

RÉVISION MPSI POUR LE COURS DE MP

Ce polycopié est constitué d'un grand nombre de notions vu en Terminale et en **MPSI** et absolument indispensable aux concours : les examinateurs prennent mal de ne pas connaître le théorème de Cayley-Hamilton (programme de MP) ; par contre

ils prennent très très très mal de ne pas connaître le DL de $\ln(1+x)$ en zéro et encore plus mal de ne pas connaître la formule d'addition $\cos(a+b)$.

Ce polycopié ne saurait en aucun cas remplacer le cours de votre professeur de MPSI. Notamment, il n'y a aucune démonstration (qui sont pourtant à savoir dans les grandes lignes notamment pour Centrale ou Mines) ni toutes les définitions, propriétés dessins et autres.

C'est à vous pour chaque chapitre de ce polycopié, selon le degré de mémorisation (ou d'oubli), d'aller revoir avec plus ou moins de temps, votre cours de MPSI sur le sujet.

LETTRES GRECS

α : alpha	β : bêta	γ : gamma	δ : delta	ε : epsilon
ζ : dzêta	η : êta	θ : thêta	ι : iota	κ : kappa
λ : lambda	μ : mu	ν : nu	ξ : xi	$\omicron$: omicron
π : pi	ρ : rhô	σ : sigma	τ : tau	φ : phi
χ : ki	ψ : psi	ω : oméga		

MAJUSCULES

Γ : Gamma	Λ : Lambda	Σ : Sigma	Ψ : Psi
Δ : Delta	Ω : Oméga	Π : Pi	Φ : Phi

LogiquE

1. **Axiome** : c'est une phrase (généralement mathématique) vraie ou fausse.
Axiome : c'est une phrase qui est décrétée vraie ; il fait partie d'un groupe d'axiomes appelé théorie axiomatique. La plus connue, et celle avec laquelle on travaille tous les jours s'appelle la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel (ZF).
Théorème : c'est une assertion vraie que l'on démontre par déduction logique grâce aux axiomes.
Proposition : c'est un petit théorème.
Lemme : c'est un tout petit théorème !
Conjecture : c'est une assertion qu'une personne dit être vraie mais non encore démontrée. Tout théorème a d'abord été une conjecture.
Exemples : Dire si ces phrases sont des assertions (et leur valeur), des axiomes, des théorèmes, des propositions, des lemmes, des conjectures.
($1 = 2$)
($x > 2$)
(la 10^{100} -ième décimale de π est un 7).
(la 2-ième décimale de π est un 4).
(la 3-ième décimale de π est un 9).
(le carré de l'hypoténuse d'un triangle rectangle est égale à la somme des carrés des autres côtés)
($\forall x, \exists y$ tel que $\forall z : [z \in y \iff z \subset x]$)
2. Énoncer clairement la négation des assertions suivantes :
(a) Tout triangle possède un angle droit.
(b) Dans toutes les prisons, tous les détenus détestent tous les gardiens.
(c) Pour tout entier n il existe un entier p tel que pour tout entier q la relation $q < p$ implique la relation $q < n + 1$
3. Est-ce vrai-est-ce faux ??
($1 = 2$) $\implies$ ($2 = 3$)
($1 = 2$) $\implies$ ($2 = 2$)
($1 = 1$) $\implies$ ($2 = 3$)

4. Montrer que $(p \implies q)$ est identique à $(\text{non}(p) \text{ ou } q)$
5. Soit le Théorème : Si f est croissante et majorée sur $]a, b[$ alors elle admet une limite finie en b .
Questions :
 (a) f est croissante et majorée sur $]a, b[$ est une conditionpour qu' elle admette une limite finie en b .
 (b) Pour que f admette une limite finie en b il que f soit croissante et majorée sur $]a, b[$.
6. Donner une condition nécessaire (et non suffisante) pour qu'un réel x soit entre 0 et 1.
Donner une condition suffisante (et non nécessaire) pour qu'un réel x soit entre 0 et 1.
7. Compléter les phrases suivantes par le mot **nécessaire** ou **suffisant**
 Pour gagner au loto il est de jouer.
 Pour ne pas perdre au loto il est de ne pas jouer.
 Pour qu'il n'y ait pas de nuages il est qu'il ne pleuve pas.
 Pour qu'un réel soit positif il est qu'il soit le carré d'un autre réel.
 Pour qu'une suite soit majorée il est qu'elle soit convergente.
 Pour qu'une suite soit convergente il est qu'elle soit croissante et majorée.
8. Les cannibales d'une tribu se préparent à manger un missionnaire. Désirant lui prouver une dernière fois leur respect de la dignité et de la liberté humaine, les cannibales proposent au missionnaire de décider lui-même de son sort en faisant une courte déclaration : si celle-ci est vraie, le missionnaire sera rôti, et il sera bouilli dans le cas contraire.
Que doit dire le missionnaire pour sauver sa vie ?

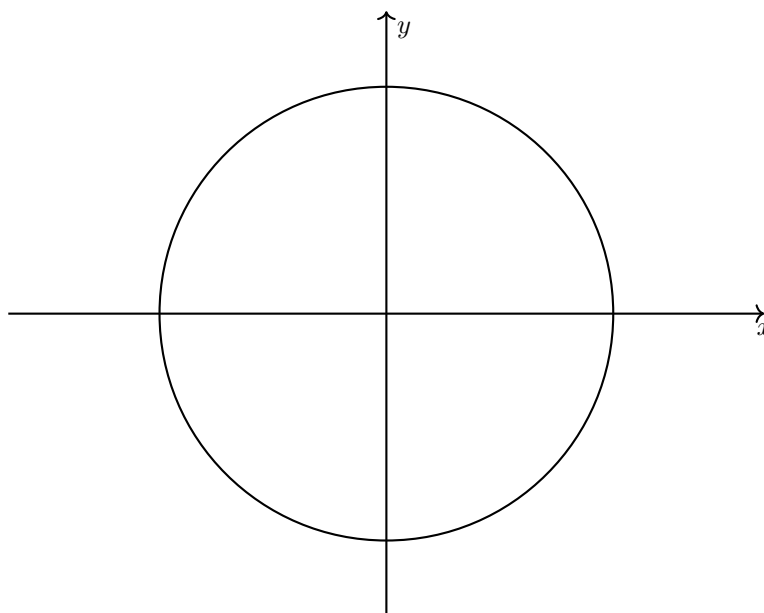
TRIGONOMETRIE

1. **Formule fondamentale** :

$\cos^2 x + \sin^2 x =$

- 2.

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π
sin							
cos							
tan							



3. Parité - Périodicité - Symétries

$$(a) \cos(-x) = \quad \sin(-x) = \quad \tan(-x) =$$

$$(b) \cos(x + 2\pi) = \quad \sin(x + 2\pi) = \quad \tan(x + \pi) =$$

$$(c) \cos(x + \pi) = \quad \sin(x + \pi) =$$

$$(d) \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \quad \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$(e) \boxed{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) =}$$

4. Formules d'Euler

$$\boxed{\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}} \quad \text{et} \quad \boxed{\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}}$$

Formules d'Euler généralisées

$$e^{ia} + e^{ib} = 2 \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) e^{i\frac{a+b}{2}} \quad \text{et} \quad e^{ia} - e^{ib} = 2i \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) e^{i\frac{a+b}{2}}$$

5. Formules d'addition (Elles sont basées sur la formule $e^{i(a+b)} = e^{ia}e^{ib}$)

$$\begin{aligned} \cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \sin(a+b) &= \sin a \cos b + \cos a \sin b \\ \tan(a+b) &= \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \quad \text{et} \quad \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

6. Formules du double-angle

$$\begin{aligned} \cos(2a) &= \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a \\ \sin(2a) &= 2 \sin a \cos a \end{aligned}$$

On en déduit la linéarisation de $\cos^2 a$ et de $\sin^2 a$:

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos(2a)}{2} \quad \text{et} \quad \sin^2 a = \frac{1 - \cos(2a)}{2}$$

On en déduit aussi :

$$1 + \cos t = \left(\sqrt{2} \cos \frac{t}{2}\right)^2 \quad \text{et} \quad 1 - \cos t = \left(\sqrt{2} \sin \frac{t}{2}\right)^2$$

7. Formules de transformation (On les retrouvent à l'aide des formules d'addition)

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b)) \quad \sin a \sin b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} \quad \cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} \quad \sin p - \sin q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$

8. Formules de paramétrisation : Si $\boxed{t = \tan \frac{\theta}{2}}$ alors on a :

$$\tan \theta = \frac{2t}{1-t^2}, \quad \cos \theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin \theta = \frac{2t}{1+t^2}, \quad d\theta = \frac{2dt}{1+t^2}$$

1. Relation binaire :

Définition : Soit E un ensemble non vide. On appelle **relation binaire** notée $\mathcal{R}$ sur E , la donnée d'un sous-ensemble $\mathcal{G}$ de $E \times E$.

Notation : Si $(x, y) \in \mathcal{G}$, on note alors $x\mathcal{R}y$.

2. "Qualité" d'une relation binaire :

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E (non vide).

- (a) $\mathcal{R}$ est dit réflexive si : $\forall x \in E, x\mathcal{R}x$.
- (b) $\mathcal{R}$ est dit symétrique si : $\forall (x, y) \in E^2, x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$
- (c) $\mathcal{R}$ est dit antisymétrique si : $\forall (x, y) \in E^2, x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x \Rightarrow x = y$
- (d) $\mathcal{R}$ est dit transitive si : $\forall (x, y, z) \in E^3, x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$

3. Relation d'équivalence :

- (a) **Définition :** $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence si elle est réflexive, symétrique et transitive.
- (b) **Classe d'équivalence :** Soit a un élément de E . On appelle **classe d'équivalence** de a pour $\mathcal{R}$: l'ensemble des éléments de E qui sont en relation avec a , on la note $cl(a)$. On a donc : $cl(a) = \{x \in E / x\mathcal{R}a\}$.

Proposition : $cl(a) = cl(b) \iff a\mathcal{R}b$.

Définition : On appelle ensemble quotient de la relation $\mathcal{R}$ dans E , l'ensemble noté

$$E/\mathcal{R} = \{\text{classes d'équivalence de } \mathcal{R} \}.$$

- (c) **Partition (version ensembliste) :** On appelle partition d'un ensemble E , non vide, tout ensemble $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(E)$ ($\mathcal{F}$ est donc un ensemble de sous-ensemble de E) tel que :

- i. $\forall X \in \mathcal{F}, X \neq \emptyset$,
- ii. $\forall (X, Y) \in \mathcal{F}^2, X \neq Y \Rightarrow X \cap Y = \emptyset$,
- iii. $\bigcup_{X \in \mathcal{F}} X = E$.

- (d) **Partition (version familiale) :** On appelle partition d'un ensemble E , non vide, toute famille $(A_i)_{i \in I}$ de sous-ensemble de E tels que :

- i. $\forall i \in I, A_i \neq \emptyset$,
- ii. $\forall (i, j) \in I^2, i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$,
- iii. $\bigcup_{i \in I} A_i = E$.

Théorème : Les classes d'équivalence d'une relation d'équivalence sur E forment une partition de E .

4. Relation d'ordre :

- (a) **Définition :** Soit $\preceq$ une relation binaire sur un ensemble E , non vide. On dit que $\preceq$ est une relation d'ordre si elle est réflexive, antisymétrique et transitive.

On dit que cette relation d'ordre est **totale** si tous les éléments de E sont comparables (c'est-à-dire $\forall (x, y) \in E, x \preceq y$ ou $y \preceq x$). Si la relation n'est pas totale on dit qu'elle est **partielle** (c'est-à-dire $\exists (x, y) \in E, x \not\preceq y$ et $y \not\preceq x$).

- (b) **Exemples :** Pour chacun des exemples suivant dire si l'ordre est total ou partiel.

- i. $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ avec l'ordre usuel : $\leq$
- ii. $\mathcal{P}(X)$ (ensemble des sous-ensembles de X) avec l'inclusion $\subset$
- iii. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On définit la relation d'ordre $\leq$ sur $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ par :

$$\forall (f, g) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})^2 \quad f \leq g \text{ si } \forall x \in I, f(x) \leq g(x).$$

- iv. $\mathbb{N}^*$ avec la relation de divisibilité $n \mid p$.

- (c) **Majorant-Minorant :** Soit E un ensemble munit d'un ordre $\preceq$. Soit A un sous-ensemble, non vide, de E . On dit que M est un majorant de A si : $\forall x \in A, x \preceq M$. On dit que A est majoré s'il possède un majorant : $\exists M \in E / \forall x \in A, x \preceq M$.

On dit que m est un minorant de A si : $\forall x \in A, x \succeq m$. On dit que A est minoré s'il possède un minorant : $\exists m \in E / \forall x \in A, x \succeq m$.

- (d) **Plus grand/ plus petit élément :** Soit E un ensemble munit d'un ordre $\preceq$. Soit A un sous-ensemble, non vide, de E .

On dit que A possède un plus grand élément si : $\exists M \in A / \forall x \in A, x \preceq M$.

On dit que A possède un plus petit élément si : $\exists m \in A / \forall x \in A, x \succeq m$.

Remarque : A possède un plus grand élément s'il existe un majorant de A qui appartienne à A .

- (e) **Borne supérieure/ inférieure :**

- i. Définition : Soit E un ensemble munit d'un ordre $\preceq$. Soit A un sous-ensemble, non vide, de E .
On dit que A possède une borne supérieure si : A est majorée et si l'ensemble des majorants de A possède un plus petit élément α . On note $\alpha = \sup_{\preceq} A$ ou $\alpha = \sup A$. On dit alors que α est le plus petit des majorants de A .

On dit que A possède une borne inférieure si : A est minorée et si l'ensemble des minorants de A possède un plus grand élément β . On note $\beta = \inf_{\preceq} A$ ou $\beta = \inf A$. On dit alors que β est le plus grand des minorants de A .

Exercice : Soient A et B deux ensemble non vides et bornés de $\mathbb{R}$. On suppose que

$$\forall x \in A \text{ et } \forall y \in B : x \leq y.$$

Montrer que $\sup A \leq \inf B$.

$$\mathbb{N} - \mathbb{Z} - \mathbb{Q} - \mathbb{R}$$

I. $\mathbb{N} - \mathbb{Z} - \mathbb{Q}$

1. "Définition" de $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\} \text{ et } \mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}.$$

Propriété caractéristique de $\mathbb{N}$:

- (a) Toute partie **non vide** de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément (c'est-à dire :

$$\forall A \subset \mathbb{N}, A \neq \emptyset,$$

Remarque : Si $a = \min A \geq 1$ alors $a - 1 \notin A$.

Conséquence :

- (b) Toute partie **non vide et majorée** de $\mathbb{N}$ possède un plus grand élément (c'est-à dire :

$$\forall A \subset \mathbb{N}, A \neq \emptyset,$$

Remarque : Si $a = \max A$ alors $a + 1 \notin A$.

2. Division euclidienne

Théorème : $\forall (a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, \exists!(q, r) \in \mathbb{N}^2 / a = bq + r$ et .

Remarques : q est le plus grand entier n tel que $nb \leq a$. On a aussi $q = \lfloor \frac{a}{b} \rfloor$.

3. Récurrence

Lemme : Soit $A \subset \mathbb{N}$ tel que :

- (a) $0 \in A$

- (b) $\forall n \in \mathbb{N} : n \in A \implies n + 1 \in A$.

Alors $A = \mathbb{N}$.

démonstration : (Par l'absurde). Supposons que $A \neq \mathbb{N}$. Posons $B = \mathbb{C}_{\mathbb{N}} A = \mathbb{N} \setminus A$. On a $B \neq \emptyset$ et donc possède un plus petit élément : n_0 . Comme $0 \in A$, $0 \notin B$ et donc $n_0 \neq 0$. On en déduit que $n_0 \geq 1$. Considérons $p = n_0 - 1$. On a $p \notin B$ (car strictement plus petit que n_0), donc $p \in A$. La deuxième hypothèse sur A donne : $p + 1 = n_0 \in A$: Absurde car $n_0 \in B$ et $A \cap B = \emptyset$.

Raisonnement par récurrence : Soit H_n une assertion dépendant de n (exemple : H_n : "la n-ième fleur est plus grande que 2^n "). Pour montrer que H_n est vraie pour tout entier n de $\mathbb{N}$, on peut raisonner par récurrence : On montre que H_0 est vraie (c'est **l'amorce**) et pour tout entier n de $\mathbb{N}$ on montre que si H_n est vraie alors H_{n+1} est également vraie (c'est **l'hérédité**).

Remarque : Si pour montrer H_{n+1} on a besoin de $H_n, H_{n-1}, \dots$, on fait alors une récurrence "avec prédécesseurs". On rédige : Supposons que H_p soit vraie jusqu'au rang n .

Exemple : Soit (u_n) définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \in \mathbb{N}$. (Attention à l'amorce !)

4. "Définition" de $\mathbb{Q}$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} / p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} - \{0\} \right\}$$

Écriture d'un rationnel : $\forall r \in \mathbb{Q}, \exists!(p, q) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{N} - \{0\}) / r = \frac{p}{q}$.

Propriété de $\mathbb{Q}$: $(\mathbb{Q}, +, \times, \leq)$ est un corps totalement ordonné.

Remarque :

- (a) Un nombre est rationnel si et seulement si son écriture décimale est périodique (ex : $12,23737\mathbf{37}\dots$).

- (b) $\mathbb{Q}$ est un corps totalement ordonné qui contient des "trous" (par exemple une suite peut être croissante et majorée sans être convergente ou un ensemble peut être non vide et majoré sans avoir de borne supérieure; ces lacunes conduiront à $\mathbb{R}$).

II. $\mathbb{R}$

1. "Définition" de $\mathbb{R}$

On admet qu'il existe un unique ensemble noté : $\mathbb{R}$ tel que :

- (a) $(\mathbb{R}, +, \times, \leq)$ est un corps totalement ordonné.
 (b) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
 (c) Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure.
 (d) Toute partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ possède une borne inférieure.

Détail

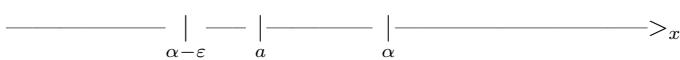
- (a) Dès que l'on a dans un problème : Soit " $x \neq 0, \dots$ " alors on est sûr qu'il faudra considérer $\frac{1}{x}$ (qui existe car $\mathbb{R}$ est un corps).

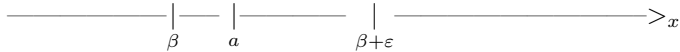
Les seules règles qui manipulent l'ordre et les opérations sont :

- i. $\forall (x, y, a) \in \mathbb{R}^3, x \leq y \implies x + a \leq y + a$.
 ii. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \leq y \implies -y \leq -x$.
 iii. $\forall (x, y, a) \in \mathbb{R}^3, x \leq y \text{ et } \boxed{a \geq 0} \implies xa \leq ya$.
 iv. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x \leq y \implies \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}$.

Attention aux soustractions et aux divisions qui provoquent des "CATA" avec $\leq$

- (b) L'inclusion réciproque est fausse (ex : $\sqrt{2}, \pi, e$).
 (c) Caractérisation : Soit A un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$.

$$\alpha = \sup A \iff \begin{cases} \forall x \in A : x \leq \alpha \text{ (}\alpha \text{ majore } A\text{)} \\ \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A \text{ tel que } a > \alpha - \varepsilon \end{cases}$$


$$\beta = \inf A \iff \begin{cases} \forall x \in A : x \geq \beta \text{ (}\beta \text{ minore } A\text{)} \\ \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A \text{ tel que } a < \beta + \varepsilon \end{cases}$$


Propriété :

Si $\sup A$ appartient à A , $\sup A$ est donc le plus grand élément de A . Idem pour $\inf A$.

Notation : Si $\sup A$ appartient à A , $\sup A$ est alors noté Max A . Idem si $\inf A$ appartient à A , $\inf A$ est alors noté min A .

Caractérisation séquentielle (avec les suites)

$$\alpha = \sup A \iff \begin{cases} \forall x \in A x \leq \alpha \text{ (}\alpha \text{ majore } A\text{)} \\ \exists (a_n) \text{ suite d'éléments de } A \text{ tel que } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \alpha \end{cases}$$

$$\beta = \inf A \iff \begin{cases} \forall x \in A x \geq \beta \text{ (}\beta \text{ minore } A\text{)} \\ \exists (a_n) \text{ suite d'éléments de } A \text{ tel que } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \beta \end{cases}$$

Démonstration : Le faire en exercice en s'aidant d'un petit dessin.

Méthode pour montrer que α est la borne supérieure de A . On montre en premier que α majore A . Si $\alpha \in A$ alors $\sup A = \text{Max} A = \alpha$.

Si $\alpha \notin A$ alors il faut soit utiliser les "epsilons" : $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A / a > \alpha - \varepsilon$, soit les suites : $\exists (a_n)$ suite d'éléments de A tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \alpha$.

Exemples : $A = [0, 1[$ et $A = \{\frac{1}{n} / n \geq 1\}$ (déterminer $\inf, \sup, \text{Max}, \text{min}$).

2. Valeur absolue, encadrement

Définition : $|x| = \text{Max}\{x, -x\}$.

Propriétés : (a) $|x| \geq 0$. (b) $|-x| =$ (c) $|x| = 0 \iff$

(d) $|xy| =$

$$(e) \quad |x + y| \leq \quad \text{Conséquence : } \left| \sum_{i=1}^n x_i \right| \leq$$

$$(f) \quad |x - y| \geq$$

Encadrement :

$$(a) \quad |x| \leq \alpha \iff \quad \leq x \leq$$

$$(b) \quad |x - a| \leq \alpha \iff$$

$$(c) \quad |x - a| \leq \alpha \implies |x| \leq$$

$$(d) \quad I_n + \frac{1}{n+1} \leq S_n < I_{n+1}. \text{ Donner un encadrement à l'aide de } S_n \text{ et } S_{n-1} \text{ de } I_n :$$

3. **Partie entière**

Définition : $\forall x \in \mathbb{R} \exists ! n \in \mathbb{Z} / n \leq x < n + 1.$

Notation : $n = \lfloor x \rfloor = E(x).$ **Exemples :** $\lfloor \pi \rfloor = \quad, \lfloor -\pi \rfloor = \quad.$

Caractérisation :

$$n = \lfloor x \rfloor \iff \begin{cases} n \in \mathbb{Z} \\ n \leq x < n + 1 \end{cases}$$

Exercice : Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \lfloor x + 1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1.$

4. **Densité**

Définition : $A \subset \mathbb{R}$ est dit dense dans $\mathbb{R}$ si : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 / x < y, \exists a \in A$ tel que $x < a < y.$

Exemples : $\mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \mathbb{D}.$

Remarque : La densité de A exprime que l'on peut toujours "glisser" un élément de A entre deux réels quelconques.

5. **Sommation : écrire les sommes en "éclaté"**

$$(a) \quad \sum_{i=1}^n x_i =$$

$$(b) \quad \sum_{1 \leq i < n} x_i =$$

$$(c) \quad \sum_{i=1}^n x_{i+1} =$$

$$(d) \quad \sum_{i+j=n} x_i y_j =$$

$$(e) \quad \prod_{i=1}^n x_i =$$

$$(f) \quad \prod_{1 \leq i < j \leq n} x_{i,j} =$$

$$(g) \quad \sum_{i=1}^n a =$$

$$(h) \quad \prod_{i=1}^n a =$$

$$(i) \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p x_{i,j} =$$

$$(j) \quad \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^n x_{i,j} =$$

$$(k) \quad \text{Compléter : } \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j x_{i,j} = \sum_{i=1} \sum_{j=i}^n x_{i,j}$$

I Définitions - ÉcritureS

1. Définition-Structure

$\mathbb{C} = \{a + ib \text{ tels que } a, b \in \mathbb{R}\}$. Si $z = a + ib$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a $a = \operatorname{Re}(z)$ et $b = \operatorname{Im}(z)$.

Remarque : Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$, avec $a, b, a', b' : \text{réels}$, on a
 $z = z' \iff a = a' \text{ et } b = b'$

Théorème : $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. $(\mathbb{C}, +, \times, \cdot)$ est une $\mathbb{R}$ -algèbre.

Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$, avec $a, b, a', b' : \text{réels}$.

$z + z' = (a + a') + i(b + b')$, $zz' = (aa' - bb') + i(ab' + ba')$, $-z = -a - ib$ et si $z \neq 0$, $\frac{1}{z} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$

2. Module-Argument

Soit $z = a + ib$ avec $a, b : \text{réels}$. $\bar{z} = a - ib$ et $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Définition : On note $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z| = 1\}$. On a $(\mathbb{U}, \times)$ qui est un

Théorème-définition : $\forall z \in \mathbb{C}^*, \exists! \rho > 0$ et $\exists \theta$ (unique à 2π -près) tels que

$$z = \rho e^{i\theta} = \rho(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (\text{écriture d'un nombre complexe})$$

On a : $\rho = |z|$ et θ est appelé l'argument de z et noté $\arg(z)$

Théorème : Soient $z = \rho e^{i\theta}$ et $z' = \rho' e^{i\theta'}$, avec $\rho, \rho' > 0$ et $\theta, \theta' : \text{réels}$.

On a $z = z' \iff \begin{cases} \rho = \rho' \\ \theta \equiv \theta' \pmod{2\pi} \end{cases}$

Formules :

$$\rho e^{i\theta} \cdot \rho' e^{i\theta'} = \rho \rho' e^{i(\theta + \theta')}$$

Soit $n \in \mathbb{Z}$, $(e^{i\theta})^n = (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$ (formule de Moivre)

Passage cartésien-trigonométrique :

Soit $z = \rho e^{i\theta}$. On a alors $z = \rho \cos \theta + i \rho \sin \theta$

Soit $z = a + ib \neq 0$ avec $a, b : \text{réels}$. On a alors $z = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ et θ défini par $\begin{cases} \cos \theta = \frac{a}{\rho} \\ \sin \theta = \frac{b}{\rho} \end{cases}$

Conséquence : Posons $\alpha_0 = \arccos\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)$, on a :

Exemple : Donner l'écriture trigonométrique de $z = -4 - 3i$

3. Interprétation géométrique

II Pratiques des nombres complexes

1. Formules d'EULER

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} & \sin \theta &= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \\ e^{i\theta} + e^{-i\theta} &= 2 \cos \theta & e^{i\theta} - e^{-i\theta} &= 2i \sin \theta \\ 1 + e^{i\theta} &= e^{i\theta/2} (e^{-i\theta/2} + e^{i\theta/2}) & 1 - e^{i\theta} &= -2i e^{i\theta/2} \sin(\theta/2) \end{aligned}$$

$$e^{i\alpha} + e^{i\beta} =$$

$$e^{i\alpha} - e^{i\beta} =$$

: Formules d'Euler généralisées

Application : Calculer $\sum_{k=0}^n \sin kx$.

2. Linéarisation-Dé-linéarisation

- (a) **Linéarisation** : C'est écrire un polynôme en cos et sin comme combinaison linéaire des "cos kx " et "sin kx ". On utilise les formules d'Euler, on développe et on regroupe les termes deux par deux.

exemple : $\cos^7 x =$

$$\cos^2 x \sin^3 x =$$

- (b) **Dé-linéarisation** : c'est le contraire de la linéarisation. On utilise la formule de Moivre :

$$\cos kx = \operatorname{Re}(\cos x + i \sin x)^k \text{ et } \sin kx = \operatorname{Im}(\cos x + i \sin x)^k.$$

Exemple : $\cos 8x =$

3. Racines n-ième de l'unité

Définition : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle racine n-ième de l'unité tout complexe racine de : $z^n = 1$.

Soit $k \in \mathbb{Z}$, on note $\omega_k =$ on a $\omega_0 = 1$, $\omega_n = 1$ et $\omega_k = \omega_1$.

Proposition : $\omega_k = \omega_{k'} \iff k \equiv k' \pmod{n}$ **Conséquence** : $\omega_k = \omega_r$ où $r = k \% n$ (notation Python).

Définition : On appelle $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ième de l'unité,

$$\mathbb{U}_n = \{1, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-1}\} = \{1, \omega_1, \omega_1^2, \dots, \omega_1^{n-1}\}$$

Proposition : La somme des racines n-ième de l'unité vaut 0.

Interprétation géométrique : L'ensemble des points d'affixes les racines n-ième de l'unité forme un polygone régulier inscrit dans le cercle trigonométrique.

Exemple : Donner les racines n-ième de l'unité et tracer le polygone correspondant pour $n = 2, 3, 4, 6$ et 5

(pour $n = 5$ on calculera $\alpha = e^{\frac{2i\pi}{5}}$ à l'aide de la formule $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$).

Utilisation des racines n-ième de l'unité

* Résolution de l'équation $z^n = a$ avec $a \in \mathbb{C}^*$. Posons $a = re^{i\theta}$ d'où les solutions sont :

* Factorisations : $X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (X - \omega_k)$ et $X^{n-1} + X^{n-2} + \dots + X^2 + X + 1 = \prod_{k=1}^{n-1} (X - \omega_k)$

4. Racine carré-Équation de second degré

Soit $Z_0 = a + ib \in \mathbb{C}$. On cherche $z \in \mathbb{C}$ tels que $z^2 = Z_0$.

On a $z^2 = Z_0 \iff \begin{cases} \operatorname{Re}(z^2) = \operatorname{Re}(Z_0) \\ \operatorname{Im}(z^2) = \operatorname{Im}(Z_0) \end{cases}$

D'où les solutions sont : $z =$

et $z =$

Exemple : Déterminer les racines carrées de $-33 - 56i$.

Conséquence : Soit $az^2 + bz + c = 0$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ et $a \neq 0$. Les solutions de cette

équation sont : $z =$

et $z =$

avec $\delta^2 =$

Exemple : Factoriser le polynôme : $iz^2 + (-1 + i)z + 7 + 4i =$

5. Géométrie des nombres complexes

Soit A d'affixe $a \in \mathbb{C}$, B d'affixe b et C d'affixe c .

Alors l'affixe de $\overrightarrow{AB}$ est , $AB =$, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) =$

(A, B, C) alignés si et seulement si $z = \text{---} \in \iff z =$

Similitudes directes :

On appelle similitude directe de centre Ω de rapport $\lambda > 0$ et d'angle θ , l'application s du plan dans le plan qui à tout point M associe le point M' tel que :
$$\begin{cases} \Omega M' = \lambda \Omega M \\ (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta \end{cases}$$

Dessin :

Proposition : s est une similitude directe de centre Ω de rapport $\lambda > 0$ et d'angle θ **si et seulement si** il existe $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ ($a \neq 1$) tels que s associe à tout point M d'affixe z le point M' d'affixe $az + b$.

De plus :

le centre Ω a pour affixe :

le rapport $\lambda =$

l'angle $\theta =$

Remarque : Soit $s : z \mapsto az + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{C}^2$. On a

* s est une translation **ssi**

* s est une homothétie **ssi**

* s est une symétrie **ssi**

* s est une rotation **ssi**

6. Exponentielle complexe

Définition : Si $z = a + ib \in \mathbb{C}$, on note $e^z =$

Proposition : $|e^z| =$, $\arg(e^z) =$, $\operatorname{Re}(e^z) =$, $\operatorname{Im}(e^z) =$

Définitions : Soit $z \in \mathbb{C}$.

$\cos z =$

$\sin z =$

$\tan z =$

$\cotan z =$

$\operatorname{ch} z =$

$\operatorname{sh} z =$

$$\operatorname{th} z =$$

$$\cos^2 z + \sin^2 z =$$

$$\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z =$$

TRIGONOMETRIE RÉCIPROQUE

1. Compléter : $y = \arcsin x \iff \left\{ \right.$

2. Compléter : $y = \arccos x \iff \left\{ \right.$

3. Compléter : $y = \arctan x \iff \left\{ \right.$

4. Tracer des 3 fonctions $\arcsin, \arccos, \arctan$

5. Parité de ces fonctions :
6. $\forall x \in [-1, 1]$, $\arcsin x + \arccos x =$
7. $\forall x > 0$, $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} =$
8. $\forall x < 0$, $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} =$
9. $\forall x \in$, $\sin(\arcsin x) =$
10. $\forall x \in$, $\arcsin(\sin x) =$
 Tracer la fonction $f(x) = \arcsin(\sin x)$

11. $\forall x \in$, $\cos(\arccos x) =$
12. $\forall x \in$, $\arccos(\cos x) =$
 Tracer la fonction $f(x) = \arccos(\cos x)$

13. $\forall x \in \quad$, $\tan(\arctan x) =$
 14. $\forall x \in \quad$, $\arctan(\tan x) =$
 Tracer la fonction $f(x) = \arctan(\tan x)$

15. **Déterminer :**

$$\arcsin(0) = \quad, \arcsin(1) = \quad, \arcsin(-1) = \quad, \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \quad, \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) =$$

16. **Déterminer :**

$$\arccos(0) = \quad, \arccos(1) = \quad, \arccos(-1) = \quad, \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \quad, \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) =$$

17. **Déterminer :**

$$\arctan(0) = \quad, \arctan(1) = \quad, \arctan(-1) = \quad, \arctan\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \quad, \arctan(\sqrt{3}) =$$

18. **Calculer les dérivées :**

19. $\forall x \in \quad$, $\arcsin' x =$

20. $\forall x \in \quad$, $\arccos' x =$

21. $\forall x \in \quad$, $\arctan' x =$

22. **Exercices :**

(a) Montrer que $\forall x \in [-1, 1]$, $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$

(b) Montrer que pour tout $x > 0$ et pour tout $y > 0$ tel que $xy \neq 1$, on a l'équivalence

$$\arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) = \arctan x + \arctan y \iff xy < 1$$

En déduire que $\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}$

TRIGONOMETRIE HYPERBOLIQUE

1. **Définitions :**

$$\operatorname{sh}(t) =$$

$$\operatorname{ch}(t) =$$

$$\operatorname{th}(t) =$$

2. **Formules fondamentales :** $\operatorname{cht} + \operatorname{sht} =$

$$\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t =$$

3. **Lien avec la trigonométrie :**

$$\operatorname{sh}(t) = \sin(\quad)$$

$$\operatorname{ch}(t) = \cos(\quad)$$

$$\operatorname{th}(t) = \tan(\quad)$$

4. Développer $\operatorname{ch}(a+b) =$

$$\operatorname{sh}(a+b) =$$

$$\operatorname{th}(a+b) =$$

5. Tracer des 3 fonctions sh , ch , th :

6. **Exercice :** Calculer $\int_0^1 \sqrt{x^2 + 1} \, dx$.

1. Soit E un ensemble non vide.

Compléter :

$$\mathcal{P}(E) =$$

$$E \setminus A = \overline{A} = \mathcal{C}_E^A =$$

$$A \setminus B =$$

2. Pour montrer que 2 ensembles sont égaux, on utilise : $\mathbf{A=B} \iff A \subset B \text{ et } B \subset A$ Remarque : si A et B sont des ensembles finis, on peut aussi utiliser le cardinal :

$$A = B \iff \left\{ \begin{array}{l} A \subset B \\ B \subset A \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} B \subset A \\ A \subset B \end{array} \right.$$

3. Vocabulaire :Soit $f : E \mapsto F$ et $A \subset E$ et $B \subset F$.Le graphe de f c'estLa restriction de f à A notée $f|_A$ c'estLa fonction 1_A c'est4. Pour montrer que 2 applications sont égales : Soient 2 applications f et g ayant même ensemble de départ E et même ensemble d'arrivée F .Par définition, $f = g \iff$ On commence la démonstration par : "Soit $x \in E$ alors $f(x) = \dots \dots \dots = g(x)$ ".5. Soient E et F 2 ensembles et soit une application $f : E \longrightarrow F$.Définition 1 : f est injective si tout élément de F a au plus un antécédent.Caractérisation 1 : f est injective $\iff [\forall (x, x') \in E^2, f(x) = f(x') \implies x = x']$ Définition 2 : f est surjective si tout élément de F a au moins un antécédent.Caractérisation 2 : f est surjective $\iff [\forall y \in F, \exists x \in E, f(x) = y]$

Dessin n°1

Dessin n°2

 f est injective (non surjective) f est surjective (non injective)Définition 3 : image directe et image indirecteSoit $A \subset E$, alors $f(A) = \{y \in F \mid \exists x \in A, f(x) = y\} = \{f(x) \mid x \in A\}$ (image directe)Soit $B \subset F$, alors $f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$ (image réciproque).6. Définition en probabilités :au moins : $\geq$ (supérieur ou égal)au plus : $\leq$ (inférieur ou égal)moins de : $<$ plus de : $>$ Exercice : L'élève le plus grand de la classe mesure : $t =$ Combien y a-t-il d'élèves dans la classe qui mesure plus de t ?Combien y a-t-il d'élèves dans la classe qui mesure au moins t ?7. Cardinal d'un ensemble finiDéfinition : Soit E un ensemble non vide. On dit que E est fini s'il existe un entier n et une partie A de E dans $\llbracket 1, n \rrbracket (= \{1, 2, \dots, n\})$: n est appelé le cardinal de E .On note alors $\text{Card} E = n$. Autre notation : $|E|$ ou $\#E$.Convention : $\text{Card} \emptyset = 0$ Propriétés :a) Soit E un ensemble fini, et A une partie de E ($A \subset E$), alors A est un ensemble fini et $\text{Card} A \leq \text{Card} E$.b) Soient 2 ensembles finis E et F de même cardinal, et une application f de E dans F , alors $[f \text{ est bijective}] \iff [f \text{ est injective}] \iff [f \text{ est surjective}]$.Opération sur les ensembles finis : Soient E et F deux ensembles finis.

(a) Si $E \cap F = \emptyset$ (on dit que E et F sont disjoints) alors : $\text{Card}(E \cup F) = \text{Card}E + \text{Card}F$.

Généralisation : si $A_1, A_2, \dots, A_p$ sont des parties de E , 2 à 2 disjointes, alors

$$\text{Card}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_p) = \text{Card}A_1 + \text{Card}A_2 + \dots + \text{Card}A_p.$$

(b) $\text{Card}(E \cup F) =$

(c) **Définition** : $E \times F =$

$$|E \times F| =$$

Généralisation : si $E_1, E_2, \dots, E_p$ sont des ensembles finis, alors

$$\text{Card}(E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p) = \text{Card}E_1 \times \text{Card}E_2 \times \dots \times \text{Card}E_p.$$

8. p-listes :

Soit E un ensemble fini, et $p \in \mathbb{N}^*$.

Définition : Une p -liste de E (ou un p -uplet) est un élément de E^p

Théorème 1 :

Si $\text{Card}E = n$, le nombre de p -listes de E est

conséquence : Si on note $\mathcal{F}(E, F)$ l'ensemble des applications de E dans F , alors

$$\text{Card}(\mathcal{F}(E, F)) = (\text{Card} F)^{\text{Card} E}.$$

Autre notation : $\mathcal{F}(E, F)$ est aussi notée F^E .

Corollaire : Si E est un ensemble fini, alors $|\mathcal{P}(E)| =$

Démonstration : On utilise les fonctions.

Théorème 2 :

Si $\text{Card}E = n$, et $p \leq n$ le nombre de p -listes d'éléments distincts de E est

(On note parfois ce nombre A_n^p et on parle d'arrangements de E).

conséquence :

Le nombre d'applications injectives de X_p à p éléments dans Y_n à n éléments est

A savoir : pour $n \geq 1$, $A_n^p = n(n-1) \dots (n-p+1)$

Permutations : On appelle permutation de n éléments toute bijection de l'ensemble de ces n éléments sur lui-même.

Le nombre de permutations de n éléments est $n!$.

9. Combinaisons :

(a) **Théorème 3** :

Si $\text{Card}E = n$, le nombre de parties à p éléments (distincts) de E est noté $\binom{n}{p}$.

(On appelle ce nombre coefficient binomial)

$$\text{Si } p \leq n, \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \quad \text{et} \quad \text{si } p > n, \binom{n}{p} = 0$$

(b) **Calcul** :

$$\binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{1} = n, \quad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}, \quad \binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

(c) **Formules** :

$$\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}, \quad \binom{n}{p} = \frac{n}{p} \binom{n-1}{p-1}$$

$$\text{Formule de Pascal : } \binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$$

Formule du binôme de Newton :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ on a : } (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{n-k} a^k b^{n-k}.$$

Formule de Vandermonde :

$$\forall (a, b, n) \in \mathbb{N}^3 : \binom{a+b}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{a}{k} \binom{b}{n-k}$$

10. Applications

(a) Si $X_p = [1, p]$ et $Y_n = [1, n]$, alors le nombre des applications strictement croissantes de X_p dans Y_n est

(b) Si $X_p = [1, p]$ et $Y_n = [1, n]$, alors le nombre des applications croissantes de X_p dans Y_n est

(c) Soit $S = \{(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{N}^p \text{ tel que } x_1 + \dots + x_p = n\}$. Alors $|S| =$

En déduire le nombre de façons de ranger k boules indiscernables dans b boîtes discernables :

11. Ordre et répétition

Dans les 3 cas, précisez s'il y a un ordre et s'il y a (ou non) répétition des éléments :

Le nombre de p -listes $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ d'un ensemble à n éléments est n^p :

Le nombre de p -listes $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ d'éléments distincts d'un ensemble à n éléments est $\frac{n!}{(n-p)!}$:

Le nombre de parties $\{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ à p éléments d'un ensemble à n éléments est $\binom{n}{p}$:

MATRICES

Notations : On notera $\mathbb{K}$ pour $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Définitions

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$.

(a) On appelle matrice de type (n, p) à coefficients dans $\mathbb{K}$:

$$A = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

On la notera également : $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$.

(b) Si $n = p$ on dit que la matrice est

(c) On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de type n, p , et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées de type n, n .

(d) Si $n = 1$ on dit que A est une matrice...

(e) Si $p = 1$ on dit que A est une matrice...

(f) $I_n =$

(g) Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$. On dit que :

i. A est triangulaire supérieure si :

$$A = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

ii. A est triangulaire inférieure si :

$$A = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

iii. A est diagonale si :

$$A = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

iv. A est symétrique si :

v. A est antisymétrique si :

(h) Soit $1 \leq k \leq n$ et $1 \leq l \leq p$.

On appelle matrice élémentaire $E_{k,l} =$

2. Opérations sur les matrices

(a) $+$ et $\cdot$.

Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

On définit $A + B =$ et $\lambda A =$

(b) $\times$

Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$.

On définit la matrice $A \times B = (c_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq q}}$ par $c_{i,j} = \sum_{\alpha=1}^p a_{i,\alpha} b_{\alpha,j}$

Exemples : $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 9 & 7 \end{pmatrix}$.

$$AX = \quad \quad \quad XB = \quad \quad \quad BX = \quad \quad \quad AB =$$

Résultat important :

Soit $(k, l, k', l') \in [1, n]^4$. On a, dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

Si $l \neq k' : E_{k,l}E_{k',l'} =$ et si $l = k' : E_{k,l}E_{k',l'} =$

(c) **Transposée**

Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$. On définit la matrice transposée ${}^tA =$

Propriétés :

$${}^tA \in \quad \quad \quad {}^t(A+B) = \quad \quad \quad {}^t(\lambda A) = \quad \quad \quad {}^t(AB) = \quad \quad \quad {}^t({}^t(A)) =$$

3. **Structures**

(a) **Théorème 1**

$(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ est un de dimension
De plus est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ (appelée base canonique).

Conséquence : Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ on a l'écriture vectorielle : $A = \sum$.

(b) **Théorème 2**

$(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \cdot, \times)$ est une de dimension
De plus est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (appelée base canonique).
 I_n est

Remarque 1 : On a Newton c'est-à-dire si $AB = BA$ alors $(A+B)^N =$

Remarque 1 : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On a $AB =$

Conséquence :

Définition :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on dit que A est **inversible** si

Dans ce cas est unique et on note $A^{-1} =$

Définition : L'ensemble des éléments inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est noté $GL_n(\mathbb{K})$ et est appelé le groupe linéaire.

On a $(GL_n(\mathbb{K}), \quad)$ est un

(c) Soit T_n^+ (resp. T_n^-) l'ensemble des matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures), soit D_n l'ensemble des matrices diagonales, soit S_n (resp. A_n) l'ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétriques) le tout dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- i. T_n^+ est un(e) de dimension...
- ii. T_n^- est un de dimension...
- iii. D_n est un de dimension...
- iv. S_n est un de dimension...
- v. A_n est un de dimension...
- vi. S_n et A_n sont...

4. **Matrice d'une application linéaire, d'un endomorphisme**

(a) **Matrice d'une application linéaire**

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev et $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ une base de E .

Soit F un $\mathbb{K}$ -ev et $\mathcal{C} = (\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n)$ une base de F .

Soit f une application linéaire de E dans F .

On appelle matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$: $M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \left(\quad \right)$

On a donc les relations pour tout indice .. :

$$f(\vec{e}) = \sum$$

Réciproquement : Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Soit E un $\mathbb{K}$ -ev et $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ une base de E , soit F un $\mathbb{K}$ -ev et $\mathcal{C} = (\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n)$ une base de F .

Alors il existe une unique application linéaire f telle que $M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = A$.

Si $E = \mathbb{K}^p$ et $F = \mathbb{K}^n$ rapportés à leurs bases canoniques on dit que f est l'application linéaire **canoniquement associé** à A .

Conséquence :

$\varphi : \mathcal{L}(E, F) \rightarrow \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), f \mapsto M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ est un

(b) **Matrice d'un endomorphisme**

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev et $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E .

Soit f un endomorphisme de E dans E .

On appelle matrice de f dans la base $\mathcal{B}$: $M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$

(c) **Écriture matricielle de $y = f(x)$**

Proposition : Soit E un $\mathbb{K}$ -ev et $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ une base de E .

Soit F un $\mathbb{K}$ -ev et $\mathcal{C} = (\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n)$ une base de F .

Soit f une application linéaire de E dans F et soit $A = M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$.

Soit $x \in E$ de matrice colonne X dans la base $\mathcal{B}$.

Alors le vecteur $f(x)$ a pour matrice :

Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ et f canoniquement associée.

Définir f analytiquement : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) =$

(d) **Produit**

Proposition : Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de base $\mathcal{B}$, soit F un $\mathbb{K}$ -ev de base $\mathcal{C}$ et soit G un $\mathbb{K}$ -ev de base $\mathcal{D}$. Soit f une application linéaire de E dans F et g une application linéaire de F dans G .

Alors $M_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(g \circ f) =$

Car le produit matriciel a été défini pour cela !

Corollaire : $\Psi : \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), f \mapsto M_{\mathcal{B}}(f)$ est un

(e) **Matrices de passage**

Définition : Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ et $\mathcal{B}' = (\vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_n)$ deux bases d'un $\mathbb{K}$ -ev E .

La matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$, notée $Pass(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$

Proposition : $Pass(\mathcal{B}, \mathcal{B}') \in$ et $Pass(\mathcal{B}', \mathcal{B}) =$

(f) **Formules de changement de bases pour un vecteur**

Théorème : Soit $\mathcal{B}_1$ une base de E et soit $\mathcal{B}_2$ une "nouvelle" base de E . Soit $x \in E$ de matrice colonne X_1 dans la base $\mathcal{B}_1$ et de matrice colonne X_2 dans la base $\mathcal{B}_2$. Soit $P = Pass(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$.

On a la relation et donc

(g) **Formules de changement de bases pour un endomorphisme**

Théorème : Soit $\mathcal{B}_1$ une base de E et soit $\mathcal{B}_2$ une "nouvelle" base de E . Soit f un endomorphisme de E . Soit $P = Pass(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$. Posons $A = M_{\mathcal{B}_1}(f)$ et $D = M_{\mathcal{B}_2}(f)$

On a la relation entre A et D : et donc

5. **Éléments inversibles- calcul de l'inverse dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$**

Problèmes : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Comment "voir" si A est inversible et si oui comment calculer l'inverse de A ?

Théorème :

De plus $A^{-1} =$

$$\text{On a } A^{-1} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$$

Remarque très importante : En général $AB \neq BA$ mais par contre si $AB = I_n$ alors on a automatiquement $BA = I_n$ et donc $A^{-1} =$

[illegible]

(a) $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est inversible ssi $\det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \neq 0$ et $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$

$$(b) \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ est inversible ssi } \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$(c) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ est inversible ssi } \text{et} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}^{-1} =$$

(d) $({}^tA)^{-1} =$

[illegible]

Résoudre $\mathcal{S}$ revient à chercher la matrice colonne : $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ telle que $\boxed{AX = B}$ avec $A = (a_{i,j}) \in$

Notation : $\text{rg}(\mathcal{S})$.

2. Interprétation vectorielle

Soit E un $\mathbb{K}$ -EV de dimension n rapporté à une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$.

Soit $\vec{u}_1 \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{pmatrix}$, $\vec{u}_2 \begin{pmatrix} a_{1,2} \\ \vdots \\ a_{n,2} \end{pmatrix}$, $\dots$, $\vec{u}_p \begin{pmatrix} a_{1,p} \\ \vdots \\ a_{n,p} \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ écrits dans la base $\mathcal{B}$.

Résoudre le système $\mathcal{S}$ revient à chercher un p -uplet d'éléments de $\mathbb{K} : (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que : $\boxed{x_1 \vec{u}_1 + \dots + x_p \vec{u}_p = \vec{v}}$.

Remarque : $\text{rg}(\mathcal{S}) = \text{rg}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$.

Discussion : Le système possède une solution **SSI** $\vec{v} \in \text{vect}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$.

Résolution : Posons $r = \text{rg}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$. Quitte à permuter les vecteurs $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p$ (cela revient à permuter les inconnues $x_1, \dots, x_p$) on peut supposer que $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r)$ est une base de $\text{vect}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$.

Premier cas : $\vec{v} \notin \text{vect}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$.

Le système $\mathcal{S}$ n'admet aucune solution.

Deuxième cas : $\vec{v} \in \text{vect}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$.

Donc $\exists ! (\alpha_1, \dots, \alpha_r) \in \mathbb{K}^r$ tel que $\vec{v} = \alpha_1 \vec{u}_1 + \dots + \alpha_r \vec{u}_r$. Comme $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r)$ est une base de $\text{vect}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ il existe des scalaires $\lambda_{i,j}$ tels que :

$$\begin{cases} \vec{u}_{r+1} = \lambda_{r+1,1} \vec{u}_1 + \dots + \lambda_{r+1,r} \vec{u}_r \\ \vec{u}_{r+2} = \lambda_{r+2,1} \vec{u}_1 + \dots + \lambda_{r+2,r} \vec{u}_r \\ \dots\dots\dots \\ \vec{u}_p = \lambda_{p,1} \vec{u}_1 + \dots + \lambda_{p,r} \vec{u}_r \end{cases}$$

Le système $\mathcal{S}$ est donc équivalent à l'équation : $x_1 \vec{u}_1 + \dots + x_p \vec{u}_p = \vec{v}$ donc équivalent au système :

$$\begin{cases} x_1 + \lambda_{r+1,1} x_{r+1} + \dots + \lambda_{p,1} x_p = \alpha_1 \\ x_2 + \lambda_{r+1,2} x_{r+1} + \dots + \lambda_{p,2} x_p = \alpha_2 \\ \dots\dots\dots \\ x_r + \lambda_{r+1,r} x_{r+1} + \dots + \lambda_{p,r} x_p = \alpha_r \end{cases}$$

(on égalise les coordonnées dans la base $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r)$ de $\text{vect}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$)

Conséquence : Une solution du système $\mathcal{S}$ est obtenue en donnant à $x_{r+1}, \dots, x_p$ des valeurs quelconques, les $x_1, \dots, x_r$ prenant alors les valeurs uniques :

$$x_i = -\lambda_{r+1,i} x_{r+1} - \dots - \lambda_{p,i} x_p + \alpha_i.$$

Conclusion :

* Pour qu'il y ait une solution unique il **faut** que $r = p$.

* Si $r = n$ alors le système possède au moins une solution (car $\text{vect}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p) = E$)

* Si $r = p = n$ alors le système possède une unique solution.

3. Interprétation linéaire

Soit E un $\mathbb{K}$ -EV de dimension p rapporté à une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$.

Soit F un $\mathbb{K}$ -EV de dimension n rapporté à une base $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ l'unique application linéaire associée à la matrice A du système $\mathcal{S}$ ($A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$)

Soit $\vec{v}$ le vecteur de F défini par $\vec{v} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ écrit dans la base $\mathcal{C}$.

Résoudre $\mathcal{S}$ revient à chercher un vecteur $\vec{x}$ tel que $\boxed{f(\vec{x}) = \vec{v}}$.

Discussion : Le système possède une solution **SSI** $\vec{v} \in \text{Im} f$.

Résolution :

Premier cas : $\vec{v} \notin \text{Im} f$.

Le système $\mathcal{S}$ n'admet aucune solution.

Deuxième cas : $\vec{v} \in \text{Im} f$.

Soit $\vec{v}_0 \in E$ tel que $\vec{v} = f(\vec{v}_0)$. On a alors :

$$f(\vec{x}) = \vec{v} \iff f(\vec{x}) = f(\vec{v}_0) \iff f(\vec{x} - \vec{v}_0) = 0 \iff \vec{x} - \vec{v}_0 \in \ker f \iff \vec{x} \in \vec{v}_0 + \ker f$$

Conséquence : L'ensemble des vecteurs $\vec{x}$ solutions a une structure de **sous-espace affine (S.E.A.)**.

Conclusion :

Posons $r = \text{rg} f$.

* Si $r = p$, le système possède au **plus** une solution (car $\ker f = \{0\}$)

* Si $r = n$, le système possède au **moins** une solution (car $\text{Im} f = F$)

* Si $r = p = n$, le système possède une **unique** solution (car f est bijective). De plus la solution est $f^{-1}(\vec{v})$.

4. Résolution d'un système $\mathcal{S}$

Définition : On appelle système de **Cramer** tout système de n équations à n inconnues de rang n .

Conséquence : La matrice A du système $\mathcal{S}$ est inversible, le système admet donc une **unique solution**. Sous forme matricielle : $\boxed{\mathcal{S} \iff AX = B \iff X = A^{-1}B}$.

5. Méthode pratique "PIVOT DE GAUSS" de résolution d'un système $\mathcal{S}$

Théorème : On ne change pas l'ensemble des solutions d'un système $\mathcal{S}$ en effectuant les opérations (dites élémentaires) suivantes :

- * Échange de 2 lignes.

Notation : $L_i \leftrightarrow L_j$

* Remplacement d'une ligne L_i par cette ligne L_i additionnée de λ fois une autre ligne L_j .

Notation : $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$

* Remplacement d'une ligne L_i par cette ligne L_i multipliée par $\boxed{\lambda \neq 0}$.

Notation : $L_i \leftarrow \lambda L_i$.

Remarque : On peut également échanger l'ordre des inconnues (par exemple :

$\overline{3x_1 + x_2 + 7x_3 = 5}$ devient $x_2 + 3x_1 + 7x_3 = 5$)

Algorithme de Gauss : Par permutation des lignes et éventuellement des inconnues on amène un coefficient non nul : $\underline{\alpha_1}$ devant l'inconnue "en haut et à gauche" : ce coefficient non nul est appelé "pivot". A l'aide de ce pivot par des opérations du type $L_i \leftarrow L_i - \lambda L_1$ on fait apparaître des 0 **sous** ce pivot :

[illegible]

Puis on réitère ce procédé jusqu'en "bas". D'où on obtient :

$$S \iff \left\{ \begin{array}{l} \underline{\alpha_1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ \underline{\alpha_2}x_2 + \dots + a'_{2,p}x_p = b'_2 \\ \vdots \\ \underline{\alpha_r}x_r + \dots + a'_{r,p}x_p = b'_r \\ 0 = b'_{r+1} \\ \vdots \\ 0 = b'_n \end{array} \right. \quad \text{Avec } \forall i \in [1, r] : \alpha_i \neq 0.$$

Discussion :

- (a) Si l'un des b'_i avec $i \geq r+1$ est non nul, alors le système $\mathcal{S}$ n'admet aucune solution.
- (b) Si $b'_{r+1} = b'_{r+2} = \dots = b'_n = 0$ et $r = p$, alors le système $\mathcal{S}$ admet une unique solution que l'on détermine par le "bas" : On calcul x_p puis $x_{p-1} \dots$ jusqu'à x_1 .
- (c) Si $b'_{r+1} = b'_{r+2} = \dots = b'_n = 0$ et $r < p$, alors on pose $\lambda_{r+1} = x_{r+1}$, $\lambda_{r+2} = x_{r+2} \dots$, $\lambda_n = x_n$ qui "deviennent" des paramètres (pouvant prendre des valeurs quelconques dans $\mathbb{K}$) et on exprime, à l'aide du système obtenu, $x_1, x_2, \dots, x_r$ en fonctions de ces paramètres $\lambda_{r+1}, \lambda_{r+2}, \dots, \lambda_n$.

Exemple : $\mathcal{S} \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + 2y - 2z = 7 \\ 2x + 3y - z = 10 \end{cases}$

$$\text{On a } \mathcal{S} \iff \left\{ \begin{array}{ll} x+y+z=3 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ y-3z=4 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ y-3z=4 & \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ll} x+y+z=3 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ y-3z=4 & 0=0 \\ 0=0 & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{array} \right.$$

On pose $\lambda = z$. On a alors $\mathcal{S} \iff \begin{cases} x + y + z = 3 \\ y - 3z = 4 \\ z = \lambda \end{cases} \iff \begin{cases} x = -4\lambda - 1 \\ y = 3\lambda + 4 \\ z = \lambda \end{cases}$

Conclusion : L'ensemble des solutions de $\mathcal{S}$ est $S = \{(-4\lambda - 1, 3\lambda + 4, \lambda) \text{ tel que } \lambda \in \mathbb{K}\}$.

Remarque : L'ensemble des solutions a bien une structure de S.E.A. : S est la droite affine de $\mathbb{K}^3$ passant par le point $\Omega(-1, 4, 0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(-4, 3, 1)$.

Disposition des calculs "néo-classique" :

$$\mathcal{S} \iff \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 & 7 \\ 2 & 3 & -1 & 10 \end{array} \right) \iff \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \end{array} \right) \iff \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \text{ etc....}$$

6. Résolution d'un système S avec les déterminants (Formules de Cramer)

[illegible]

On pose

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} \text{ et pour } i \in [1, n] : \Delta_{x_i} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \cdots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

On alors l'unique solution $(x_1, \dots, x_n)$ du système $\mathcal{S}$ donné par les formules dites de Cramer :

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \dots, x_n = \frac{\Delta_{x_n}}{\Delta}.$$

Exercice : Problème des bœufs de Newton.

75 bœufs ont broutés en 12 jours l'herbe d'un pré de 60 ares ; 81 bœufs ont broutés en 15 jours celle d'un pré de 72 ares. Combien de bœufs un pré de 96 ares pourra t-il nourrir pendant 18 jours ? On suppose constantes la ration quotidienne de chaque animal, la quantité d'herbe existant initialement par are et la quantité d'herbe qui pousse par are quotidiennement.

FORMULE 1

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n - 1 + n = \sum_{k=1}^n k = \frac{\quad}{2}$$

Démonstration :

Récurrence : si on pose $S_n = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n$, on a $S_1 = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$ et si $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ alors $S_{n+1} = S_n + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{(n+1)(n+1+1)}{2}$

Autre démonstration :

$$S = 1 + \quad 2 \quad + \quad 3 \quad + \dots + n - 2 + n - 1 + n$$

$$S = n + n - 1 + n - 2 + \dots + \quad 3 \quad + \quad 2 \quad + \quad 1$$

D'où $S + S = (1 + n) + (2 + n - 1) + (3 + n - 2) + \dots + (n - 2 + 3) + (n - 1 + 2) + (n + 1) = n(n + 1)$ et donc $S = \frac{n(n+1)}{2}$

Remarque : cette formule est aussi valable pour $n = 0$.

On a de même

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{\quad}{6}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \sum_{k=1}^n k^3 = (\quad)^2$$

FORMULE 2

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall q \in \mathbb{C} \text{ et } q \neq 1 : 1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n = \sum_{k=0}^n q^k = \frac{\quad}{1 - q}$$

Démonstration : Récurrence.

Conséquence : $\forall i \in \mathbb{N}, \forall n \geq i, \forall q \in \mathbb{C} \text{ et } q \neq 1 :$

$$q^i + q^{i+1} + q^{i+2} + \dots + q^n = \sum_{k=i}^n q^k = q^i \sum_{k=i}^n q^{k-i} = q^i \sum_{k'=0}^{n-i} q^{k'} = q^i \frac{\quad}{1 - q}$$

Remarque : Pour $q = 1 : 1 + 1 + 1^2 + 1^3 + \dots + 1^n = \sum_{k=0}^n 1 = \quad$.

FORMULE 3

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (a, b) \in \mathbb{C}^2 :$

$$a^n - b^n = (a - b)(\quad + \quad + \dots + \quad) = (a - b) \left(\sum_{k=0}^{n-1} \quad \right)$$

Démonstration : Si $a = 0$ alors le résultat est évident sinon $a^n - b^n = a^n(1 - q^n)$ avec $q = \frac{b}{a}$.

Or $1 - q^n = (1 - q)(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1})$, donc $a^n - b^n = a^n(1 - q)(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}) = a^n(1 - \frac{b}{a})(1 + \frac{b}{a} + (\frac{b}{a})^2 + \dots + (\frac{b}{a})^{n-1})$
 $= (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + a^1b^{n-2} + b^{n-1})$.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, notée aussi (u_n) , une suite de réels.

1. **Suite majorée** : (u_n) est majorée si .
2. **Suite minorée** : (u_n) est minorée si .
3. **Suite bornée** : (u_n) est bornée si elle est ou si

$$\exists M \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M.$$
4. **Suite croissante** : (u_n) est croissante si $\forall n \in \mathbb{N}$,
5. **Suite décroissante** : (u_n) est décroissante si $\forall n \in \mathbb{N}$,
6. **Suite monotone** : (u_n) est monotone si (u_n) est croissante ou si (u_n) est décroissante.
C'est-à-dire : $\forall n \in \mathbb{N}$,
7. **Suite strictement croissante** : (u_n) est strictement croissante si $\forall n \in \mathbb{N}$,
8. **Suite strictement décroissante** : (u_n) est strictement décroissante si $\forall n \in \mathbb{N}$,
9. **Suite strictement monotone** : (u_n) est monotone si (u_n) est strictement croissante ou si (u_n) est strictement décroissante.
C'est-à-dire :
10. **Suite stationnaire** : (u_n) est stationnaire si
11. **Suite convergente** : (u_n) est convergente si

$$\exists L \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall \varepsilon > 0,$$
12. **Suite divergente** : (u_n) est divergente si elle n'est pas convergente. C'est-à-dire si

$$\forall L \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon > 0 \text{ tel que}$$
13. **Suite divergente vers $+\infty$** : (u_n) est divergente vers $+\infty$ si

$$\forall A > 0,$$
14. **Suite divergente vers $-\infty$** : (u_n) est divergente vers $-\infty$ si

$$\forall A > 0,$$
15. **Suites adjacentes** : (a_n) et (b_n) sont dites adjacentes si :
16. **Suite extraite** : (v_n) est extrait de (u_n) s'il existe une application ϕ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, strictement croissante, telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, .
17. **Comparaison de suites, quand $v_n \neq 0$ pour tout n** :

$$u_n = O(v_n) \text{ si } \left(\frac{u_n}{v_n}\right) \text{ est } .$$

$$u_n = o(v_n) \text{ si } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{u_n}{v_n}\right) = .$$

$$u_n \sim v_n \text{ si } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{u_n}{v_n}\right) = .$$

Remarque "Complexe" : Les définitions 10.-11.-12. et 16.-17.-18. sont encore valables et restent totalement identiques avec les suites de $\mathbb{C}$.

La 3. est valable avec la définition $\exists M \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M.$

RÉSUMÉ : suites récurrentes : $u_{n+1} = f(u_n)$

I est un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $(u_n)_n$ vérifie $u_{n+1} = f(u_n)$.

Remarque : Avant de faire une étude de f , essayez d'avoir un maximum de renseignements :
par exemple, si $u_{n+1} = u_n + u_n^2$, alors $(u_n)_n$ est ...
* si $u_0 \geq 0$, alors...

S'il n'y a rien d'évident, alors :

1. Faire le tableau de variation de f .

2. Tracer la courbe, ainsi que la 1ère bissectrice : $y = x$. (et faire quelques essais pour u_0 ...)

3. Résoudre $f(x) = x$ (points fixes) pour avoir les limites éventuelles de $(u_n)_n$ (voir théorème fondamental plus bas).
Autres intérêts :
* cela permet de mieux définir les points d'intersection de la courbe et de la 1ère bissectrice.
* cela permet de compléter le tableau de variation pour le point n°4...

4. Déterminer des intervalles stables sur lesquels f est monotone.

5. Utiliser son cours :

Théorème d'existence : Si $u_0 \in I$ et si I est stable par f alors la suite $(u_n)_n$ existe bien et $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$.

Monotonie : Si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$, alors

1er cas (le plus utilisé) : Si f est croissante sur I alors $(u_n)_n$ est monotone, donc

* si $u_1 - u_0 \geq 0$ alors $(u_n)_n$ est croissante.
* si $u_1 - u_0 \leq 0$ alors $(u_n)_n$ est décroissante.

Or $u_1 - u_0 = f(u_0) - u_0$: on recherche donc le signe de $f(x) - x$

2ème cas : Si f est décroissante sur I alors $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont monotones (et de monotonie contraire).

A savoir : si on pose $v_n = u_{2n}$, alors $v_{n+1} = \dots$: or $f \circ f$ est croissante sur I , on est donc ramené au 1er cas avec la fonction $f \circ f$ et la suite $(v_n)_n$.

On peut donc étudier le signe de $u_2 - u_0 = f \circ f(u_0) - u_0$ (signe de $f \circ f(x) - x$).

On peut parfois simplement remarquer que $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont bornées (et monotones donc convergentes).
De plus, les limites possibles de $(u_{2n})_n$ sont les racines de $f \circ f(x) = x$... (Voir(*))

Rappel du Théorème fondamental :

On suppose que la suite $(u_n)_n$ définie par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, existe bien (u_0 étant donné).

Si $(u_n)_n$ converge vers L et si f est continue en L , alors L vérifie : $L = f(L)$.

Remarque : si f est continue sur $I =]1, 3[$ (: stable par f et $u_0 \in]1, 3[$) , et si $(u_n)_n$ converge, alors peut-on dire que sa limite L vérifie $L = f(L)$?

(*) Supplément de cours : si $f(x) - x$ est polynômiale, alors toute racine de $f(x) - x$ est racine de $f \circ f(x) - x$ (car ...), donc $f \circ f(x) - x$ est divisible par $f(x) - x$ (démonstration valable pour des racines simples).

exercice : soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$, mq $P(X) - X$ divise $P(P(X)) - X$.

Rappel du critère séquentiel : I est un intervalle de $\mathbb{R}$, $(a, b) \in \mathbb{R}$, $a \in I$ ou a est une extrémité de I .

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \iff \text{pour toute suite } (u_n)_n \text{ qui converge vers } a, \text{ on a } \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = b$$

En particulier, si f est continue en L , alors, $\lim_{x \rightarrow L} f(x) =$

Autre exemple classique : suites définies par $f_n(u_n) = 0$:

L'existence de u_n se prouve grâce au théorème de la bijection :

si f est continue et strictement monotone sur I , alors f $\left\{ \begin{array}{l} \text{réalise} \\ \text{induit} \end{array} \right.$ une bijection de I sur $f(I)$.

Principale technique : contraposée de la définition d'une fonction croissante.

$[x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)] \iff [$
 (voir aussi le tableau de variation de f_n qui permet de deviner)

Remarque : u_{n+1} est définie par
 et on compare u_n et u_{n+1} en calculant par exemple $f_n(u_{n+1})$ que l'on compare à $f_n(u_n) = 0$

Suites arithmético-géométrique : $u_{n+1} = au_n + b, a \neq 1$:

Technique : écrire l'un en dessous de l'autre la définition et ce qu'on obtient pour une suite constante :

$\begin{array}{l} u_{n+1} = au_n + b \\ \ell = a\ell + b \end{array}$. On fait la différence, **puis** on remplace ℓ par sa valeur.

Remarque : on peut poser $v_n = u_n - \ell \dots$

Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 :

$$\boxed{u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n} \quad u_0 \in \mathbb{C}, u_1 \in \mathbb{C}. ((a, b) \in \mathbb{C}^2, a \neq 0 \text{ et } b \neq 0)$$

Pensez : "suites géométriques"

On résout l'équation caractéristique (E) : $\boxed{x^2 = a x + b}$

* si (E) a 2 racines : r_1 et r_2 alors $\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$.

* si (E) a une racine double : r alors $\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n =$

Remarque : Si $(a, b, u_0, u_1) \in \mathbb{R}^4$ et si (E) admet 2 racines complexes non réelles (conjuguées) : $\rho e^{i\theta}$ et $\rho e^{-i\theta}$, alors
 $\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n =$

1. **Point adhérent** : Soit $A \subset \mathbb{R}$.

On dit que $\alpha \in \mathbb{R}$ est un point adhérent de A si $\forall r > 0, A \cap [\alpha - r, \alpha + r] \neq \emptyset$.

2. **Point intérieur** : Soit $A \subset \mathbb{R}$.

On dit que $a \in A$ est un point intérieur à A si $\exists r > 0$ tel que $[a - r, a + r] \subset A$.

Vocabulaire des fonctions réelles

On appelle fonction réelle toute fonction de I dans $\mathbb{R}$ où I est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et généralement une réunion d'intervalles. Soit, donc, f une fonction réelle de I dans $\mathbb{R}$.

1. **Fonction majorée** : f est dite majorée si $\exists M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I, f(x) \leq M$.

2. **Fonction minorée** : f est dite minorée si $\exists m \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I, f(x) \geq m$.

3. **Fonction bornée** : f est dite bornée si f est majorée et minorée ou si $\exists M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I, |f(x)| \leq M$.
Démontrer l'équivalence.

4. **Fonction croissante** : f est dite croissante sur I si $\forall (x, y) \in I^2, x < y \implies f(x) \leq f(y)$.

5. **Fonction décroissante** : f est dite décroissante sur I si $\forall (x, y) \in I^2, x < y \implies f(x) \geq f(y)$.

6. **Fonction monotone** : f est dite monotone sur I si f est croissante sur I ou si f est décroissante sur I .

7. **Fonction strictement croissante** : f est dite strictement croissante sur I si

$$\forall (x, y) \in I^2, x < y \implies f(x) < f(y).$$

8. **Fonction strictement décroissante** : f est dite strictement décroissante sur I si

$$\forall (x, y) \in I^2, x < y \implies f(x) > f(y).$$

9. **Fonction strictement monotone** : f est dite strictement monotone sur I si f est strictement croissante sur I ou si f est strictement décroissante sur I .

10. **Fonction continue en a** : f est dite continue en $a \in I$ si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

C'est-à-dire : $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0$ tel que $\forall x \in I, |x - a| < \alpha \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

11. **Fonction continue sur I** : f est dite continue sur I si f est continue en chaque point de I .

12. **Fonction continue à droite en a** : f est dite continue à droite en $a \in I$ si $\lim_{x \searrow a} f(x) = f(a)$.

13. **Fonction continue à gauche en a** : f est dite continue à gauche en $a \in I$ si $\lim_{x \nearrow a} f(x) = f(a)$.

14. **Subdivision** : On appelle subdivision du segment $[a, b]$, toute suite finie strictement croissante dont le premier terme est a et le dernier est b . C'est-à-dire la donnée de :

$$x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b.$$

15. **Fonction en escalier** : f est dite en escalier sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision

$\sigma = (x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b)$ de $[a, b]$ telle que f soit constante sur chacun des intervalles $]x_i, x_{i+1}[$ avec $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.

16. **Fonction continue par morceaux** : f est dite continue par morceaux sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision $\sigma = (x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b)$ de $[a, b]$ telle que f soit continue sur chacun des intervalles $]x_i, x_{i+1}[$ avec $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ et que f admette une limite à gauche et à droite pour les points x_i avec $i \in \{0, 1, \dots, n\}$.

17. **Fonction lipschitzienne** : f est dite lipschitzienne sur I si :

$$\exists k \geq 0 \text{ tel que } \forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

18. **Fonction contractante** : f est dite contractante sur I si :

f est k -lipschitzienne avec $0 \leq k < 1$.

19. **Fonction convexe** : f est dite **convexe** (graphe $\cup$) sur I (intervalle) si :

$$\forall (x, y) \in I^2, \forall t \in [0, 1] : f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

20. **Fonction concave** : f est dite **concave** (graphe $\cap$) sur I (intervalle) si :

$$\forall (x, y) \in I^2, \forall t \in [0, 1] : f(tx + (1-t)y) \geq tf(x) + (1-t)f(y).$$

21. **Fonction périodique** : f est dite périodique sur $\mathbb{R}$ si :

$$\exists T > 0 \text{ tel que } \forall x \in \mathbb{R} : f(x) = f(x + T).$$

22. **f^+, f^-** : $f^+ : I \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto f(x)$ si $f(x) \geq 0$
 $x \mapsto 0$ si $f(x) < 0$

$f^- : I \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto 0$ si $f(x) \geq 0$
 $x \mapsto -f(x)$ si $f(x) < 0$

Remarque : f^- est la fonction négative de f^+ .

Liens : $f^+ + f^- = |f|$ et $f^+ - f^- = f$.

23. Une propriété ($\mathcal{P}$) portant sur f définie sur I est dite vraie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$ s'il existe un réel $r > 0$ tel que cette propriété ($\mathcal{P}$) soit vraie sur $I \cap [a - r, a + r]$.
 Une propriété ($\mathcal{P}$) portant sur f définie sur I est dite vraie au voisinage de $+\infty$ s'il existe un réel $B > 0$ tel que cette propriété ($\mathcal{P}$) soit vraie sur $I \cap [B, +\infty[$.
24. **Comparaison des fonctions :**
 Soit a un réel ou $\pm\infty$,
 $f(x) = O(g(x))$ si $\frac{f}{g}$ est au voisinage de a .
 $f(x) = o(g(x))$ si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.
 $f(x) \sim g(x)$ si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.
25. **Extremums :**
 Soit a un point de I .
 On dit que a est un maximum global de f si : $\forall x \in I, f(x) \leq f(a)$.
 On dit que a est un minimum global de f si : $\forall x \in I, f(x) \geq f(a)$.
 On dit que a est un maximum local de f si : $\exists r > 0$ tel que $\forall x \in I \cap [a - r, a + r], f(x) \leq f(a)$.
 On dit que a est un minimum local de f si : $\exists r > 0$ tel que $\forall x \in I \cap [a - r, a + r], f(x) \geq f(a)$.
 On dit que a est un maximum global strict de f si : $\forall x \in I, x \neq a \implies f(x) < f(a)$.
 On dit que a est un minimum global strict de f si : $\forall x \in I, x \neq a \implies f(x) > f(a)$.
 On dit que a est un maximum local strict de f si :
 $\exists r > 0$ tel que $\forall x \in I \cap [a - r, a + r], x \neq a \implies f(x) < f(a)$.
 On dit que a est un minimum local strict de f si :
 $\exists r > 0$ tel que $\forall x \in I \cap [a - r, a + r], x \neq a \implies f(x) > f(a)$.
26. **Limite finie en $a \in \mathbb{R}$:** Soit a un point adhérent à I et $L \in \mathbb{R}$. On dit que f converge vers L en a ou que $f(x)$ tend vers L quand x tend vers a et l'on note $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ si :
 $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0$ tel que
27. **Limite infinie en $a \in \mathbb{R}$:** Soit a un point adhérent à I . On dit que f diverge vers $+\infty$ en a ou que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers a et l'on note $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ si :
 $\forall A > 0, \exists \alpha > 0$ tel que
 On a une définition analogue si $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers a .
28. **Limite finie en $+\infty$:** Soit $L \in \mathbb{R}$. On dit que f converge vers L en $+\infty$ ou que $f(x)$ tend vers L quand x tend vers $+\infty$ et l'on note $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ si :
 $\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0$ tel que
 On a une définition analogue si $f(x)$ tend vers L quand x tend vers $-\infty$.
29. **Limite infinie en $+\infty$:** On dit que f diverge vers $+\infty$ en $+\infty$ ou que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ et l'on note $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ si :
 $\forall A > 0, \exists B > 0$ tel que
 On a une définition analogue si $f(x)$ tend vers $\pm\infty$ quand x tend vers $\pm\infty$.
Exemple : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$:
30. **Limite à gauche, à droite :** Soit a un point adhérent à I et $L \in \mathbb{R}$. On dit que f converge vers L en a à gauche ou que $f(x)$ tend vers L quand x tend vers a à gauche et l'on note $\lim_{x \nearrow a} f(x) = L$ si : $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0$ tel que
- Écrire les notions de limite en $\pm\infty$ et de limite infinie à gauche et à droite.
31. **Fonction de classe C^1, C^n, C^∞, C^1 par morceaux :**
 On dit qu'une fonction f est de classe C^1 sur I si f est dérivable sur I et que la dérivée f' est continue sur I .
 On dit qu'une fonction f est de classe C^n sur I si f est n fois dérivable sur I et que la dérivée n -ième $f^{(n)}$ est continue sur I (donc f est de classe C^0 ssi f est continue).
 On dit qu'une fonction f est de classe C^∞ sur I si pour tout n , f est n fois dérivable sur I (ou que pour tout n , f est de classe C^n sur I).
 On dit qu'une fonction f est de classe C^1 par morceaux sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision $\sigma = (x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b)$ de $[a, b]$ telle que f soit de classe C^1 sur chacun des intervalles $]x_i, x_{i+1}[$ avec $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ et que f et f' admettent des limites à gauche et à droite pour les points x_i avec $i \in \{0, 1, \dots, n\}$.

I Formules de Taylor

1. **T.R.I** (T.R.I.=

Soit f de classe C^{n+1} sur un intervalle I (f fonction réelle ou vectorielle de la variable réelle)

Soit $(a, b) \in I^2$. On a alors :

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \dots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \int_a^b$$

Démonstration : I.P.P., $\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt =$

Remarque : Pour $n = 0$, on a $f(b) =$

2. **I.T.L.** (I.T.L.=

Soit f de classe C^{n+1} sur un intervalle I (f fonction réelle ou vectorielle de la variable réelle) Soit $(a, b) \in I^2$. On a alors :

$$\left| f(b) - [f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \dots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)] \right| \leq \frac{M}{(n+1)!}$$

où $M = \sup\{|f^{(n+1)}(t)|, t \in [a, b]\}$ ou bien M majorant de $|f^{(n+1)}(t)|$ sur $[a, b]$.

3. **T.Y.** (T.Y.= Soit f de classe C^n sur un intervalle I (f fonction réelle ou vectorielle de la variable réelle) Soit $(a, x) \in I^2$. On a alors :

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) +$$

4. **Résumé** : T.Y. est une formule **ale** qui donne une indication très précise de f lorsque x **tend** vers a : on l'utilise pour avoir des renseignements locaux en a . A l'inverse les formules de TRI et I.T.L. sont des formules **ales** qui donnent une égalité (TRI) ou une inégalité (I.T.L.) sur tout un intervalle : elles sont plus puissantes et plus précises que TY (et plus utilisées dans les concours à l'écrit...)

II. DL usuelles

Donner les DL des fonctions suivantes en 0 à l'ordre n . Pour chaque DL on écrira les 3 premiers termes du développement puis le n-ième terme :

$$\frac{1}{1-x} =$$

$$\frac{1}{1+x} =$$

$$\frac{1}{1+x^2} =$$

$$\arctan x =$$

$$e^x =$$

$$\sin x =$$

$$\cos x =$$

$$\operatorname{ch} x =$$

$$\operatorname{sh} x =$$

$$\ln(1+x) =$$

$$\ln(1-x) =$$

$$(1+x)^\alpha =$$

$$\sqrt{1+x} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$\arccos x =$$

$$(\text{ordre } 3) \tan x =$$

III Développements limités

- Définition 1** en 0 : f admet un DL en 0 à l'ordre n s'il existe $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tels que
$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + o(x^n)$$
Définition 2 en a (réel) : f admet un DL en a à l'ordre n s'il existe $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tels que
$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$$
Définition 3 en $\pm\infty$: f admet un DL en $\pm\infty$ à l'ordre n s'il existe $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tels que
$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right)$$
- Retour à zéro** : On peut toujours se ramener à un DL en 0 :
 En a (réel) : On pose $x = a + t$ avec t qui tend donc vers 0 et $g(t) = f(a+t)$
 Si $g(t) = a_0 + a_1t + \dots + a_nt^n + o(t^n)$ alors $f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$
 En $\pm\infty$: On pose $x = \frac{1}{t}$ avec t qui tend donc vers 0 et $g(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$
 Si $g(t) = a_0 + a_1t + \dots + a_nt^n + o(t^n)$ alors $f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right)$
- Parités** : Le DL est unique, si f est paire les coefficients impairs sont 0, idem si f est impaire.
- Troncature d'un DL** : Si f admet un DL à l'ordre n en $a \in \overline{\mathbb{R}}$, elle admet un DL à tout ordre inférieur à n .
- DL et équivalent** : $g(t) = a_0 + a_1t + \dots + a_nt^n + o(t^n)$ en 0, alors $g(t) \underset{a}{\sim} a_pt^p$ avec p le premier indice tel que $a_p \neq 0$.
- Interprétation du DL à l'ordre n** :
 $n = 0$: f est constante en a (réel) (ou se prolonge par continuité).
 $n = 1$: f est dérivable en a (réel).
 $n \geq 2$:
- Allure locale** : Si $f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + o((x-a)^2)$, alors la tangente en a est la droite d'équation $D/y = a_1$ et le signe de a_2 s'il est non nul donne, **localement** la position du graphe de f en a par rapport à sa tangente.

IV Calculs pratiques des Développements limités

- TY** : La Formule de Taylor-Young donne le DL des fonctions usuelles, ainsi que l'existence **théorique** du DL à l'ordre n d'une fonction de classe C^n .
- Somme** : Si f et g admettent un DL à l'ordre n en a , alors $f + \lambda g$ admet un DL à l'ordre n en a : c'est la combinaison linéaire des DL.
- Produit** : Si f et g admettent un DL à l'ordre n en a , alors fg admet un DL à l'ordre n en a : c'est la troncature au degré n du produit des DL.
- Composée** : Soit $F(t) = f(g(t))$. Si f et g admettent un DL à l'ordre n en 0 et si $\boxed{g(0) = 0}$, alors F admet un DL à l'ordre n : c'est la troncature au degré n de la composée des DL.
- Quotient** : On se ramène à une composée de fonction et on utilise le DL de $g(t) = \frac{1}{1+t}$:

$$f(x) = \frac{1}{b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n + o(x^n)}$$
 avec $b_0 \neq 0$ et donc on a

$$f(x) = \frac{1}{b_0} \frac{1}{1 + \frac{b_1}{b_0}x + \dots + \frac{b_n}{b_0}x^n + o(x^n)} = \frac{1}{b_0} g\left(\frac{b_1}{b_0}x + \dots + \frac{b_n}{b_0}x^n + o(x^n)\right)$$
- Intégration** : Si f' admet un DL en a à l'ordre n alors f admet un DL en a à l'ordre $n+1$.
Applications : DL de $\ln(1+x)$, $\text{Arctan } x$, $\text{Arccos } x$, $\text{Arcsin } x, \dots$
Remarque : On ne peut dériver un DL sans précaution. Si on doit le faire on utilise TY et on fait le tour (avec l'intégration des DL).

IV Appendice

- Développements limités Généralisés** :
 On appelle Développements limités Généralisés de f en a (réel), toutes expressions du type :

$$f(x) = \frac{\alpha_p}{(x-a)^p} + \dots + \frac{\alpha_1}{x-a} + a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$$
Remarque : le p est unique et en a f est équivalent à :
 On appelle Développements limités Généralisés de f en $\pm\infty$, toutes expressions du type :

$$f(x) = \alpha_px^p + \dots + \alpha_1x + a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right)$$
- Développements Asymptotiques** : "Sommes de fonctions dont l'une est négligeable devant la précédente". Exemples :
 en 0, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \ln x + 4 + \sqrt[3]{x} + x^2 + x^5 \ln x + o(x^5 \ln x)$.
 pour $x = 0.0001$, cela donne :

$$f(x) = 100.0 + (-9.210340372) + 4 + 4.641588834 \cdot 10^{-2} + 10^{-8} + (-0.9210340372 \cdot 10^{-19}) + o$$

3. **Applications** : Allures locales des fonctions, convergence-divergence des séries numériques et des séries de fonctions, calculs d'équivalents simples de suites et de fonctions, intégrabilité des fonctions.....

FONCTIONS DE LA VARIABLE RÉELLE

Questionnaire de révision. Quand la réponse est courte on l'écrira sur cette feuille, sinon on écrira la réponse, l'énoncé ou la démonstration sur une feuille ou un cahier à côté.

1. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-1}{x} \right)^x$:
2. Limite, continuité, dérivabilité, fonction de classe C^n , le principal fournisseur est :
3. Énoncer le théorème de la limite monotone.
4. Énoncer le théorème d'encadrement.
5. Critère séquentiel de la continuité : voir les suites.
6. **Application** : Soit f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\forall p \in \mathbb{Z}$ et $\forall q \in \mathbb{N}^* : f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{q^2}{p^2 + q^2}$. Déterminer $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
7. Démontrer le théorème des valeurs intermédiaires (V.I.). Conséquence principale de V.I. ?
8. Soit f d'un intervalle I dans un intervalle J , **bijective**.
Alors f continue sur $I \implies$
Alors f dérivable en $a \in I$ et $\implies$
9. Formule $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$ avec f bijective, $b = f(a)$ et
10. **En 0** :
 $x^n = o(x^p)$ si $n < p$. $o(x^n) - o(x^n) =$ $o(x^n) + o(x^p) =$ $x^p o(x^n) =$
 $\left(\frac{1}{x^2} + 7\frac{1}{x} + 5 + 2x + o(x)\right)\left(\frac{1}{x} - 3 + 5x^2 + o(x^2)\right) =$
11. Donner les équivalents simples en 0, $+\infty$, 2 et 1 de $3x^4 + 2x^3 - 5x^2$.
12. $\sin x \underset{0}{\sim}$ $\cos x \underset{0}{\sim}$ $\tan x \underset{0}{\sim}$ $\arctan x \underset{0}{\sim}$ $\arccos x \underset{0}{\sim}$ $\arcsin x \underset{0}{\sim}$ $\ln(1+x) \underset{0}{\sim}$
 $\ln(x) \underset{1}{\sim}$ $\operatorname{th} x \underset{0}{\sim}$
 $\arctan x \underset{+\infty}{\sim}$ $\operatorname{ch} x \underset{+\infty}{\sim}$ $\operatorname{sh} x \underset{+\infty}{\sim}$ $\operatorname{th} x \underset{+\infty}{\sim}$
13. Soit $a > 0$ et $b > 0$. A-t-on $|\ln x|^a \underset{0}{\ll} \frac{1}{x^b}$ ou $\frac{1}{x^b} \underset{0}{\ll} |\ln x|^a$?
14. Chaîne en $+\infty$: Soit $a > 0$, $b > 0$ et $c > 0$. On a : $|\ln x|^a \underset{+\infty}{\ll} x^b \underset{+\infty}{\ll} e^{cx}$
15. Rolle :
16. Accroissements finis (A.F.) :
17. Montrer que si f' est bornée sur $I \subset \mathbb{R}$ alors f est lipschitzienne.
18. Théorème de prolongement de la dérivée.
19. Théorème de prolongement de la dérivée (cas infini).
20. Comment étudier la dérivabilité en un point d'arrêt : Soit f dérivable sur $I - \{a\}$ et continue sur I . Étude en a .
21. f est de classe C^0 si
 f est de classe C^1 si
 f est de classe C^2 si
 f est de classe C^n si
 f est de classe C^{n+1} si ou si
 f est de classe C^∞ si
22. Formule de Leibniz : $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$
23. Comment montrer que f est convexe
quand f est C^2 :
quand f est C^1 :
quand f est rien du tout :

1. Fonction logarithme

Définition : On appelle fonction logarithme réelle $\boxed{\ln}$: la primitive de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$ qui s'annule en 1. On a donc :

$$\boxed{\forall x \in]0, +\infty[, \ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt}$$

Propriétés

(a) La fonction $\ln$ est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$ et $\forall x \in]0, +\infty[: \ln'(x) = \frac{1}{x}$.

(b) $\boxed{\forall (x, y) \in]0, +\infty[^2 , \ln(xy) = \ln x + \ln y}$.

Démonstration : Soit $a \in]0, +\infty[$, **fixé**. On considère l'application

$$f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} , x \mapsto \ln(ax) - \ln x - \ln a.$$

f est dérivable et $\forall x \in]0, +\infty[, f'(x) = \frac{a}{ax} - \frac{1}{x} = 0$. On a donc f qui est constante sur $]0, +\infty[$ et comme $f(1) = 0$, on en déduit que $\forall x \in]0, +\infty[, f(x) = 0$. On conclut en prenant $a = y$.

Corollaire : $\forall x \in]0, +\infty[, \forall n \in \mathbb{Z} : \boxed{\ln(x^n) = n \ln x}$. (Récurrence)

(c) La fonction $\ln$ est bijective de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

Démonstration : Comme $\forall x \in]0, +\infty[: \ln'(x) = \frac{1}{x} > 0$, $\ln$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$. On a donc le tableau de variation suivant :

x	0	1	$+\infty$
$\ln'$		+	+
$\ln$	L_1	↗ 0	L_2

Le théorème de la limite monotone assure que la fonction $\ln$ admet une limite (éventuellement infinie) en 0 et en $+\infty$.

Comme $2 > 1$ on a $\ln 2 > \ln 1 = 0$ d'où : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(2^n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln 2 = +\infty$. Le critère séquentiel de la limite en $+\infty$ donne $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(2^n) = L_2$. Par l'unicité de la limite on en déduit que $L_2 = +\infty$.

Pour calculer L_1 on utilise la formule $\ln(x) = -\ln(\frac{1}{x})$ qui tend vers $-L_2 = -\infty$ lorsque x tend vers 0^+ . Donc $L_1 = -\infty$.

Conclusion : $\ln$ réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $]L_1, L_2[= \mathbb{R}$.

(d) $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0}$

Démonstration : Considérons la fonction f définie par $f(x) = \ln x - \sqrt{x}$.

f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $\forall x \in]0, +\infty[: f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2 - \sqrt{x}}{2x}$ d'où le tableau de variation de f :

x	0	4	$+\infty$
f'	+	0	-
f		$\nearrow$ $\ln 4 - 2$	$\searrow$

et donc $\forall x \geq 4 : f(x) \leq f(4)$ d'où :

$\forall x \geq 4 : 0 \leq \ln x \leq f(4) + \sqrt{x}$ soit $\forall x \geq 4 : 0 \leq \frac{\ln x}{x} \leq \frac{f(4)}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ et par le théorème d'encadrement on conclut.

(e) $\ln$ est concave sur $]0, +\infty[$. ($\forall x \in]0, +\infty[: \ln''(x) = \frac{-1}{x^2} < 0$).

(f) **Tracé**

2. Fonction exponentielle réelle

Définition : On appelle fonction exponentielle réelle $\exp$, la fonction réciproque de la fonction $\ln$.

Propriétés

- (a) La fonction $\exp$ est continue et bijective de $\mathbb{R}$ sur $]0, +\infty[$, comme fonction réciproque d'une fonction continue et bijective.
- (b) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \exp(x + y) = \exp(x) \exp(y)$.

Démonstration : Posons $X = \exp(x)$ et $Y = \exp(y)$. On a donc $x = \ln X$ et $y = \ln Y$, d'où $x + y = \ln X + \ln Y = \ln(XY)$ et donc $XY = \exp(x + y)$, c'est-à-dire $\exp(x) \exp(y) = \exp(x + y)$.

- (c) La fonction $\exp$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R} : \exp'(x) = \exp(x)$.

Démonstration : Le théorème de la dérivée d'une fonction réciproque assure que comme $\forall x \in]0, +\infty[\ln'(x) \neq 0$, la fonction $\exp$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\forall y \in \mathbb{R} : \exp'(y) = \frac{1}{\ln'(x)}$ avec $x = \exp(y) \iff y = \ln(x)$.

On a donc $\forall y \in \mathbb{R} : \exp'(y) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x = \exp(y)$.

On en déduit ensuite que $\exp' = \exp$ est de classe C^1 donc $\exp$ est de classe C^2 et par récurrence $\exp$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$\exp'$	+	
$\exp$	0	$+\infty$

- (d) Le tableau de variation de $\exp$ se déduit de celui de $\ln$:

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\exp(y)}{y} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Enfin $\exp$ est convexe sur $\mathbb{R}$. ($\forall x \in \mathbb{R} : \exp''(x) = \exp(x) > 0$).

- (e) **Tracé**

- (f) **Définition** : On appelle nombre de Neper et on le note $e = \exp(1)$ ($e \simeq 2,718...$). La propriété (b) montre que $\forall n \in \mathbb{Z} : \exp(n) = \exp(1)^n = e^n$. On peut également (à faire en exercice) montrer que $\forall r \in \mathbb{Q} : \exp(r) = \exp(1)^r = e^r$.

Conséquence fondamentale :

Par analogie avec ces 2 formules, on notera $\forall x \in \mathbb{R} : e^x = \exp(x)$.

La propriété (b) devient donc $e^x + y = e^x e^y$.

3. Fonction puissance

Définition : Soit $x \in]0, +\infty[$ et soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on appelle "x puissance α ", le réel noté et défini par $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$.

Propriétés : $\forall x \in]0, +\infty[$ et $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta, (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$

4. Limites classiques

$$\forall \alpha > 0 \text{ et } \forall \beta > 0 : \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{(\ln x)^\beta} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha |\ln x|^\beta = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha e^{-x} = 0.$$

Démonstration : $\frac{x^\alpha}{(\ln x)^\beta} = \left[\frac{x^{\frac{\alpha}{\beta}}}{\ln x} \right]^\beta = \left[\frac{x^{\frac{\alpha}{\beta}}}{\frac{\beta}{\alpha} \ln(x^{\frac{\alpha}{\beta}})} \right]^\beta = \lambda \left[\frac{X}{\ln X} \right]^\beta$; finir en exercice.

5. Logarithme en base a

Définition : Soit $a > 0$ tel que $a \neq 1$. On appelle fonction logarithme de base a la fonction notée $\log_a$ et définie sur

$$]0, +\infty[\text{ par } \log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$$

	<table> <tr> <td>x</td> <td>0</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>$\log_a$</td> <td>$-\infty$</td> <td>$+\infty$</td> </tr> </table>	x	0	$+\infty$	$\log_a$	$-\infty$	$+\infty$		<table> <tr> <td>x</td> <td>0</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>$\log_a$</td> <td>$+\infty$</td> <td>$-\infty$</td> </tr> </table>	x	0	$+\infty$	$\log_a$	$+\infty$	$-\infty$
x	0	$+\infty$													
$\log_a$	$-\infty$	$+\infty$													
x	0	$+\infty$													
$\log_a$	$+\infty$	$-\infty$													
Pour $a > 1$:		et pour $0 < a < 1$:													

6. Exponentielle de base a

Définition : Soit $a > 0$. On appelle fonction exponentielle de base a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $a^x = e^{x \ln a}$

	<table> <tr> <th>x</th> <th>$-\infty$</th> <th>$+\infty$</th> </tr> <tr> <td>a^x</td> <td></td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td></td> <td>0</td> <td></td> </tr> </table>	x	$-\infty$	$+\infty$	a^x		$+\infty$		0		et pour $0 < a < 1$:	<table> <tr> <th>x</th> <th>$-\infty$</th> <th>$+\infty$</th> </tr> <tr> <td>a^x</td> <td>$+\infty$</td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td>0</td> </tr> </table>	x	$-\infty$	$+\infty$	a^x	$+\infty$				0
x	$-\infty$	$+\infty$																			
a^x		$+\infty$																			
	0																				
x	$-\infty$	$+\infty$																			
a^x	$+\infty$																				
		0																			
Pour $a > 1$:																					

RÉSOLUTION APPROCHÉE DE $f(x) = 0$

A. Méthode des tangentes (NEWTON)

Problème : Soit f une fonction de classe C^2 (au moins) qui s'annule en un réel α et tel que cette racine soit simple (sinon on a $f'(\alpha) = 0$ et fait l'étude avec f'). Le but du problème est de trouver une valeur numérique de α . On supposera que l'on peut dégager un intervalle suffisamment petit $[a, b]$ pour que $f(a)$ et $f(b)$ soient de signe opposé et tel que f' et f'' soit de signe constant. Quitte à changer f en $-f$ on peut supposer que f'' soit strictement positif sur $[a, b]$ et quitte à changer f en g avec $g(x) = f(-x)$ on peut supposer que f'' et f' soit strictement positif sur $[a, b]$.

On considère donc le cas "standard" :

f de classe C^2 sur $[a, b]$.

$f(a) < 0$ et $f(b) > 0$.

$\forall x \in [a, b], f'(x) > 0$ et $f''(x) > 0$.

On note α l'unique racine de f sur $[a, b]$.

Soit s l'abscisse du point d'intersection de la tangente à f en b et de l'axe des abscisses.

Proposition : On a

$$s = b - \frac{f(b)}{f'(b)}$$

1. D'une part comme f est convexe sur $[a, b]$, f est "au dessus de ses tangentes" et donc $s \geq \alpha$ et comme f est croissante sur $[a, b]$ on a $f(s) \geq 0$, .

D'autre part **L'inégalité de Taylor-Lagrange (ITL)** sur $[\alpha, b]$ donne :

$$|f(\alpha) - (f(b) + f'(b)(\alpha - b))| \leq \frac{(\alpha - b)^2}{2} M_2 \text{ où on a posé } M_2 = \sup\{|f''(x)|, x \in [a, b]\}.$$

Donc comme $f(\alpha) = 0$, on a :

$$\begin{aligned} |f(b) + f'(b)(\alpha - b)| &\leq \frac{(\alpha - b)^2}{2} M_2 \implies |f(b) - bf'(b) + \alpha f'(b)| \leq \frac{(\alpha - b)^2}{2} M_2 \\ \implies |f(b) - bf'(b) + \alpha f'(b)| &\leq \frac{(\alpha - b)^2}{2} M_2 \implies |-sf'(b) + \alpha f'(b)| \leq \frac{(\alpha - b)^2}{2} M_2 \\ \implies |\alpha - s| &\leq \frac{(\alpha - b)^2}{2} \frac{M_2}{f'(b)} \end{aligned}$$

$$\text{Conclusion : } 0 \leq s - \alpha \leq \frac{(b - \alpha)^2}{2} \frac{M_2}{f'(b)}$$

2. On itère le processus : $s_{n+1} = s_n - \frac{f(s_n)}{f'(s_n)}$ et $s_0 = b$

On a avec le 1. , $\forall n \in \mathbb{N} : s_n \geq \alpha$ donc $f(s_n) \geq 0$ et donc **la suite (s_n) est décroissante.** Comme elle est minorée par α , elle converge vers un réel L qui vérifie $L = L - \frac{f(L)}{f'(L)}$ d'où $f(L) = 0$ ce qui implique $L = \alpha$.

$$\text{Conclusion : } \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \alpha$$

De plus $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq s_{n+1} - \alpha \leq \frac{(s_n - \alpha)^2}{2} \frac{M_2}{f'(s_n)}$

Soit m_1 un minorant de f' sur $[a, b]$ (par exemple $f'(a)$ puisque f' est croissante) et posons $\lambda = \frac{M_2}{2m_1}$ et $\varepsilon_0 = b - a$ On a $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq s_{n+1} - \alpha \leq \lambda(s_n - \alpha)^2$ et par récurrence on peut conclure :

$$\text{Conclusion : } \forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq s_n - \alpha \leq \frac{1}{\lambda} (\lambda \varepsilon_0)^{2^n}$$

Remarque fondamentale : Cette majoration de $s_n - \alpha$ n'a d'intérêt que **si** $|\lambda \varepsilon_0| < 1$ (et même assez proche de 0) : il faudra donc que $b - a$ soit assez petit autrement dit que a et b soit assez proche de α ! cela dit dès que $|\lambda \varepsilon_0| < 1$ la suite (s_n) converge **très** vite vers α .

Exemple : Déterminer une valeur approchée à 10^{-20} près de la racine réelle du polynôme $P = -X^3 + X + 1$. Une rapide étude de la fonction g définie par $g(x) = -x^3 + x + 1$ montre que P admet une unique racine réelle $\alpha \in [1, 2]$. D'autre part sur $[1, 2]$, g est décroissante et concave. Considérons f définie par $f(x) = -g(x) = x^3 - x - 1$. f est croissante et convexe sur $[1, 2]$. Le calcul de M_2 et m_1 donne $M_2 = 12$ et $m_1 = 2$ et donc $|\lambda \varepsilon_0| = 3 > 1$. On resserre donc l'intervalle : $f(1, 3)f(1, 4) < 0$ et on prend donc $a = 1, 3$ et $b = 1, 4$ d'où $M_2 = 8, 4$ et $m_1 = 4, 07$ et $q = \lambda \varepsilon_0 = \frac{8, 4}{2 \times 4, 07} 0, 1 = 0.103.. < 0.11$ et $0 < \frac{1}{\lambda} < 1$

Conséquence : Avec $s_0 = 1, 4$ on a donc : $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq s_n - \alpha \leq (0.11)^{2^n}$

Le premier entier n tel que $(0.11)^{2^n} < 10^{-20}$ est $n = 5$ et la calcul de s_5 donne

$s_5 = 1.324717957244746025960909...$ et donc $\alpha = 1.3247179572447460259...$ à 10^{-20} près.

B. Méthode des cordes (LAGRANGE)

On se place dans les mêmes hypothèses standard que pour la méthode de Newton.

On considère s l'abscisse du point d'intersection de la corde des points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ avec l'axes des abscisses.

On a : $s = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$ et on montre que, en posant $M_2 = \sup\{|f''(x)|, x \in [a, b]\}$ que,

$$0 \leq \alpha - s \leq \frac{(b - a)^3 M_2}{8(f(b) - f(a))}$$

Soit à tracer la fonction f .

1. **Domaine de définition** : D (mis sous forme de réunion d'intervalles).
2. **Parité-Imparité** et donc réduction du domaine à $D \cap \mathbb{R}^+$ et symétrie
3. **T-Périodicité** et donc réduction du domaine à $[a, a + T]$ et translations des "2 côtés".
4. **Variations** et tableau de variation de la fonction f sur D .
5. **Branches infinies**

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pm\infty$ alors on a deux méthodes :

- (a) On calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ (si elle existe!).

Si $a = \infty$ on a une branche parabolique de direction (Oy) ,

si $a = 0$ on a une branche parabolique de direction (Ox) ,

sinon on calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - ax = b$ (si elle existe!).

Si $b \in \mathbb{R}$ on a une asymptote oblique $\mathcal{D}/y = ax + b$ et si $b = \infty$ on a une branche parabolique de direction $\mathcal{D}/y = ax$.

- (b) On développe la fonction f au voisinage de $+\infty$ (avec un DL par exemple) pour obtenir (si c'est possible) : $f(x) = ax + b + \varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varepsilon(x) = 0$.

Remarque : On fait de même en $-\infty$.

Exemples : Reconnaître sur la page suivante les branches infinies en $+\infty$ pour les fonctions suivantes :

$$f(x) = x^2$$

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$f(x) = 3x + \sqrt{x}$$

$$f(x) = 3x + \frac{7}{x}$$

$$f(x) = 3x + \frac{\sin x}{x}$$

$$f(x) = 3x + \sin x$$

6. Point d'arrêt

Par **Point d'arrêt** on entend tout point a "au bord" d'un des intervalles de D où f se prolonge par continuité ou si f est définie mais pas dérivable à priori en a . Pour tracer correctement la courbe au voisinage d'un tel point il faut étudier la dérivabilité en ce point pour obtenir la pente. Pour cela il y a deux méthodes :

- (a) On calcule $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} f'(x) = L$ (si elle existe!).

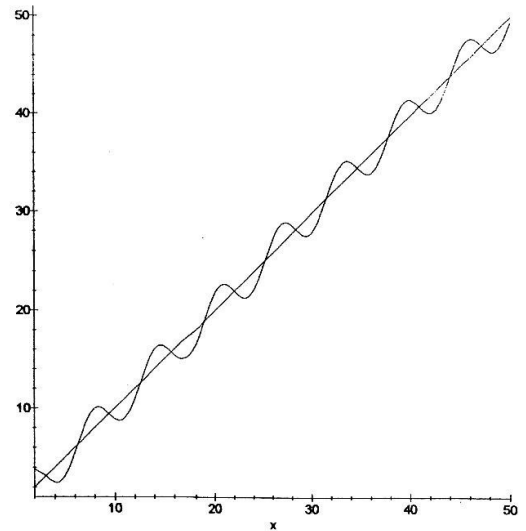
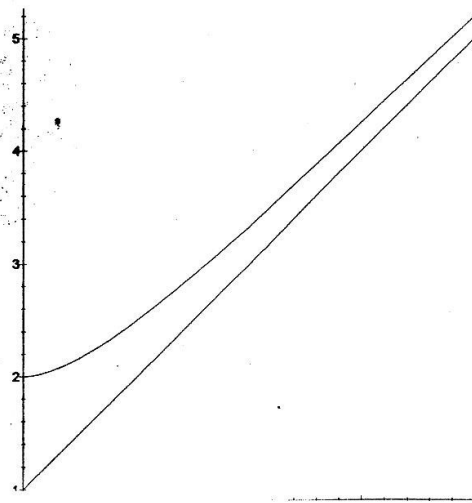
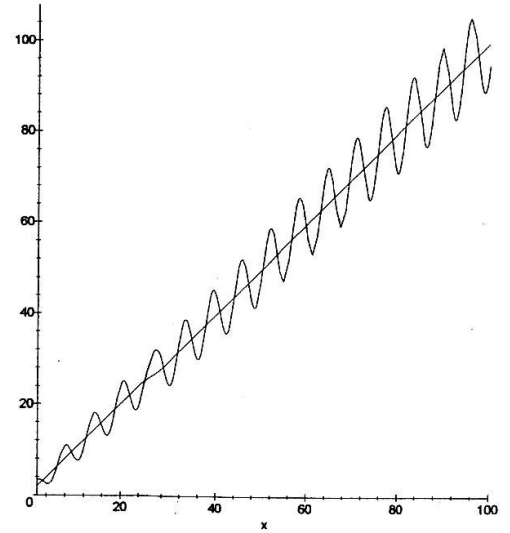
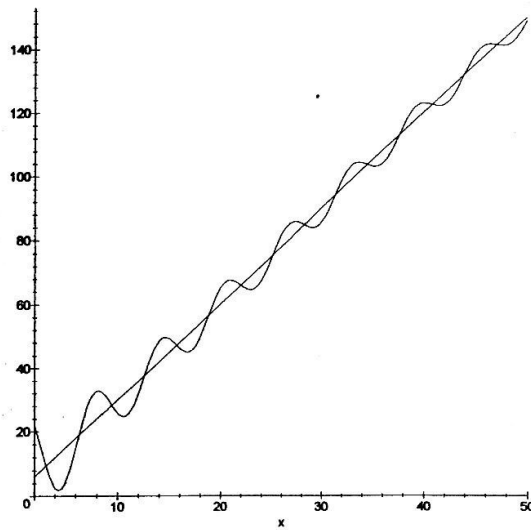
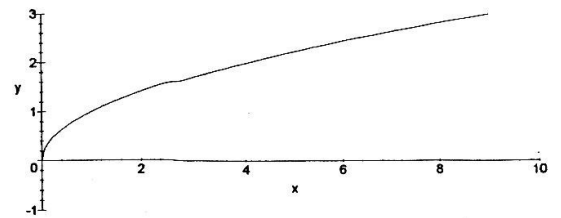
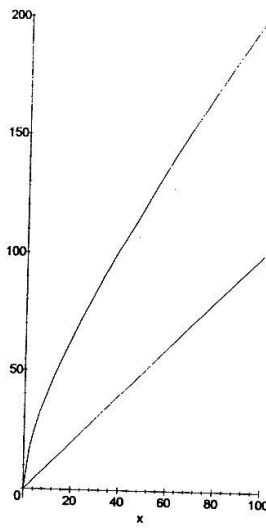
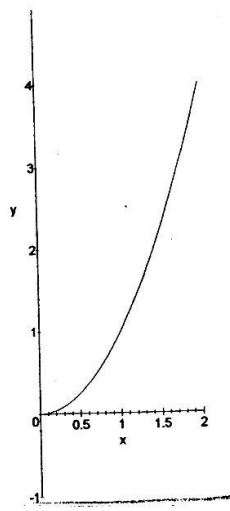
Si $L \in \mathbb{R}$ alors le théorème de **prolongement de la dérivée** assure que f est dérivable en a et que $f'(a) = L$. On a de plus la dérivée qui est continue en a (donc f est de classe C^1 en a).

Si $L = \infty$ alors f présente en a une tangente verticale.

- (b) On calcule $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = L$ (si elle existe!).

Si $L \in \mathbb{R}$ alors f est dérivable en a et $f'(a) = L$.

Si $L = \infty$ alors f présente en a une tangente verticale.



Etudier les branches infinies

1. **GÉNÉRALITÉS** : (u_n) est une suite à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

(a) **Série** :

Définition : La série de terme général u_n est la **suite** $(S_n)_n$ avec $S_n =$

$$\sum_{k=0}^n u_k \text{ est appelée } (S_n)_n \text{ est aussi notée } (S_n(u))_n$$

On dit que la série de terme général u_n converge si

(b) **Somme d'une série convergente** :

Définition : Somme d'une série **convergente** : (ce n'est pas vraiment une **somme**, mais une **limite**)

On la note $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ ou $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$

On a donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_k = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$

Notation : La série de terme général u_n est aussi notée $(\sum u_n)$ ou $(\sum_{n \geq 0} u_n)$ ou $\sum u_n$.

Remarque 1 : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ existe signifie que $(\sum u_n)$ converge.

Remarque 2 : si u_n est définie à partir de $n_0 > 0$, alors on définit $S_n = \sum_{k=n_0}^n u_k$ et on note la série $(\sum_{n \geq n_0} u_n)$

(c) **Reste** :

Définition : Reste d'une série convergente.

$$R_n = \quad S_n = \quad S =$$

Relations : $S = \quad R_n =$

(d) **Exemples** :

i) Montrer que $(\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n})$ diverge.

ii) Montrer que $(\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)})$ converge et calculer sa somme.

Démonstration 1

(e) **Condition nécessaire de convergence** :

Attention : erreur classique. Vrai ou faux (barrez la proposition qui est fausse+ contre-exemple)

$(\sum u_n)$ converge $\implies \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ VRAI - FAUX

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \implies (\sum u_n)$ converge VRAI - FAUX

On dit que $(\sum u_n)$ **diverge grossièrement** si

Exemple : $(\sum (-1)^n)$ diverge car

(f) **Opération sur les séries** : **Linéarité de la somme**

* Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Si $(\sum u_n)$ converge et $(\sum v_n)$ converge alors $\sum (u_n + \lambda v_n)$ converge.

Démonstration 2

Attention : Réciproque fausse! Contre-exemple : $(\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$

* Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$. Si $(\sum u_n)$ diverge alors $(\sum \lambda u_n)$ diverge.

* Si $(\sum u_n)$ converge et $(\sum v_n)$ diverge alors $\sum (u_n + v_n)$ diverge.

"Antipropriété" : Si $(\sum u_n)$ diverge et $(\sum v_n)$ diverge alors

(g) **Séries complexes** :

Si $u_n \in \mathbb{C}$, $(\sum u_n)$ converge $\iff (\sum \operatorname{Re} u_n)$ converge et $(\sum \operatorname{Im} u_n)$ converge].

Dans ce cas $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Re} u_n + i \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Im} u_n$, donc

2. **SÉRIES à TERMES POSITIFS : Théorèmes de comparaison** : $\leq$ $\geq$ O o $\sim$:

(a) **Lemme fondamental** : Si $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \geq 0$, alors $(S_n)_n$ est croissante. (dém :

Conséquences : Si $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \geq 0$, * $(\sum u_n)$ converge $\iff (S_n)_n$ est majorée.

* si $(\sum u_n)$ diverge alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$.

Exemple à connaître : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} =$, car

(b) **Règle de comparaison n°1** :

Si pour $n \geq n_0$, on a $0 \leq u_n \leq v_n$, alors [si $(\sum v_n)$ converge alors $(\sum u_n)$ converge aussi]
(et sa contraposée

[Démonstration 3](#)

(c) **Absolute convergence et semi-convergence** :

Définition : $(\sum u_n)$ est absolument convergente si

Théorème n°2 : Lien avec la convergence :

si $(\sum u_n)$ converge alors $(\sum |u_n|)$ converge

[Démonstration 4](#)

Attention : Réciproque fautive ! Contre-exemple :

$u = (1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \dots)$ Déterminer u_{2n} , u_{2n+1} , $S_{2n+1}(u)$, $S_{2n}(u)$, $S_{2n+1}(|u|)$ et $S_{2n+1}(|u|)$. Conclure.

[Démonstration 5](#)

Définition : $(\sum u_n)$ est semi convergente si

Inégalité triangulaire pour les séries absolument convergentes :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$

Exemple : Montrer que $\sum (\frac{\cos n}{n^2})$ converge.

(d) **Règle de comparaison n°2** :

Si * $(u_n)_n$ est une suite **complexe**,

* $(v_n)_n$ est une suite réelle **positive** à partir d'un certain rang

* $u_n = O(v_n)$,

alors si [si $(\sum v_n)$ converge alors $(\sum u_n)$ converge a]

(et sa contraposée

[Démonstration 6](#)

Remarque : on a le même théorème si $u_n = o(v_n)$ (en effet, $u_n = o(v_n) \implies$

(e) **Règle des équivalents** : $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont 2 suites réelles.

si $u_n \sim v_n$ et si $v_n \geq 0$ à partir d'un certain rang, alors $(\sum u_n)$ et $(\sum v_n)$ sont de même nature.

Démonstration 7

Remarque : On a le même résultat avec des séries négatives (passer à $-u_n$). Donc pour l'étude d'une série, c'est que son terme général soit ou non de

(f) **Développement décimal (propre et impropre)** : Revoir votre cours de MPSI.

3. SÉRIES DE RÉFÉRENCE

(a) **Séries géométriques** : $z \in \mathbb{C}$. $(\sum z^n)$ converge $\iff |z| < 1$.

Dans ce cas, $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ et $\sum_{n=k}^{+\infty} z^n = \frac{z^k}{1-z}$

Exemple : Montrer que $(\sum \frac{e^{in}}{2^{2n}})$ est absolument convergente et calculer sa somme.

(b) **Séries de Riemann** : $(\sum \frac{1}{n^\alpha})$ converge $\iff \alpha > 1$

Exemples :

$(\sum \frac{1}{n^{1.001}})$: VG - $(\sum \frac{1}{n^{0.987}})$: VG - $(\sum \frac{1}{n^{-0.007}})$: VG - $(\sum \frac{1}{n^{2014}})$: VG

FRACTIONS RATIONNELLES

1. Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}(X)$

Soit $F = \frac{P(X)}{(X - \alpha_1)^{s_1} \dots (X - \alpha_n)^{s_n}}$ une fraction irréductible de $\mathbb{C}(X)$

où les α_i sont 2 à 2 distincts, non racines de $P(X)$ (la fraction a été simplifiée au maximum) et les s_i des entiers naturels non nuls.

Alors il existe un unique polynôme A et des uniques complexes $a_{i,j}$ tels que :

$$F = A(X) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{s_i} \frac{a_{i,j}}{(X - \alpha_i)^j}$$

2. Exemples :

Écrire, sans effectuer les calculs, la décomposition en éléments simples des fractions suivantes :

(a) $F = \frac{1}{(X-3)(X-7)(X+4)} =$

(b) $F = \frac{X^4+1}{(X-3)(X-7)(X+4)} =$

(c) $F = \frac{1}{(X-3)^2(X-7)^3(X+4)} =$

(d) $F = \frac{1}{(X-a_1)\dots(X-a_n)} =$

(e) $F = \frac{P(X)}{(X-a_1)^{s_1}} =$

(f) $F = \frac{X^2-5X+4}{X^3-1} =$

3. Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}(X)$

$$\text{Soit } F = \frac{P(X)}{(X - \alpha_1)^{s_1} \dots (X - \alpha_n)^{s_n} (X^2 + \beta_1 X + \gamma_1)^{t_1} \dots (X^2 + \beta_m X + \gamma_m)^{t_m}}$$

une fraction irréductible de $\mathbb{R}(X)$ où les α_i sont 2 à 2 distincts et non racines de $P(X)$ (la fraction a été simplifiée au maximum), où les couples (β_i, γ_i) sont 2 à 2 distincts et vérifient : $\beta_i^2 - 4\gamma_i < 0$, les s_i et les t_i des entiers naturels non nuls.

Alors il existe un unique polynôme A , des uniques **réels** $a_{i,j}$, $b_{i,j}$, $c_{i,j}$ tels que :

$$F = A(X) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{s_i} \frac{a_{i,j}}{(X - \alpha_i)^j} + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{t_i} \frac{b_{i,j}X + c_{i,j}}{(X^2 + \beta_i X + \gamma_i)^j}$$

4. Exemples :

Écrire, sans effectuer les calculs, la décomposition en éléments simples des fractions suivantes :

$$(a) F = \frac{1}{(X - 3)^2(X - 7)^3(X + 4)} =$$

$$(b) F = \frac{X^{20} + 13}{X(X - 1)^2(X^2 + 3X + 5)(X^2 + 1)^3} =$$

$$(c) F = \frac{X^4}{(X^2 + X + 1)^2} =$$

$$(d) F = \frac{1}{X^4 - 1} =$$

5. Vocabulaire :

Donner la définition, pour une fraction rationnelle de $\mathbb{K}(X)$ $F = \frac{P}{Q}$, de :

- (a) fraction irréductible :
- (b) degré d'une fraction F :
- (c) pôle d'ordre s de F :
- (d) racine d'ordre s de F :
- (e) partie entière de F :

6. Méthode de calcul :

$$(a) \text{ Calcul de la partie entière de } \frac{P}{Q} :$$

$$(b) \text{ Soit } \alpha \text{ un pôle simple de } F = \frac{P}{Q} = \frac{P}{(X - \alpha)Q_1}.$$

$$\text{Alors on a } F = A + \frac{a}{X - \alpha} + \dots \text{ avec } a = \text{et (H.P.) } a =$$

$$(c) \text{ Soit } F = \frac{P}{Q} = \frac{P}{(X^2 + bX + c)Q_1} \text{ avec } b^2 - 4c < 0$$

$$\text{Alors on a } F = A + \frac{aX + a'}{X^2 + bX + c} + \dots \text{ avec } a \text{ et } a' \text{ calculés avec } z_0 \text{ une}$$

par la relation

$$(d) \text{ Utilisation de la parité : Par exemple si } F = \frac{X^2 + 1}{X^2(X^2 - 4)}, \text{ alors :}$$

$$F = \text{et l'on a les relations :}$$

$$(e) \text{ Utilisation du conjugué dans } \mathbb{C}(X) : \text{ Par exemple si } F = \frac{X^2 + 3}{X^4 - 1}, \text{ alors :}$$

$$F = \text{et l'on a les relations :}$$

$$(f) \text{ Utilisation de l'infini : Par exemple si } F = \frac{1}{X^2(X - 4)}, \text{ alors}$$

$$F = \text{et l'on a les relations :}$$

$$(g) \text{ autres :}$$

7. Utilisation de la décomposition en éléments simples :

Les utilisations sont principalement l'intégration des fractions rationnelles, le calcul de somme ou de séries (la décomposition fait apparaître des sommes télescopiques).

1. Fractions rationnelles

On simplifie éventuellement par changement de variable. Exemple : $\int \frac{x^4}{x^{10} + 1} dx$, CdV : $u =$

On décompose en éléments simples.

On a donc une combinaison linéaire de fonction du type :

$$\text{polynôme, } \frac{1}{x-a}, \frac{1}{(x-a)^n}, \frac{\alpha x + \beta}{x^2 + ax + b} \quad (\Delta = a^2 - 4b < 0), \frac{\alpha x + \beta}{(x^2 + ax + b)^n}$$

(a) $\int \frac{dx}{x-a} =$

(b) $\int \frac{dx}{(x-a)^n} = \int (x-a)^{-n} dx =$ avec $n \geq 2$

(c) $\int \frac{\alpha x + \beta}{x^2 + ax + b} dx = \int \frac{(2\frac{\alpha}{2}x + \frac{\alpha}{2}a) + \beta - \frac{\alpha}{2}a}{x^2 + ax + b} dx = \frac{\alpha}{2} \int \frac{2x + a}{x^2 + ax + b} dx + \gamma \int \frac{1}{x^2 + ax + b} dx$
(avec $\gamma = \text{constante}$)

i. $\int \frac{2x + a}{x^2 + ax + b} dx =$

ii. calcul de $\int \frac{1}{x^2 + ax + b} dx$. Mise en forme canonique de $x^2 + ax + b$:

$$x^2 + ax + b = (x + \frac{a}{2})^2 - \frac{\Delta}{4} = (x + \frac{a}{2})^2 + c^2 \text{ avec } c = \sqrt{\frac{-\Delta}{4}} \text{ (car } \Delta < 0)$$

Donc $\int \frac{1}{x^2 + ax + b} dx = \int \frac{1}{(x + \frac{a}{2})^2 + c^2} dx = \frac{1}{c} \arctan(\frac{x + \frac{a}{2}}{c})$

En particulier : $\int \frac{1}{x^2 + c^2} dx =$

Conséquence : $\int \frac{\alpha x + \beta}{x^2 + ax + b} dx = \frac{\alpha}{2} \ln(x^2 + ax + b) + \gamma \frac{1}{c} \arctan(\frac{x + \frac{a}{2}}{c})$

(d) $\int \frac{\alpha x + \beta}{(x^2 + ax + b)^n} dx = \frac{\alpha}{2} \int \frac{2x + a}{(x^2 + ax + b)^n} dx + \gamma \int \frac{1}{(x^2 + ax + b)^n} dx$
(avec $n \geq 2$ et $\gamma = \text{constante}$)

i. La première intégrale est de la forme $\int \frac{u'}{u^n}$

ii. Pour la deuxième, on met sous forme canonique et on effectue le changement de variable $t = \frac{x + \frac{a}{2}}{c}$:

$$\int \frac{1}{(x^2 + ax + b)^n} dx = \int \frac{1}{((x + \frac{a}{2})^2 + c^2)^n} dx = \delta \int \frac{1}{(t^2 + 1)^n} dt \text{ avec } \delta = \text{cst.}$$

Puis on effectue le changement de variable $t = \tan \theta$

$$\left(dt = (1 + \tan^2 \theta) d\theta = (1 + t^2) d\theta \text{ et } 1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} \right) : \text{d'où}$$

$$\int \frac{1}{(t^2 + 1)^n} dt = \int \cos^{2n-2} \theta d\theta \text{ puis } \underline{\text{linéarisation}}.$$

2. $\int P(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$ où P est une fonction polynômiale de 2 variables.

Méthode : On linéarise avec les formules d'Euler $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.

Ce qui donne une combinaison linéaire d'intégrales du type

$$\int \cos k\theta d\theta = \frac{1}{k} \sin k\theta \text{ et } \int \sin k\theta d\theta = \frac{-1}{k} \cos k\theta.$$

Remarque : On peut parfois éviter la linéarisation (par exemple si

$$P(\cos \theta, \sin \theta) = Q(\sin \theta) \cos \theta = Q(u)u' \text{ avec } u = \sin \theta,$$

Exemple : $\int \cos^7 \theta d\theta = \int \cos^6 \theta \cos \theta d\theta = \int (1 - \sin^2 \theta)^3 \cos \theta d\theta = \int (1 - t^2)^3 dt$ avec $t = \sin \theta$.

3. $\int R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$ où R est une fraction rationnelle de 2 variables.

On pose $\omega(\theta) = R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$ avec les règles :
 $d(-\theta) = -d\theta$, $d(\theta + C) = d\theta$, $d(C - \theta) = -d\theta$.

Règle de Bioche :

Si $\omega(-\theta) = \omega(\theta)$ alors on fait le changement de variable $t = \cos \theta$.

Si $\omega(\pi - \theta) = \omega(\theta)$ alors on fait le changement de variable $t = \sin \theta$.

Si $\omega(\theta + \pi) = \omega(\theta)$ alors on fait le changement de variable $t = \tan \theta$.

Sinon on fait le changement de variable $t = \tan \frac{\theta}{2}$ (en dernier recours).

Remarque : Pour retenir si on pose $t = \cos \theta$ ou $t = \sin \theta$ ou $t = \tan \theta$, on utilise les propriétés spécifiques à chacune des trois fonctions (cos, sin et tan) :

$t = \cos(-\theta) = \cos \theta$ ce qui est Faux pour les fonctions sin et tan "d'où" $t = \cos \theta$.

$t = \sin(\pi - \theta) = \sin \theta$ ce qui est Faux pour les fonctions cos et tan "d'où" $t = \sin \theta$.

$t = \tan(\theta + \pi) = \tan \theta$ ce qui est Faux pour les fonctions cos et sin "d'où" $t = \tan \theta$.

Rappel : Si $t = \tan \frac{\theta}{2}$ alors on a :

$$\cos \theta = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad \sin \theta = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad \tan \theta = \frac{2t}{1 - t^2}, \quad d\theta = \frac{2dt}{1 + t^2}$$

Conséquence : $\int R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta = \int R\left(\frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \frac{2t}{1 + t^2}\right) \frac{2dt}{1 + t^2}$: Fraction rationnelle "pure"

4. $\int R(\tan \theta) d\theta = \int \frac{R(t)}{1 + t^2} dt$ avec le changement de variable $t = \tan \theta$.

5. $\int P(t) e^t dt$ où P est un polynôme.

On effectue des Intégrations Par Parties en dérivant $P(t)$.

6. $\int R(\text{cht}, \text{sht}) dt$: On peut remplacer cht et sht par leurs définitions : $\text{cht} = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$ et $\text{sht} = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$. On est alors ramené au ??-ième paragraphe.

7. $\int R(\ln x) dx$

On effectue le changement de variable $t = \ln x$ ($\iff x = e^t$)

On en déduit que $\int R(\ln x) dx = \int R(t) e^t dt$ (Voir le ?? si R est un polynôme).

8. $\int R(x, \sqrt{ax + b}) dx$

L'idée est de faire disparaître la racine carrée en effectuant le changement de variable $t = \sqrt{ax + b}$ d'où $x = \frac{t^2 - b}{a}$ et $dx = \frac{2tdt}{a}$.

On en déduit que $\int R(x, \sqrt{ax + b}) dx = \int R\left(\frac{t^2 - b}{a}, t\right) \frac{2tdt}{a}$: Fraction rationnelle "pure".

9. $\int R(x, \sqrt[n]{\frac{ax + b}{cx + d}}) dx$

L'idée est de faire disparaître la racine carrée en effectuant le changement de variable $t = \sqrt[n]{\frac{ax + b}{cx + d}}$ d'où $x = \frac{b - dt^n}{ct^n - a}$.

On en déduit que $\int R(x, \sqrt[n]{\frac{ax + b}{cx + d}}) dx = \int R\left(\frac{b - dt^n}{ct^n - a}, t\right) \frac{(ad - bc)nt^{n-1}}{(ct^n - a)^2} dt$: Fraction rationnelle "pure".

10. $\int R(x, \sqrt{1 - x^2}) dx$

L'idée est de faire disparaître la racine carrée en effectuant le changement de variable $x = \sin t$ ou $x = \cos t$ d'où $\sqrt{1 - x^2} = |\cos t|$ ou $\sqrt{1 - x^2} = |\sin t|$ (les valeurs absolues seront supprimées avec le contexte et un choix des bornes les plus **rapprochées possibles**).

On en déduit que $\int R(x, \sqrt{1 - x^2}) dx = \int R(\sin t, |\cos t|) \cos t dt$ (avec $t = \sin t$).

On finit le calcul avec le ??-ième ou le ??-ième paragraphe.

11. $\int R(x, \sqrt{x^2 + 1}) dx$

L'idée est de faire disparaître la racine carrée en effectuant le changement de variable $x = \text{sht}$ d'où $\sqrt{x^2 + 1} = \text{cht}$

(car $\text{ch}^2 t - \text{sh}^2 t = 1$).

On en déduit que $\int R(x, \sqrt{x^2 + 1}) dx = \int R(\text{sht}, \text{cht}) \text{cht} dt$.

On finit le calcul avec le ??-ième paragraphe.

12. $\int R(x, \sqrt{x^2 - 1}) dx$

Idem 11. avec $\boxed{x = \text{cht}}$ d'où $\sqrt{x^2 - 1} = |\text{sht}|$.

On en déduit que $\int R(x, \sqrt{x^2 - 1}) dx = \int R(\text{cht}, |\text{sht}|) \text{sht} dt$.

On finit le calcul avec le ??-ième paragraphe.

13. $\int R(x, \sqrt{-x^2 + ax + b}) dx$

On effectue une mise en forme canonique : $-x^2 + ax + b = -[(x - \frac{a}{2})^2 - \frac{\Delta}{4}]$

Un seul cas se présente : $\Delta > 0$ (le cas $\Delta \leq 0$ est très simple : Pourquoi ?)

Donc $-x^2 + ax + b = -[(x - \frac{a}{2})^2 - c^2]$ avec $c = \sqrt{\frac{\Delta}{4}}$ (car $\Delta > 0$), puis le changement de variable $t = \frac{x - \frac{a}{2}}{c}$ qui donne $\sqrt{-x^2 + ax + b} = c\sqrt{1 - t^2}$.

On en déduit que $\int R(x, \sqrt{-x^2 + ax + b}) dx = \int R(ct + \frac{a}{2}, c\sqrt{1 - t^2}) c dt$.

On finit le calcul avec le ??-ième paragraphe.

14. $\int R(x, \sqrt{x^2 + ax + b}) dx$

On effectue une mise en forme canonique : $x^2 + ax + b = [(x + \frac{a}{2})^2 - \frac{\Delta}{4}]$

Deux cas se présentent : $\Delta < 0$ et $\Delta > 0$ (le cas $\Delta = 0$ est très simple : Pourquoi ?)

(a) $\Delta < 0$: Donc $x^2 + ax + b = (x + \frac{a}{2})^2 + c^2$ avec $c = \sqrt{\frac{-\Delta}{4}}$ (car $\Delta < 0$), puis le changement de variable $t = \frac{x + \frac{a}{2}}{c}$ qui donne $\sqrt{x^2 + ax + b} = c\sqrt{t^2 + 1}$.

On en déduit que $\int R(x, \sqrt{x^2 + ax + b}) dx = \int R(ct - \frac{a}{2}, c\sqrt{t^2 + 1}) c dt$.

On finit le calcul avec le ??-ième paragraphe.

(b) $\Delta > 0$: Donc $x^2 + ax + b = (x + \frac{a}{2})^2 - c^2$ avec $c = \sqrt{\frac{\Delta}{4}}$ (car $\Delta > 0$), puis le changement de variable $t = \frac{x + \frac{a}{2}}{c}$ qui donne $\sqrt{x^2 + ax + b} = c\sqrt{t^2 - 1}$.

On en déduit que $\int R(x, \sqrt{x^2 + ax + b}) dx = \int R(ct - \frac{a}{2}, c\sqrt{t^2 - 1}) c dt$.

On finit le calcul avec le ??-ième paragraphe.

15. Remarques

(a) Pour le reste on procède avec réflexion, habitude, observation et "astuce"

(Exemple : $\int \tan^2 t dt = \tan t - t$ car $\tan^2 t = \tan^2 t + 1 - 1$).

(b) Penser toujours aux deux principaux outils : "IPP" et "CDV".

(c) Attention Toutes ces techniques pour calculer les primitives sont élémentaires (exemples : décomposition en éléments simples - mise en forme canonique). Cependant les calculs sont un peu long et font apparaître pas mal de fractions, racines carrées. Les erreurs de calcul sont vite arrivées. Le seul remède est d'en faire un bon nombre avec beaucoup de soin et de concentration.

(d) Enfin il existe des fonctions dont les primitives ne sont pas exprimables comme "cocktail" de fonctions usuelles.

Exemple : $x \mapsto e^{x^2}$, dites cependant pourquoi elle admet des primitives et donnez-en une : $F_0(x) =$,
donner les toutes $F(x) =$

F I N

JEU DES ABRÉVIATIONS

I.P.P. - V.I. - T.L.M. - T.L.D. - V.A.D. - D.E.S. - D.S.E. - P.C.

P.S. - F.P.T. - I.T. - I.T.L. - T.R.I. - T.Y. - T.A.F. - I.A.F.

I.B.T. - T.C. - T.G. - C.B.S.S. - S.R.C. - C.C. - C.D.V. - P.T.N.

S.D. - R.S.A. - C.H. - S.W. - T.D.N. - T.S.A. - E.V.N. - O.T.N.

CVG. - DVG - B.W. - C.A. - C.N. - C.U. - C.S. - K.H. - S.F.

F.T. - HPTS - SNALG - QPLPPLM.

TABLE DES MATIÈRES

LETTRES GRECS	1
LOGIQUE	1
TRIGONOMÉTRIE	2
RELATIONS BINAIRES	4
$\mathbb{N}$ - $\mathbb{Z}$ - $\mathbb{Q}$ - $\mathbb{R}$	5
NOMBRES COMPLEXES - GÉOMÉTRIE	8
TRIGONOMÉTRIE RÉCIPROQUE	11
TRIGONOMÉTRIE HYPERBOLIQUE	12
ENSEMBLES FINIS - DÉNOMBREMENT	13
MATRICES	15
SYSTÈME D'ÉQUATIONS LINÉAIRES	18
SOMMES SUPER IMPORTANTES	22
DÉFINITIONS SUR LES SUITES RÉELLES et COMPLEXES	23
RÉSUMÉ SUITES RÉCURRENTES	24
DÉFINITIONS SUR LES FONCTIONS DE LA VARIABLE RÉELLE	26
DÉVELOPPEMENTS LIMITES	28
FONCTIONS DE LA VARIABLE RÉELLE	30
FONCTIONS LOGARITHMES ET EXPONENTIELLES RÉELLES	31
RÉSOLUTION APPROCHÉE DE $f(x) = 0$	33
TRACER LES COURBES $y = f(x)$	35
SÉRIES DE $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$	37
FRACTIONS RATIONNELLES	39
PRIMITIVES DE FONCTIONS USUELLES	41