac{\partial^k g}{\partial t^k}(t,\cdot)$ sont C^0/mcx $\mathbb{R}$ par TG $\forall t \in \mathbb{R}$

ii)' $g(t,\cdot)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ car f admet un moment d'ordre 0

iii) $\forall x \in \mathbb{R}$ $\forall t \in \mathbb{R}$ $\left|\frac{\partial^k g}{\partial t^k}(t,x)\right| = |x^k f(x)| = \varphi(x)$
$\forall k \geq 1$

φ int/$\mathbb{R}$ car f admet un moment d'ordre k.

2

Par th. de dérivation $\boxed{\phi_f \text{ est } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R}}$

et $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \mathbb{R} \quad \phi_f^{(k)}(t) = \int_{\mathbb{R}} (ix)^k e^{itx} f(x)\,dx}$

2) ITL pour la fonction $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$

$$x \longmapsto e^{ix}$$

$$\left| e^{ix} - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(ix)^m}{m!} \right| \leq \frac{|ix|^n}{n!} \sup_{t \in [0,x]} |\varphi^{(n)}(t)|$$

Or $\varphi^{(n)}(t) = i^n e^{it}$ donc $\sup(\ldots) = 1$

d'où : $\boxed{\left| e^{ix} - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(ix)^m}{m!} \right| \leq \frac{|x|^n}{n!}}$

3) Par TG, $h_{a,b}$ est C^0 sur $\mathbb{R}^*$

Effectuons le DL de $h_{a,b}$ à 0 :

$$h_{a,b}(t) = \frac{1 - ita - 1 + itb + o(t)}{it} = b - a + o(1) \xrightarrow[t \to 0]{} b - a = h_{a,b}(0)$$

d' : $\boxed{h_{a,b} \text{ est } C^0 \text{ sur } \mathbb{R}}$ (3)

4) Appliquons l'inégalité des AF à $\varphi : x \mapsto e^{-itx}$:

$\forall t \neq 0 \quad |e^{-ita} - e^{-itb}| = |\varphi(a) - \varphi(b)| \leq |b-a| \sup\limits_{x \in]a,b[} |\varphi'(x)|$

or $|\varphi'(t)| = |-ite^{-itx}| = |t|$ d'où l'inégalité voulue.

Comme elle vraie aussi si $t = 0$, on conclut :

d' : $\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \quad |h_{a,b}(t)| \leq b-a}$

5) $\forall k \geq 0 \quad e^k = 1 + \frac{k}{1!} + \frac{k^2}{2!} + \cdots + \frac{k^k}{k!} + \frac{k^{k+1}}{(k+1)!} + \cdots$

d' : $\boxed{e^k \geq \frac{k^k}{k!}}$ car tout est positif

B] 6) $\frac{\sin \theta t}{t} \underset{t \to 0}{\sim} \theta$ donc PPC en 0 d'où R & S sont définis.

On effectue le CdV $\left| \begin{array}{l} x = \theta t \\ \text{avec } \theta \neq 0 \end{array} \right.$ ds R :

$$R(\theta,T)=\int_{-\theta T}^{\theta T}\frac{\sin x}{x/\cancel{\theta}}\,\frac{dx}{\cancel{\theta}}=2\int_0^{\theta T}\frac{\sin x}{x}\,dx \quad \text{par parité}$$

d'où : $\boxed{R(\theta,T)=2S(\theta T)\ (\theta\neq 0)\ (\text{valable aussi si } \theta=0)}$

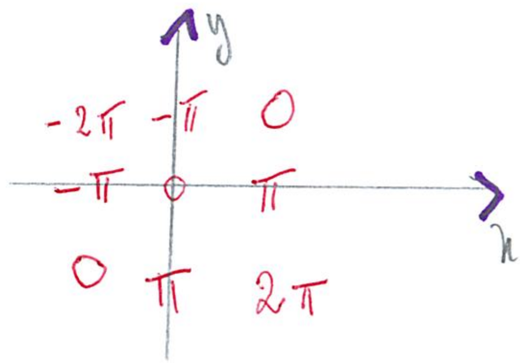
7) $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad R(x,T)-R(y,T)=2\left[S(xT)-S(yT)\right]$

Or $\lim\limits_{T\to+\infty} S(T)=\frac{\pi}{2}$ et par parité $\lim\limits_{T\to+\infty} S(-T)=-\frac{\pi}{2}$

Si on pose $l_{x,y}=\lim\limits_{T\to+\infty} R(x,T)-R(y,T)$, on a :

x \ y	<0	$=0$	>0
<0	0	$-\pi$	-2π
$=0$	π	0	$-\pi$
>0	2π	π	0

ou



8) $\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} h_{a,b}(t)\,\phi_f(t)\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} h_{a,b}(t)\left(\int_{\mathbb{R}} e^{itx} f(x)\,dx\right)dt$

Considérons $F(t,x)=\frac{1}{2\pi}\,h_{a,b}(t)\,e^{itx} f(x)$

Montrons que F est intégrable sur $[-T,T] \times \mathbb{R}$

- F est C^0 sur $[-T,T] \times \mathbb{R}$ par TG, 3) et 1).
- $|F(t,x)| \leq \frac{b-a}{2\pi} f(x)$ ($f \geq 0$ car $\underline{f \in E}$)

$t \longmapsto |F(t,x)|$ est intégrable sur $[-T,T]$ (car C^0)

et $$g(x) = \int_{-T}^{T} |F(t,x)| dt \leq \frac{b-a}{2\pi} 2T f(x)$$

d'où par TC, g est intégrable sur $\mathbb{R}$ ($f \in E$)

d'où f est intégrable sur $[-T,T]$ et on peut utiliser le théorème de Fubini ;

$$G(T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} h_{a,b}(t) \phi_f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{-T}^{T} h_{a,b}(t) e^{itx} f(x) dt\, dx$$

Or $$\int_{-T}^{T} h_{a,b}(t) e^{itx} dt = \int_{-T}^{T} \frac{e^{it(x-a)} - e^{it(x-b)}}{it} dt$$

$$= \int_{-T}^{T} \left(\left[\frac{\cos t(x-a) - \cos t(x-b)}{it} \right] + \left[\frac{\sin t(x-a) - \sin t(x-b)}{t} \right] \right) dt$$

Comme $|h_{a,b}(t)e^{itx}| \leq b-a$, $t \mapsto h_{a,b}(t)e^{itx}$ est int. sur $[-T,T]$ d'où ses parties réelles et imaginaires le sont aussi : on peut éclater l'intégrale. Comme la partie réelle est impaire, son intégrale est nulle sur $[-T,T]$ d'où

$$\int_{-T}^{T} h_{a,b}(t)e^{itx}\,dt = R(x-a,T) - R(x-b,T) \quad \text{et}$$

$$G(T) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \left[R(x-a,T) - R(x-b,T)\right] f(x)\,dx$$

Utilisons le critère séquentiel avec la cvg dominée.

Soit $T_n \longrightarrow +\infty$, posons

$$f_n(x) = \frac{1}{2\pi}\left(R(x-a,T_n) - R(x-b,T_n)\right) f(x)$$

· $$f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \begin{cases} 0 & \text{si } x>b \text{ ou si } x<a \\ f(x) & \text{si } x\in\,]a,b[\\ f(a)/2 \text{ si } x=a & \text{et } f(b)/2 \text{ si } x=b \end{cases}$$

(7)

cq (f_n) cvg simplement sur $\mathbb{R}$ vers

$$\tilde{f} : x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x > b \text{ ou } x < a \\ f(x) & \text{si } x \in]a, b[\\ f(x)/2 & \text{si } x = a \text{ ou } b \end{cases}$$

* par TG, f_n & $\tilde{f}$ sont $C^0/_{ma}$ sur $\mathbb{R}$.

* $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$

$$\left| \left(R(x-a, T_n) - R(x-b, T_n)\right) f(x) \right|$$

$$= \left(\left|2 S((x-a)T_n)\right| + 2 \left|S((x-b)T_n)\right| \right) f(x)$$

Comme S cvg (vers $\pi/2$) en $+\infty$ et est $C^0/\mathbb{R}^+$, on en déduit qu'elle est bornée : $\exists M \in \mathbb{R} \mid \forall T \in \mathbb{R}^+$:

$|S(T)| \leq M$ d'où $|f_n(x)| \leq \dfrac{4M}{2\pi} f(x) = \varphi(x)$

et φ intégrable $/\mathbb{R}$ car $f \in E$

d'où :

$$\boxed{\lim_{T \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} h_{a,b}(t) \, \phi_f(t) \, dt = \int_{\mathbb{R}} \tilde{f} = \int_a^b f}$$

9) On a donc $\forall a<b \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b g(t)\,dt$

d'où $\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x g(t)\,dt$

Comme f et g sont de E, elles sont continues sur $\mathbb{R}$ et F est C^1 sur $\mathbb{R}$ avec :

$\forall x \in \mathbb{R} \quad F'(x) = f(x) = g(x)$ d'où : $\boxed{f = g}$

C 10) f_0 est définie sur $\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} f_0(x) = 0$ et $\ln\left[\dfrac{\exp\left(-\frac{(\ln x)^2}{2}\right)}{x}\right] = -\dfrac{(\ln x)^2}{2} - \ln x$

$\underset{0}{\sim} \dfrac{-(\ln x)^2}{2} \xrightarrow[x \overset{>}{\to} 0]{} -\infty$

donc $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} f_0(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f_0(x) = 0 = f_0(0)$: f_0 est C^0 en 0

et par TG, elle l'est sur $\mathbb{R}$. Elle est positive $/\mathbb{R}$

$\forall X > a > 0 : \int_a^X f_0 \underset{\uparrow}{=} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\ln a}^{\ln X} e^{-u^2/2}\,du \xrightarrow[\substack{X \to \infty \\ a \to 0}]{} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2/2}\,du \underset{\uparrow}{=} 1$

cdv $u = \ln x$, $du = \dfrac{dx}{x}$

avec $\lambda = 0$ dans la formule admise

Mines Pont 2 - MP - 2005

Problème I

1). f et g_n sont C^2 sur $\mathbb{R}^2$ (TG) et $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\Delta f(x,y) = e^{iy} e^{x} + i^2 e^{x} e^{iy} = 0$$

$$\Delta g_n(x,y) = n(n-1)(x+iy)^{n-2} + n(n-1)\, i^2 (x+iy)^{n-2} = 0$$

d $\boxed{f \text{ et } g_n \text{ sont harmoniques sur } \mathbb{R}^2}$

2) Par TG, h est C^2 sur $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ et $\forall (x,y) \in U$

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\, u'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,y) = \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right) u'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) + \frac{x^2}{(x^2+y^2)}\, u''\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

par symétrie on a de même :

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(x,y) = \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right) u'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) + \frac{y^2}{x^2+y^2}\, u''\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

donc $\Delta h(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\, u'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) + u''\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) = 0$

Comme $(x,y) \longmapsto \sqrt{x^2+y^2}$ est surjective de U dans $]0,+\infty[$

2

h est harmonique sur $U \iff \forall t>0 \quad \underline{\frac{1}{t}u'(t)+u''(t)=0}$

posons $y=u'$ donc $y'+\frac{1}{t}y=0$ soit $\exists \lambda\in\mathbb{R} \mid \forall t>0 \quad y(t)=\lambda e^{-\ln t}$
$=\frac{\lambda}{t}$

donc $u'=\frac{\lambda}{t}$ soit $\exists \mu\in\mathbb{R} \mid \forall t>0 \quad u(t)=\lambda\ln t+\mu$

$\underline{\text{cl}}$ $\boxed{h \text{ harmonique sur } U \iff \exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2 \mid \forall t>0 : u(t)=\lambda\ln t+\mu}$

3) k $C^2/U=\mathbb{R}^2-yOy$ par TG et $\forall(x,y)\in U$

$$\Delta k(x,y)=\frac{2y}{x^3}v'\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y^2}{x^4}v''\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{x^2}v''\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$=\frac{1}{x^2}\left[2\frac{y}{x}v'\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y^2}{x^2}v''\left(\frac{y}{x}\right)+v''\left(\frac{y}{x}\right)\right]$$

Comme $(x,y)\longmapsto\frac{y}{x}$ est surjective de U dans $\mathbb{R}$,

h est harmonique sur $U \iff \forall t\in\mathbb{R} : 2t\,v'(t)+(t^2+1)v''(t)=0$

On remarque que $(t^2+1)'=2t$ donc :

h est harmonique sur $U \iff \forall t\in\mathbb{R} : \left[(t^2+1)v'(t)\right]'=0$

$$\iff \exists\lambda\in\mathbb{R} \mid \forall t\in\mathbb{R} \quad v'(t)=\frac{\lambda}{t^2+1}$$

$\underline{\text{cl}}$ $\boxed{h \text{ harmonique sur } U \iff \exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2 \mid \forall t\in\mathbb{R} \quad v(t)=\lambda\operatorname{Arctan} t+\mu}$

③

4) Comme K est borné $\exists M \in \mathbb{R} \mid \forall (x,y) \in K : \|(x,y)\|_\infty \leq M$

d'où $\forall (x,y) \in K \quad |u_n(x,y)| \leq \dfrac{(M+M)^n}{(2n)!} = \dfrac{2^n M^n}{(2n)!} = \alpha_n$

Comme (par exemple !) $\alpha_n = o\left(\dfrac{(2M)^n}{(4M)^n}\right)$ car $(4M)^n << (2n)!$ (C.C.)

on a $\alpha_n = o\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$ et par TC, $(\sum \alpha_n)$ converge

d $\boxed{(\sum u_n/_K) \text{ converge normalement donc unif. sur } K}$

Comme par TG, u_n est C^0 sur $\mathbb{R}^2$, par l'extension du thm de continuité, $\boxed{\varphi \text{ est définie et continue sur } \mathbb{R}^2}$

5) $\dfrac{\partial u_n}{\partial x}(x,y) = (-1)^n \dfrac{n(x+iy)^{n-1}}{(2n)!}$ et $\dfrac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}(x,y) = (-1)^n \dfrac{n(n-1)(x+iy)^{n-2}}{(2n)!}$

On fixe $y_0 \in \mathbb{R}$ et on se place sur $x \in [-a,a]$, $a>0$

$\forall x \in [-a,a] \left| \dfrac{\partial u_n}{\partial x}(x,y_0)\right| \leq \dfrac{n(a+|y_0|)^{n-1}}{(2n)!} = \beta_n$ et

$$\left|\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}(x,y_0)\right| \leq \frac{n(n-1)(a+|y_0|)^{n-2}}{(2n)!} = \gamma_n$$

$\beta_n = o\left(\dfrac{n}{2^n}\right)$ donc $\beta_n = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ de m $\gamma_n = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ donc

$\left(\sum \dfrac{\partial u_n}{\partial x}(\cdot, y_0)\right)$ et $\left(\sum \dfrac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}(\cdot, y_0)\right)$ cvg normalement sur $[-a,a]$

Par l'extension du théorème de dérivation, $\varphi(\cdot, y_0)$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et on peut dériver terme à terme. De même pour $\varphi(x_0, \cdot)$ (les facteurs i et i^2 ne change rien aux cvg normales)

csq φ admet sur $\mathbb{R}^2$ des dérivées partielles secondes % à x et à y.

Comme $\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x,y) = \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n(n-1)(x+iy)^{n-2}}{(2n)!}$, pour

les $\hat{m}$ raisons que pour φ : cvg normale sur tout compact de $\mathbb{R}^2$, on a $\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$ continue sur $\mathbb{R}^2$. Idem pour

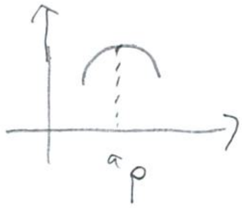
$\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$. On fait de même par $\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}$ qui existe et est $C^0/\mathbb{R}^2$.

csq : $\boxed{\varphi \ C^2 \text{ sur } \mathbb{R}^2}$

Enfin $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ $\Delta\varphi(x,y) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \Delta u_n(x,y) = 0$ grâce au 1°)

cl $\boxed{\varphi \text{ harmonique sur } \mathbb{R}^2}$

6) f_p étant continue sur D (TG) et D étant compact (car fermé et borné) $\boxed{f_p \text{ bornée et atteint ses bornes}}$

7) L'idée c'est  , on considère $\varphi = f(\cdot, b_p)$

Si $(a_p, b_p) \in \mathring{D}$ alors $\exists \alpha > 0 \mid [a_p - \alpha, a_p + \alpha] \times \{b_p\} \subset D$

Supposons $\frac{\partial^2 f_p}{\partial x^2}(a_p, b_p) = \varphi''(a_p) > 0$ alors par continuité de φ quitte à diminuer α, on peut supposer que

$\forall t \in [a_p - \alpha, a_p + \alpha] \quad \varphi''(t) > 0$ d'où

t	$a_p - \alpha$	a_p	$a_p + \alpha$
φ''		$+$	
φ'	$-$ ↗	0	↗ $+$
φ	↘		↗

$\varphi'(a_p) = \frac{\partial f_p}{\partial x}(a_p, b_p) = 0$ car (a_p, b_p) pt critique de f_p sur $\mathring{D}$

d'où a_p min. local. strict de φ :

$\forall t \in [a_p - \alpha, a_p + \alpha]$, $t \neq a_p$ $\quad \varphi(t) = f_p(t, b_p) > \varphi(a_p) = f_p(a_p, b_p)$

<u>Absurde</u>

d'où $\boxed{\frac{\partial^2 f_p}{\partial x^2}(a_p, b_p) \leq 0}$ de m (par symétrie) $\boxed{\frac{\partial^2 f_p}{\partial y^2}(a_p, b_p) \leq 0}$

<u>Remarque</u> : Monge ne permettait pas de conclure immédiatement.

8) $\Delta f_p = \Delta f + \frac{4}{p} = \frac{4}{p}$ donc $\Delta f_p(a_p, b_p) = \frac{4}{p} > 0$. Si $M_p \in \mathring{D}$

alors avec le 7) on aurait $\Delta f_p(a_p, b_p) \leq 0 + 0 = 0$; <u>Absurde</u>

<u>cl</u> $\boxed{M_p \in D - \mathring{D} = C}$

⑥

9) La suite (a_p, b_p) est dans le compact C (8°))
par (B.W.) $\exists \varphi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ st $\nearrow$ $\exists (a,b) \in C$ |
$$\lim_{p\to\infty} (a_{\varphi(p)}, b_{\varphi(p)}) = (a, b)$$

$\forall (x,y) \in D$, $\forall p \in \mathbb{N}^*$ $f_{\varphi(p)}(x,y) = f(x,y) + \dfrac{x^2+y^2}{\varphi(p)} \leq f_{\varphi(p)}(a_{\varphi(p)}, b_{\varphi(p)})$

faisons tendre p vers l'infini, il vient :

$$f(x,y) + 0 \leq \overset{\text{car } f \ C^0}{\downarrow} f(a,b) + \frac{a^2+b^2}{\infty} = f(a,b)$$

cl $\boxed{(a,b) \in C \text{ est un maximum de } f \text{ sur } D}$

10) Si f et g sont harmonique sur $\mathbb{R}^2$ et égales sur C.
alors $f-g$ est harmonique d'où $\exists (a,b) \in C$ |
$\forall (x,y) \in D$ $(f-g)(x,y) \leq (f-g)(a,b) = 0$ d'où $f \leq g$
sur D, en échangeant les rôles de f et g, on a
$g \leq f$ sur D cl $\boxed{f = g \text{ sur } D}$

11) & 12) Posons $g(\rho, \theta) = f(x_0 + \rho\cos\theta, y_0 + \rho\sin\theta)$
par TG g est C^1 sur $\mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi] = \Omega$

ESIM 99

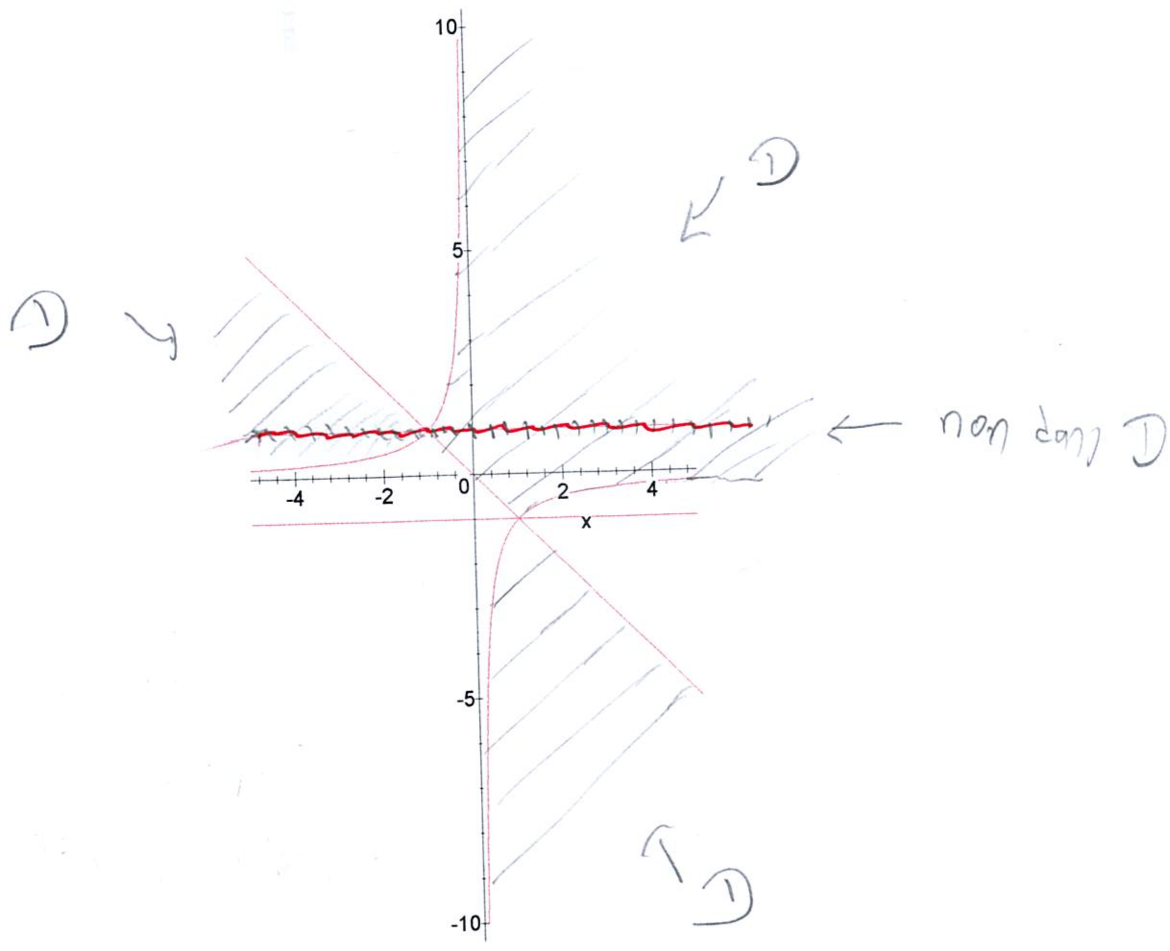
Préliminaires

1°) $f(x,y)$ existe ssi $1-y^2 \neq 0$ et $\dfrac{x+y}{1+xy} > 0$

ssi $y \neq \pm 1$ et $\left[\begin{cases} x+y>0 \\ 1+xy>0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x+y<0 \\ 1+xy<0 \end{cases} \right]$

* $x+y=0$ est l'équation de la $2^{ème}$ bissectrice

* $xy+1=0$ ——— de l'hyperbole $\mathcal{H} / xy=-1$



ouvert

1ère méthode

Posons $\mathcal{H} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy+1=0\}$

$\mathcal{H} = \Psi^{-1}(\{0\})$ est un fermé car $\{0\}$ est fermé et

$\Psi : (x,y) \longmapsto xy+1$ est $C^0/_{\mathbb{R}^2}$ par TG. On en déduit

que $U = \mathbb{R}^2 - \mathcal{H}$ est ouvert de $\mathbb{R}^2$,

Considérons $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x,y) \longmapsto \frac{x+y}{1+xy}$$

φ est $C^0/_U$ par TG.

Donc $\Omega_1 = \varphi^{-1}(]0,+\infty[)$ est un ouvert relatif de U

car $]0,+\infty[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ et φ C^0/U.

D'où il existe Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ tel que $\Omega_1 = U \cap \Omega$

En conséquence Ω_1 (comme intersection finie) est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

D'autre part $\Omega_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 \neq 1\} = p^{-1}(\overbrace{]-\infty,1[\cup]1,+\infty[}^{\text{ouvert de } \mathbb{R}})$

est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ avec $p : (x,y) \longmapsto y^2$, $C^0/_{\mathbb{R}^2}$

d $\boxed{D = \Omega_1 \cap \Omega_2 \text{ est un ouvert de } \mathbb{R}^2.}$

2ème méthode :

$D = \Omega_2 \cap \Omega_3$ avec $\Omega_3 = \Omega_3' \cup \Omega_3''$ et

$\Omega_3' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y>0\} \cap \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid xy+1>0\}$

$\Omega_3'' = \{ \qquad\qquad <0\} \cap \{ \qquad\qquad <0\}$

Comme Ω_3' et Ω_3'' sont ouverts (comme image réciproque...) Ω_3 et donc D est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

2') c'est simplement TG ! produit, quotient, composée ...

3') $\forall (x,y) \in D$:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{(x+y)(1+xy)}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2y}{1-y^2}\ln\left(\frac{x+y}{1+xy}\right) + \frac{1-x^2}{(1-y^2)(x+y)\times(1+xy)}$$

d'où $$\boxed{(1-y^2)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - 2y f(x,y) = \frac{1-x^2}{(x+y)(1+xy)} = (1-x^2)\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)}$$

d' : $\boxed{f \text{ est solution de } (E) \text{ sur } D}$

4') Soit $x>0$ et $y \in]0,1[$: $y^2 \neq 1$, $x+y>0$ et $1+xy>0$

donc $(x,y) \in D$

de même $\frac{1}{x} > 0$ et donc $y^2 \neq 1$, $\frac{1}{x} + y > 0$ et $1 + \frac{1}{x} y > 0$

donc $\left(\frac{1}{x}, y\right) \in D$

$$f\left(\frac{1}{x}, y\right) = \frac{1}{1-y^2} \ln\left(\frac{\frac{1}{x} + y}{1 + \frac{1}{x} y}\right) \quad \text{d'où} \quad \boxed{f\left(\frac{1}{x}, y\right) = -f(x,y)}$$

5°) Posons $\varphi(x) = \dfrac{x+y}{1+xy}$ $\qquad \varphi'(x) = \dfrac{1-y^2}{(1+xy)^2} > 0, \ \forall y \in]0,1[$

d'où

$$\begin{array}{c|ccc} x & 0 & & +\infty \\ \hline \varphi & y & \nearrow & 1/y \end{array}$$

donc $\forall x \in [0, +\infty[$

$$-|\ln y| = \ln y \leq \ln\left(\frac{x+y}{1+xy}\right) \leq \ln \frac{1}{y} = -|\ln y|$$

d'où :

$$\boxed{\forall x \geq 0, \forall y \in]0,1[\quad \left|\ln\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)\right| \leq |\ln y|}$$

6°) Posons $\varphi : y \longmapsto f(0,y) = \dfrac{1}{1-y^2} \ln(y)$. φ $C^0/]0,1[$ par TG.

en 0 : $\varphi(y) \underset{0}{\sim} \ln y$ or $y \mapsto \ln y$ est int. $/]0, 1/2]$ donc

par TC : φ intégrable sur $]0, 1/2]$

en 1 : $y = 1+t$ d'où $\varphi(y) \sim \dfrac{1}{-2t} \ln(1+t) \sim \dfrac{-1}{2}$ donc φ

est PPC en 1 donc int. $/[1/2, 1[$.

⑤

d'où : $\boxed{y \longmapsto f(0,y) \text{ intégrable sur }]0,1[}$

$\varphi : y \longmapsto f(x,y)$ est $C^0 /]0,1[$ par TG et

$\forall y \in]0,1[\quad |\varphi(y)| \leq \frac{1}{1-y^2} |\ln y| = |f(0,y)|$ d'où

par TC, $\boxed{y \longmapsto f(x,y) \text{ int.} /]0,1[}$

<u>Partie I</u>

7°) a) $x \longmapsto f(x,y)$ est $C^0 / [0,+\infty[$ par TG, $\forall y \in]0,1[$

$y \longmapsto f(x,y)$ est C^0/mcx sur $]0,1[$ par TG, $\forall x \in [0,+\infty[$

$\forall x \in [0,+\infty[, \forall y \in]0,1[\quad |f(x,y)| \leq \frac{|\ln y|}{1-y^2} = \varphi(y)$ et

φ intégrable sur $]0,1[$ (6°))

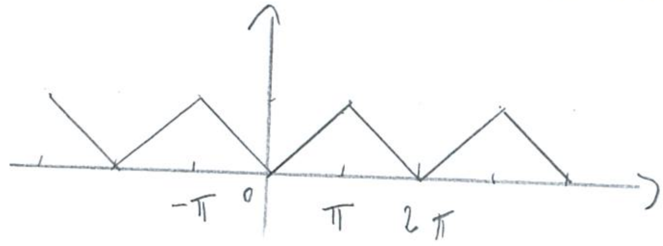
par théorème de continuité, $\boxed{F \text{ est continue sur } [0,+\infty[}$

b) $\forall x > 0, \frac{1}{x} > 0$ et $F\left(\frac{1}{x}\right) = \int_0^1 f\left(\frac{1}{x}, y\right) dy = -F(x)$ avec 4°)

avec $x = 1$, on obtient $F(1) = 0$ d'où : $\boxed{F(1/x) = -F(x) \text{ et } F(1) = 0}$

c) $\forall x>0 \quad F(x) = -F\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{TG} -F(0)$ d'où $\boxed{\lim_{+\infty} F = -F(0)}$

8) a)



φ est C^1/mcx sur $\mathbb{R}$ car $\varphi/_{[0,\pi]}$ et $\varphi/_{[-\pi,0]}$ coïncide avec des fonctions C^1 sur $[0,\pi]$ et $[-\pi,0]$ et φ est C^0 sur $\mathbb{R}$. On peut donc appliquer le théorème de cvg normale de Dirichlet.

$\forall n\in\mathbb{N}$ $\underline{b_n=0}$, $\underline{a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi t\,dt = \pi}$

$\forall n\geq 1$ $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi t\cos(nt)\,dt = \frac{2}{\pi}\cancel{\left[t\frac{\sin nt}{n}\right]_0^\pi} - \frac{2}{n\pi}\int_0^\pi \sin nt\,dt$

$= \frac{-2}{n\pi}\left[\frac{-\cos nt}{n}\right]_0^\pi = \underline{\frac{2}{n^2\pi}\left((-1)^n - 1\right)}$

tsq $\begin{cases} a_{2p} = 0 \quad (p\neq 0) \\ a_{2p+1} = \dfrac{-4}{\pi(2p+1)^2}\end{cases}$ d'où $\forall t\in\mathbb{R}$:

$$\varphi(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\cos(2p+1)x}{(2p+1)^2}$$

$\varphi(0)=0$ d'où $\boxed{\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}}$

8 a) avec $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

6^{bis}

$$\sum_{n=1}^{2N+1} \frac{1}{n^2} = \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{(2p)^2} + \sum_{p=0}^{N} \frac{1}{(2p+1)^2}$$

Les 3 séries cvg $\left(O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right)$ d'où qd $N \to +\infty$:

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{4} \frac{\pi^2}{6} + S \quad \text{où} \quad S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

d'où $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}}$

b) $\forall y \in]-1,1[\quad \underline{\dfrac{1}{1-y^2} = \sum_{n=0}^{\infty} y^{2n}}$

$$F(0) = \int_0^1 \frac{1}{1-y^2} \ln y \, dy = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} y^{2n} \ln y \, dy$$

Posons $u_n(y) = y^{2n} \ln y$. On a (Σu_n) qui cvg simplement sur $]0,1[$ vers $S : y \longmapsto \frac{1}{1-y^2} \ln y$. u_n et S sont $C^0/_{]0,1[}$ par TG, enfin

$$\int_a^b y^{2n} \ln y \, dy = \left[\frac{y^{2n+1}}{2n+1} \ln y \right]_a^b - \int_a^b \frac{y^{2n}}{2n+1} dy$$

$$\xrightarrow[\substack{a \to 0 \\ b \to 1}]{TG} 0 - 0 - \int_0^1 \frac{y^{2n}}{2n+1} dy = -\frac{1}{(2n+1)^2}$$

donc $\left(\Sigma \int_0^1 |u_n|\right) = \left(\Sigma \frac{1}{(2n+1)^2}\right)$ cvg car $\frac{1}{(2n+1)^2} \sim \frac{1}{4n^2} \geq 0$ (et TC)

Par th. d'intégration terme à terme de Lebesgue,

$$F(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 u_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{(2n+1)^2} \qquad \text{d'où} \quad \boxed{F(0) = -\frac{\pi^2}{8}}$$

9° a) On reprend les notations du 7°) a)

$*$ $x \longmapsto f(x,y)$ est C^1 sur $[0,+\infty[$ par TG, $\forall y \in]0,1[$

* $y \longmapsto g(x,y)$ est $C^0/_{mcx}$ et integrable sur $]0,1[$, $\forall x \geq 0$

* $x \longmapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{(x+y)(1+xy)}$ est C^0 sur $[0,+\infty[$, $\forall y \in]0,1[$ (TG)

* $y \longmapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)$ $C^0/_{mcx}$ sur $]0,1[$, $\forall x \geq 0$ (TG)

et $\forall a>0$, $\forall b \geq a$, $\forall x \in [a,b]$ et $\forall y \in]0,1[$:

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\right| \leq \frac{1}{(a+y)(1+ay)} = \phi(y)$$

ϕ est $C^0/_{[0,1]}$ donc intégrable sur $]0,1[$

par th de dérivation, on conclut : $\boxed{F \ C^1 \text{ sur }]0,+\infty[}$

b) D'après la formule de Leibniz : $F'(x) = \int_0^1 \frac{1}{(x+y)(1+xy)}\,dy$

Décomposons : $\frac{1}{(x+y)(1+xy)} = \frac{a}{x+y} + \frac{b}{1+xy}$ et $x \neq 1$ donc $-x \neq -\frac{1}{x}$

avec $a = 1/_{1-x^2}$ et $b = \frac{1}{x-\frac{1}{x}} = \frac{-x}{1-x^2}$

d'où $F'(x) = \frac{1}{1-x^2}\int_0^1 \frac{dy}{x+y} - \frac{1}{1-x^2}\int_0^1 \frac{x\,dy}{1+xy}$

donc $F'(x) = \frac{1}{1-x^2}\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{1-x^2}\ln(1+x) = \frac{-\ln x}{1-x^2}$

Comme $f(0,x) = \frac{1}{1-x^2}\ln x$ on conclut : $\boxed{F'(x) = \frac{\ln x}{x^2-1} = -f(0,x)}$

c) * Comme F est C^1 sur $]0,+\infty[$, $F'(1) = \lim\limits_{x \to 1} F'(x)$

Or $F'(1+t) = \frac{\ln(1+t)}{(1+t)^2-1} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t}{2t} = \frac{1}{2}$ d'où : $\boxed{F'(1) = \frac{1}{2}}$

* $F'(x) \underset{0}{\sim} -\ln x \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty$ d'où : $\boxed{\text{tg verticale en } 0}$ (par "T.L.D.")

10) a) $\forall x \neq 1$ $F'(x) = \frac{\ln x}{x^2-1} = \frac{\ln x}{x-1} \times \frac{1}{x+1} = G(x-1) \times \frac{1}{x+1}$

avec $G(t) = \frac{\ln(1+t)}{t}$ pour $t \neq 0$ et $G(0) = 1$

Montrons que G est C^∞ sur $]-1,1[$:

$\forall t \in]-1,1[-\{0\}$ $G(t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{t^{n-1}}{n} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^n}{n+1}$ et cette formule est valable si $t=0$, comme le rayon de cette série vaut 1, G est C^∞ sur $]-1,1[$.

par TG, F' est donc C^∞ sur $]0,+\infty[-\{1\}$ et sur $]0,2[$ donc F' est C^∞ sur $]0,+\infty[$, d'où : $\boxed{F\ C^\infty \text{ sur }]0,+\infty[}$

b) $\forall x \neq 1$, $F''(x) = \dfrac{1}{x(x^2-1)} - \dfrac{2x\ln x}{(x^2-1)^2} = \dfrac{x^2-1-2x^2\ln x}{x(x^2-1)^2}$

$$= \left(1-\frac{1}{x^2}-2\ln x\right)\frac{x}{(x^2-1)^2}$$

Posons $\varphi(x) = 1-\dfrac{1}{x^2}-2\ln x$ $\quad \varphi'(x) = \dfrac{2}{x^3}-\dfrac{2}{x} = \dfrac{2(1-x^2)}{x^3}$

d'où

x	0		1		$+\infty$
φ'		$+$	0	$-$	
φ		$\nearrow$ $-$	0	$\searrow$ $-$	
F''			$-$		

d'où : $\boxed{F \text{ est concave sur } [0,+\infty[}$

11.)

x	0		1		$+\infty$
F'	$\Vert$	$+$	$\frac{1}{2}$	$+$	
F	$-\pi^2/8$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\pi^2/8$

$F(1) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1-y^2}\ln(1)\,dy = 0$

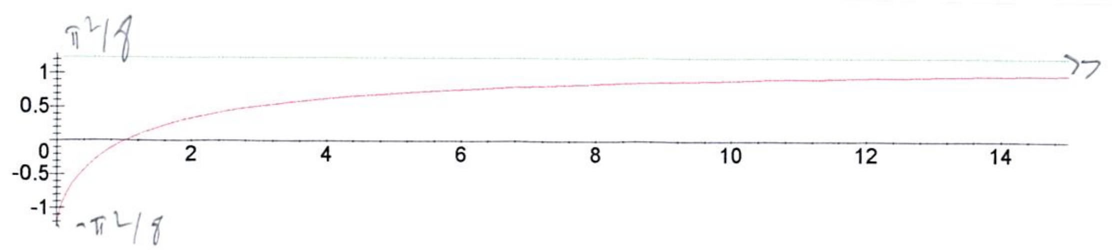
```
int(ln(x)/(x^2-1),x=0..X);
```

$$-\frac{1}{2}\operatorname{dilog}(X)-\frac{1}{2}\operatorname{dilog}(1+X)-\frac{1}{2}\ln(X)\ln(1+X)+\frac{1}{12}\pi^2$$

```
f:=unapply("-Pi^2/8,X);
```

$$f := X \to -\frac{1}{2}\operatorname{dilog}(X)-\frac{1}{2}\operatorname{dilog}(1+X)-\frac{1}{2}\ln(X)\ln(1+X)-\frac{1}{24}\pi^2$$

réponses de Maple



Tracé de F

12) a) $\Omega = \varphi^{-1}(]0,+\infty[)$ avec $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
$(x,y) \longmapsto x - y$

φ $C^0/\mathbb{R}^2$ par TG et $]0,+\infty[$ est ouvert donc Ω est ouvert

de même pour Ω' avec $\varphi(x,y) = x^2 - 4y$

cl : $\boxed{\Omega \text{ et } \Omega' \text{ ouverts de } \mathbb{R}^2}$

b) * Ψ est C^1 sur Ω par TG

* $\forall (x,y) \in \Omega$ $\quad (x+y)^2 - 4(xy) = (x-y)^2 > 0$ car $x - y > 0$

donc $\Psi(x,y) \in \Omega'$ $\quad$ d'où $\Psi(\Omega) \subset \Omega'$

* Soit $(u,v) \in \Omega'$

analyse : on cherche $(x,y) \in \Omega \mid \Psi(x,y) = (u,v)$

donc $\begin{cases} x + y = u \\ xy = v \end{cases}$ d'où x & y sont racines du polynôme :

$P = X^2 - uX + v$, son discriminant $\Delta = u^2 - 4v > 0$ car $(u,v) \in \Omega'$

Synthèse posons y la plus petite racine de P
x —— grande ——

on a $y < x$ car $\Delta > 0$ donc 2 racines réelles distinctes

On a donc $(x,y) \in \Omega$ et $\Psi(x,y) = (u,v)$

l'unicité de (x,y) vient du fait que si $\Psi(x,y)=(u,v)$ alors x et y sont les racines de $P=X^2-uX+v$

cqfd $\boxed{\Psi \text{ bijection } C^1 \text{ de } \Omega \text{ sur } \Omega'}$

de + : on a l'expression de Ψ^{-1} :

$$\Psi^{-1} : \Omega' \longrightarrow \Omega$$
$$(u,v) \longmapsto \left(\frac{u+\sqrt{u^2-4v}}{2}, \frac{u-\sqrt{u^2-4v}}{2}\right)$$

d'où par TG $(u^2-4v>0, \forall (u,v)\in\Omega')$,

$\boxed{\Psi^{-1} \text{ est aussi } C^1 \text{ sur } \Omega'}$

13 a) On veut $\forall (x,y)\in\Omega$ $g(x,y)=h\circ\Psi(x,y)$ donc $g=h\circ\Psi$

cl : $\boxed{h=g\circ\Psi^{-1} \text{ convient par TG et 11 c) pour } \Psi^{-1}\ C^1/_{\Omega'}}$

b) $\forall (x,y)\in\Omega$ $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y)=\dfrac{\partial h}{\partial u}(x+y,xy)\times 1+\dfrac{\partial h}{\partial v}(x+y,xy)\times y$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial h}{\partial u}(x+y,xy)\times 1+\frac{\partial h}{\partial v}(x+y,xy)\times x$$

donc $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y)-\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y)=(y-x)\dfrac{\partial h}{\partial v}(x+y,xy)$

donc $\forall (x,y) \in \Omega \quad \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)$

$\iff$ ———— $(y-x)\frac{\partial h}{\partial v}(x+y, xy) = 0$

$\iff$ ———— $\frac{\partial h}{\partial v}(x+y, xy) = 0$ car $y-x<0$ donc $\neq 0$

$\iff \forall (x,y) \in \Omega \quad \frac{\partial h}{\partial v} \circ \varphi(x,y) = 0$

$\iff \underbrace{\frac{\partial h}{\partial v} \circ \varphi = 0}_{\text{de } \Omega \to \mathbb{R}} \iff \frac{\partial h}{\partial v} \circ \varphi \circ \varphi^{-1} = \underbrace{\frac{\partial h}{\partial v} = 0}_{\text{de } \Omega' \to \mathbb{R}}$

$\iff \forall (u,v) \in \Omega' \quad \frac{\partial h}{\partial v}(u,v) = 0$ d'où $\boxed{i) \iff ii)}$

14 a) $\Omega_1 = \Omega \cap]-1,1[^2$. Comme Ω et $]-1,1[^2$ sont des ouverts de $\mathbb{R}^2$ (produit d'ouverts pour $]-1,1[$), $\boxed{\Omega_1 \text{ ouvert}}$

b) G est C^1 sur Ω_1 par TG et car $\forall x \in \mathbb{R} \quad \text{th}\, x \in]-1,1[$

$\forall (\alpha,\beta) \in \Omega$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial \alpha}(\alpha,\beta) &= (1-\text{th}^2\beta)\frac{\partial H}{\partial x}(\text{th}\,\alpha, \text{th}\,\beta) \times (1-\text{th}^2\alpha) \\ \frac{\partial G}{\partial \beta}(\alpha,\beta) &= -2\,\text{th}\,\beta(1-\text{th}^2\beta)H(\text{th}\,\alpha,\text{th}\,\beta) + (1-\text{th}^2\beta)^2\frac{\partial H}{\partial y}(\text{th}\,\alpha,\text{th}\,\beta) \end{aligned}}$$

démo de l'indication sur $th = \tanh$

th est C^1 sur $\mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ $th'(x) = 1 - th^2 x = \dfrac{1}{ch^2 x} > 0$

	$-\infty$	0	$+\infty$
th	-1	$\nearrow$	1

et comme $\forall x \in \mathbb{R}$ $th' x \neq 0$, th^{-1} est C^1 de $]-1,1[$ sur $\mathbb{R}$.

$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$ $\quad th(a+b) = \dfrac{e^{a+b} - e^{-a-b}}{e^{a+b} + e^{-a-b}}$ $\quad$ et

$$\frac{tha + thb}{1 + tha\,thb} = \frac{\dfrac{e^a - e^{-a}}{e^a + e^{-a}} + \dfrac{e^b - e^{-b}}{e^b + e^{-b}}}{1 + \dfrac{e^a - e^{-a}}{e^a + e^{-a}} \; \dfrac{e^b - e^{-b}}{e^b + e^{-b}}} = \frac{(e^a - e^{-a})(e^b + e^{-b}) + (e^a + e^{-a})(e^b - e^{-b})}{(e^a + e^{-a})(e^b + e^{-b}) + (e^a - e^{-a})(e^b - e^{-b})}$$

$$= \frac{e^{a+b} - e^{-a-b}}{e^{a+b} + e^{-a-b}}$$ (tout le reste disparaît et $e^a e^b = e^{a+b}$)

cl : $\boxed{th \; C^1\text{-difféo de } \mathbb{R} \text{ sur }]-1,1[\text{ et } th(a+b) = \dfrac{tha + thb}{1 - tha\,thb}}$

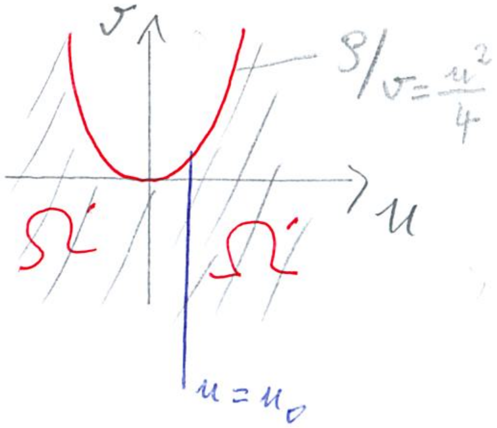
c) Avec le b) et vu que H est solution de (E), on a :

$\forall (\alpha, \beta) \in \Omega$ $\quad \dfrac{\partial G}{\partial \alpha}(\alpha, \beta) = \dfrac{\partial G}{\partial \beta}(\alpha, \beta)$ $\quad$ (avec $y = th\,\beta < x = th\,\alpha$)

d'après le 12 b) On a donc

$\forall (u, v) \in \Omega'$ $\quad \dfrac{\partial h}{\partial v}(u, v) = 0$ $\quad$ avec $h = G \circ \varphi^{-1}$

Ici Ω' n'est pas convexe



Cependant on peut adapter la démo. du cours : $\forall u_0 \in \mathbb{R}$ $\mathcal{D}/_{u=u_0} \cap \Omega' = \{u_0\} \times]-\infty, u_0^2/4[$

Soit $\varphi :]-\infty, u_0^2/4[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$v \longmapsto h(u_0, v)$$

φ est C^1 sur $]-\infty, u_0^2/4[= I$ et $\forall v \in I$ $\varphi'(v) = \frac{\partial h}{\partial v}(u_0, v) = 0$

d'où comme I est un intervalle (convexe !), φ est constante sur I : $\exists! \lambda_{u_0} \in \mathbb{R} \mid \forall v \in I$ $\varphi(v) = \lambda_{u_0}$

Posons $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, on a $\forall (u,v) \in \Omega'$

$$u \longmapsto \lambda_u$$

$$\underline{h(u,v) = \lambda_u = F(u)}$$

$\forall u \in \mathbb{R}$ $F(u) = h(u, -1)$ (car $-1 \in]-\infty, u^2/4[$)

d'où par TG $\underline{F \text{ est } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}.}$

csq $\boxed{\exists F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ C^1/\mathbb{R} \text{ tel que } \forall (u,v) \in \Omega'\ h(u,v) = F(u)}$

Csq : $G = h \circ \Psi$ donc $\forall (\alpha, \beta) \in \Omega$

$$G(\alpha,\beta) = h(\Psi(\alpha,\beta)) = h(\alpha+\beta, \alpha\beta) = F(\alpha+\beta)$$

donc $(1-\text{th}^2\beta)\, H(\text{th}\,\alpha, \text{th}\,\beta) = F(\alpha+\beta)$

d'où $$H(\text{th}\,\alpha, \text{th}\,\beta) = \frac{1}{1-\text{th}^2\beta} F(\alpha+\beta)$$

Soit $(x,y) \in \Omega$, donc $(x,y) \in]-1,1[^2$ & $y < x$

posons $\alpha = \text{Argth}\, x$ & $\beta = \text{Argth}\, y$ on a $\beta < \alpha$ (th $\nearrow$)

donc $(\alpha,\beta) \in \Omega$ et $H(\text{th}\,\alpha, \text{th}\,\beta) = \frac{1}{1-\text{th}^2\beta} F(\alpha+\beta)$

d'où $$H(x,y) = \frac{1}{1-y^2} F(\text{Argth}\, x + \text{Argth}\, y)$$

$$= \frac{1}{1-y^2} F \circ \text{Argth} \circ \text{th}\,(\text{Argth}\, x + \text{Argth}\, y)$$

$$= \frac{1}{1-y^2} F \circ \text{Argth}\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Posons } \phi = F \circ \text{Argth} :]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R},\ C^1 \text{ par TG et} \\ \forall (x,y) \in \Omega, \quad H(x,y) = \dfrac{1}{1-y^2}\, \phi\left(\dfrac{x+y}{1+xy}\right)\end{array}}$$

15) Montrons la réciproque du 13 d) :

soit $\phi :]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}$, C^1 et soit

$$H(x,y) = \frac{1}{1-y^2}\,\phi\left(\frac{x+y}{1+xy}\right) \quad \text{pour } (x,y) \in \Omega_1$$

Montrons que <u>H est solution de (E) sur Ω_1</u>

$\forall (x,y) \in \Omega_1 \quad \exists (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{cases} x = th\,\alpha \\ y = th\,\beta \end{cases}$ d'où

$$\frac{x+y}{1+xy} = \frac{th\,\alpha + th\,\beta}{1 + th\,\alpha\, th\,\beta} = th(\alpha+\beta) \in]-1,1[$$

donc, par TG, H existe et C^1 sur Ω_1.

$$\frac{\partial H}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{1-y^2}\,\frac{d}{dx}\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)\cdot \phi'\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$$

$$= \frac{1}{(1+xy)^2}\,\phi'\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$$

$$\frac{\partial H}{\partial y}(x,y) = \frac{2y}{(1-y^2)^2}\,\phi\left(\frac{x+y}{1+xy}\right) + \frac{1-x^2}{(1-y^2)(1+xy)^2}\,\phi'\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$$

d'où $2y\,H(x,y) + (1-x^2)\dfrac{\partial H}{\partial x}(x,y) - (1-y^2)\dfrac{\partial H}{\partial y}(x,y) = 0$

d': $\boxed{\begin{array}{l} H \text{ est solution } C^1 \text{ sur } \Omega, \text{ ssi} \\ \exists \phi :]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R} \ C^1 \text{ sur }]-1,1[\text{ tel que} \\ \forall (x,y) \in \Omega, \ H(x,y) = \dfrac{1}{1-y^2} \phi\left(\dfrac{x+y}{1+xy}\right) \end{array}}$