

II. POLYNÔMES-ANNEAUX-ARITHMÉTIQUE DES POLYNÔMES : tout

POLYNÔMES

: Tout le programme de colle n°1+

Polynômes irréductibles de $\mathbb{K}[X]$.

Factorisation dans $\mathbb{K}[X]$,

Relation coefficients-racines.

ANNEAUX-ARITHMÉTIQUE DES POLYNÔMES

Anneaux - sous anneaux - morphismes d'anneaux - groupe des éléments inversibles.

Ideaux d'un anneau.

Divisibilité dans un anneau commutatif et intègre.

ARITHMÉTIQUE DES POLYNÔMES :

Théorème fondamental de structure des idéaux de $\mathbb{K}[X]$:

Idéaux de $\mathbb{K}[X]$: ils sont tous de la forme $P_0\mathbb{K}[X]$ avec P_0 unique et normalisé

PGCD et PPCM :

Soit $A_1, \dots, A_n$, n polynômes de $\mathbb{K}[X]$.

• On appelle **PGCD** de $A_1, \dots, A_n$ le **générateur normalisé** de l'idéal $A_1\mathbb{K}[X] + \dots + A_n\mathbb{K}[X]$. Notation : $D = A_1 \wedge \dots \wedge A_n$.

On a donc $A_1\mathbb{K}[X] + \dots + A_n\mathbb{K}[X] = D\mathbb{K}[X]$.

• On a pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $[\forall i \in [1, n] : P|A_i \iff P|D]$

• On appelle **PPCM** de $A_1, \dots, A_n$ le **générateur normalisé** de l'idéal $A_1\mathbb{K}[X] \cap \dots \cap A_n\mathbb{K}[X]$. Notation : $M = A_1 \vee \dots \vee A_n$.

On a donc $A_1\mathbb{K}[X] \cap \dots \cap A_n\mathbb{K}[X] = M\mathbb{K}[X]$.

• On a pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $[\forall i \in [1, n] : A_i|P \iff M|P]$

On retrouve donc bien lorsque $n = 2$, les définitions de MPSI.

Bezout - Gauss

Résolution **complète** de l'équation $AU + BV = C$.

Polynôme d'interpolation de Lagrange :

• Connaître par coeur la formule $L = \sum_{i=1}^n b_i \prod_{j=1, j \neq i}^n \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$, sa démonstration et la détermination de tous les polynômes P en fonction de L tels que pour tout $i \in [1, n]$, $P(a_i) = b_i$.

2. COURS ET EXERCICES SUR LE DÉNOMBREMENT

1. Cardinal d'un ensemble fini

• Si $f : X \rightarrow Y$ avec $|X| = |Y|$ alors

$[f \text{ est bijective}] \iff [f \text{ est injective}] \iff [f \text{ est surjective}]$ **et sa démonstration.**

Opération sur les ensembles finis : Soient E et F deux ensembles finis.

(a) Si $E \cap F = \emptyset$ (on dit que E et F sont disjoints) alors : $\text{Card}(E \cup F) = \text{Card}E + \text{Card}F$.

Généralisation : si $A_1, A_2, \dots, A_p$ sont des parties de E , 2 à 2 disjointes, alors

$\text{Card}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_p) = \text{Card}A_1 + \text{Card}A_2 + \dots + \text{Card}A_p$.

(b) • $\text{Card}(E \cup F) = \text{Card}E + \text{Card}F - \text{Card}(E \cap F)$ **et sa démonstration.**

(c) $|E \times F| = |E| \cdot |F|$, généralisation avec $|E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p|$

2. p-listes :

Soit E un ensemble fini, et $p \in \mathbb{N}^*$.

Définition : Une p -liste de E (ou un p -uplet) est un élément de E^p

Si $\text{Card}E = n$, nombre de p -listes de E et **conséquence** : $|\mathcal{F}(E, F)|$.

Si $\text{Card}E = n$, et $p \leq n$, nombre de p -listes d'éléments distincts de E .

On note parfois ce nombre A_n^p et on parle d'arrangements de E .

conséquence : Nombre d'applications injectives de X_p à p éléments dans Y_n à n éléments.

A savoir : pour $n \geq 1$, $A_n^p = n(n-1) \cdots (n-p+1)$.

Permutation de n éléments, nombre de permutations de n éléments.

3. Combinaisons :

(a) Si $\text{Card}E = n$, nombre de parties à p éléments (distincts) de E notation $\binom{n}{p}$.

• Formule de Pascal et sa démonstration (que) combinatoire.

Formule du binôme de Newton et sa démonstration (récurrence ou combinatoire)

• Formule de Vandermonde et sa démonstration :

$$\forall (a, b, n) \in \mathbb{N}^3 \quad : \quad \binom{a+b}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{a}{k} \binom{b}{n-k}$$

4. Applications faites en classe à savoir refaire

(a) Si X_p a p éléments et Y_n n éléments, nombre des applications strictement croissantes de X_p dans Y_n .

(b) Si X_p a p éléments et Y_n n éléments, alors le nombre des applications croissantes de X_p dans Y_n .

(c) $|S|$ avec $S = \{(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{N}^p \text{ tel que } x_1 + \dots + x_p = n\}$.

Nombre de façons de ranger k boules indiscernables dans b boîtes discernables.

1. EXERCICES SUR LE DÉNOMBREMENT

Tous les nombres et cardinaux usuelles.

On a fait notamment en classe :

- les dérangements,
- les surjections,
- le poker,
- le nombre de couples (A, B) tels que $A \cup B = E$ où $|E| = n$.

Prévisions : Suites réelles et complexes.