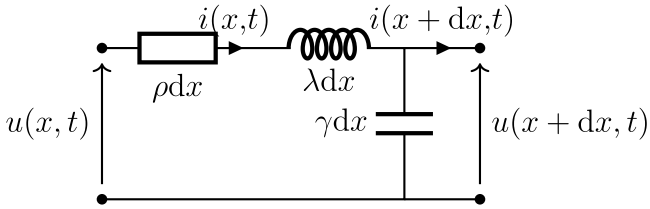
Exercice 1 : Câble coaxial

On étudie un câble coaxial avec pertes dont le schéma équivalent d'un tronçon de longueur dx est représenté ci–dessous :



où $\rho \mathrm{d}x$, $\gamma \mathrm{d}x$ et $\lambda \mathrm{d}x$ représentent respectivement la résistance, la capacité et l'inductance du tronçon. La tension entre les conducteurs et l'intensité du courant les parcourant sont notées $u(x,t)$ et $i(x,t)$ à l'abscisse x et l'instant t. La ligne est obtenue par mise en série d'une infinité de tronçons élémentaires de longueur dx très petite par rapport à la longueur d'onde. Compte tenu de l'effet de peau, la résistance linéique ρ et l'inductance linéique λ dépendent de la pulsation excitatrice par la relation :

$$\rho = \alpha\sqrt{\omega} \quad \text{et} \quad \lambda = \lambda_0 + \frac{\beta}{\sqrt{\omega}}$$

avec α et β des constantes caractéristiques.

Q.1 Déterminer l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $u(x,t)$. Commenter sa forme.

Q.2 En posant $u(x,t) = \Re\left(U_0 e^{j(\omega t - kx)}\right)$, montrer que la relation de dispersion vérifie :

$$\underline{k}^2 = \omega^2\gamma\left(\lambda_0 + \frac{\beta}{\sqrt{\omega}}\right) - j\alpha\gamma\omega\sqrt{\omega}$$

Q.3 En simplifiant la relation de dispersion dans le cadre d'une faible résistance linéique, déterminer la vitesse de phase et la vitesse de groupe des ondes électriques dans le câble.

On étudie dans le câble la propagation d'une succession d'impulsions modélisable par un signal créneau de moyenne nulle. Ce signal est défini par décomposition en série de Fourier, avec une amplitude non nulle des harmoniques pour $\omega \in [\omega_0, \omega_1]$ et nulle sinon. La bande passante se définit comme la fréquence maximale que l'on peut envoyer de sorte que les impulsions ne se superposent pas.

Q.4 Exprimer la bande passante du câble puis réaliser l'application numérique avec $\omega_1 = 1000\omega_0$ pour un câble de longueur 100 km. On prendra $\lambda_0 = 0{,}2\,\mu\mathrm{H}\cdot\mathrm{m}^{-1}$, $\gamma = 100\,\mathrm{pF}\cdot\mathrm{m}^{-1}$, $\alpha = 1\times10^{-8}$ SI et $\beta = 4\times10^{-5}$ SI.