

Partie I

$f \in C^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+^*$ par TG

1 a) Posons $f(x) = \ln x - ax$

$$f'(x) = \frac{1}{x} - a \underset{\frac{1}{x} > 0}{\geq} 0$$

$$f(x) = -ax \left[1 - \frac{\ln x}{ax} \right] \underset{+ \infty}{\sim} -ax$$

x	0	α	1	$+\infty$
f'		+		
f			$-a$	$+\infty$

Par Th de bijection, $\exists ! \alpha \in]0, 1[\mid \alpha \text{ solution de } (E_a)$

b) Avec les notations de a)

x	0	$1 \leq e$	$1/a$	β	$+\infty$
f		+	0	-	
f'			0	0	

$$f(1) = -a < 0 \text{ et } f(e) = 1 - ae > 0$$

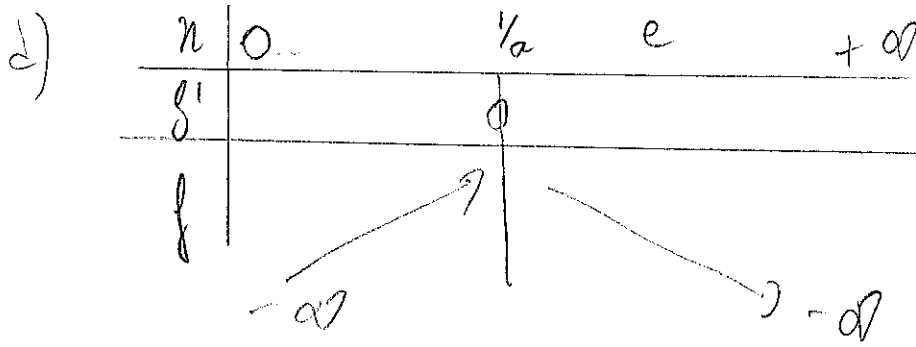
Par T.B, $\exists ! \alpha \in]1, e[\text{ et } \exists ! \beta \in]e, +\infty[\text{ solution de } (E_a)$

x	0	$1/a = e$	$+\infty$
f'		+	-
f		0	

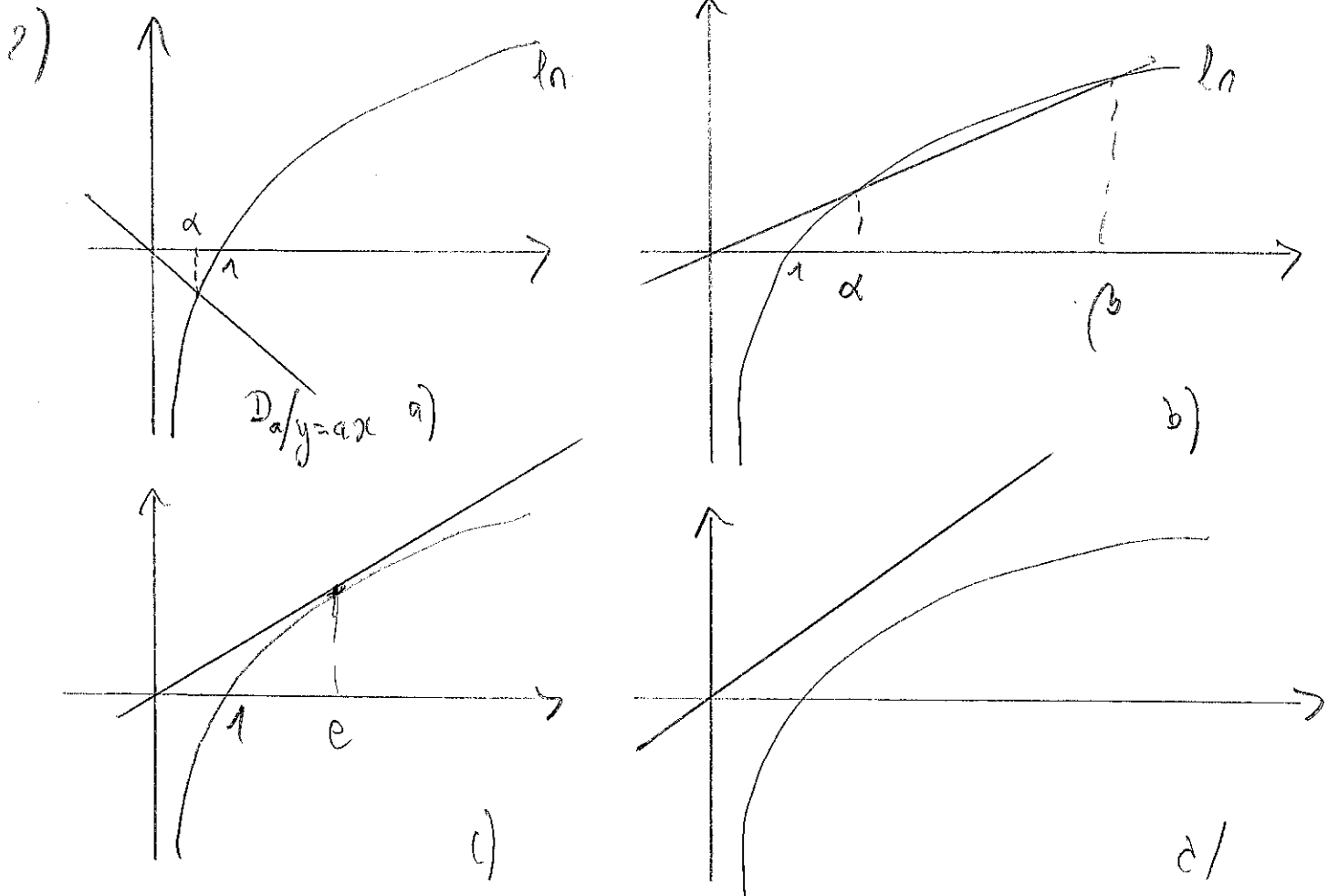
$$f(e) = 1 - \frac{1}{e}e = 0$$

d' Si $a = e$: e unique sol. de (E_a)

(2)



$g(\frac{1}{a}) = -\ln a - 1 < 0$ d' Avec solution par (E_a)



Partie II

1) Si $\exists c \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ tel que $\varphi_0(n) = c$, alors on doit avoir : $c = c^2$
 donc $c = 0$ ou $c = 1$
 Réciproquement $\varphi_0(n) = 0$ or $\varphi_1(n) = 1$ vérifie (R)

d' $n \mapsto 0$ et $n \mapsto 1$ sont les seules fonctions constantes, solutions de (R)

(3)

2) $\Leftarrow$ oui !

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{R} \quad \varphi(n) = \varphi(n+0) = \varphi(n)/\varphi(0) = 0$$

d' $\varphi(0) = 0 \Leftrightarrow \varphi = 0$ application nulle

3 a) Avec $x = y = 0 \quad \varphi(0+0) = \varphi(0)^2 \Rightarrow \varphi(0) = 0$ ou 1

d' $\boxed{\varphi(0) = 1}$

Avec $(x, y) = (t/2, t/2) \quad \varphi(t) = \varphi(t/2)^2 \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}$

Avec le 2), $\varphi(t) \neq 0 \quad d' \boxed{\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi(t) > 0}$

b) $\rightarrow H_n : \forall n \in \mathbb{R} \quad \varphi(n) = \varphi(n)^n$

* $0=0$: $\varphi(0) = 1 = 1^0$ donc H_0 vraie

* Si H_n est vraie, $\forall a \in \mathbb{R}$;

$$\varphi((n+1)a) = \varphi(na)\varphi(a) = \varphi(n)^n \varphi(a) = \varphi(n)^{n+1}$$

donc H_{n+1} vraie donc H_n vraie, $\forall n \in \mathbb{N}$

$\rightarrow$ Soit $n = -p \in \mathbb{Z}^-$, $p = -n \in \mathbb{N}$

$$\varphi(pn + (-pn)) = \varphi(pn)\varphi(-pn) = \varphi(0) = 1$$

cqs $\varphi(-n) = \varphi(-pn) = \frac{1}{\varphi(pn)}$ avec 3a), $\varphi(pn) \neq 0$ (4)

$$= \frac{1}{\varphi(n)^p} = \varphi(n)^{-p} = \varphi(n)^q$$

d) $\boxed{\forall n \in \mathbb{Z}, \forall a \in \mathbb{R} : \varphi(-n) = \varphi(n)^a}$

1) Pour $n=m$ et $a = \frac{1}{m}$: $\boxed{\varphi(1) = \varphi\left(\frac{1}{m}\right)^m}$

2) Pour $n=1$ et $a = \frac{1}{m}$:

$$\varphi\left(\frac{1}{m}\right) = \varphi\left(\frac{1}{m}\right)^q = \left(\varphi(1)^{1/m}\right)^q = \varphi(1)^{q/m}$$

d) : $\boxed{\forall n \in \mathbb{Z}, \forall m \in \mathbb{N}^* : \varphi\left(\frac{n}{m}\right) = \varphi(1)^{q/m}}$

e) $\forall n \in \mathbb{N} \quad \lfloor 10^n n \rfloor \leq 10^n n < \lfloor 10^n n \rfloor + 1$

$$\Rightarrow \lfloor 10^n n \rfloor 10^{-n} \leq n < \lfloor 10^n n \rfloor 10^{-n} + 10^{-n} \quad (10^{-n} > 0)$$

$$\Rightarrow n - 10^{-n} < x_n \leq n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\begin{array}{c} \searrow \swarrow \\ n \end{array}$$

Par théorème d'encadrement, $\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x}$

g) Comme φ est continue sur $\mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n) = \varphi\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = \varphi(x) \quad \text{critère séquentiel}$$

On $n_n \in \mathbb{Q}$ inc avec δ d), $\varphi(n_n) = \varphi(1)^{n_n}$

(5)

$$\text{Or } \varphi(1)^{n_n} = e^{n_n \ln \varphi(1)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{n \ln \varphi(1)} \quad \text{car } n \mapsto e^{an} \\ = \varphi(1)^n \quad \mathbb{C}^0/\mathbb{R}$$

Par unicité de la limite, d' $\boxed{\forall n \in \mathbb{R} \quad \varphi(n) = \varphi(1)^n}$

g) $\forall a > 0 \quad \varphi_a : n \mapsto a^n$ est sol. de (MR)

$$\text{d'o } \boxed{\mathcal{Y} = \{ n \mapsto 0, n \mapsto 1 \} \cup \{ n \mapsto a^n, a \in \mathbb{R}^{+*} \}}$$

Partie III

1a) $\boxed{P_1(x) = x}$ et $\boxed{P_2(x) = \frac{x^2 + 2x}{2}}$

b) $\boxed{P_n(0) = \begin{cases} 1 & \text{si } n=0 \\ 0 & \text{si } n \geq 1 \end{cases}}$

2) $\forall n \geq 2 \quad P'_n(x) = \frac{1}{n!} \left[(x+n)^{n-1} + (n-1)x(x+n)^{n-2} \right]$

$$= \frac{1}{n!} (x+n)^{n-2} [x+n + (n-1)x]$$

$$= \frac{n(x+n)}{n!} (x+n)^{n-2} = \frac{1}{(n-1)!} (x+n)(x+n-1)^{n-2}$$

* $P'_1(x) = 1 = P'_0(x+1)$ d'o $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad P'_n(n) = P'_{n-1}(n+1)}$

$$3) H_n : \forall (n, y) \in \mathbb{R}^2 : P_n(n+y) = \sum_{h=0}^n P_h(n) P_{n-h}(y) \quad (6)$$

$$* \underline{H_0} : P_0(n+y) = 1 = \sum_{h=0}^0 1 \times 1 \quad \text{donc } \underline{H_0 \text{ est vraie}}$$

* Si H_k est vraie jusqu'à $n-1$, avec $n \geq 1$:

$$\text{Posons } f(n) = P_n(n+y) \text{ et } g(n) = \sum_{h=0}^n P_h(n) P_{n-h}(y) \\ y \in \mathbb{R} \text{ quelconque et fixe.}$$

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{R} \quad f'(n) &= P'_n(n+y) = P_{n-1}(n+y+1) \\ &= \sum_{h=0}^{n-1} P'_h(n+1) P_{n-1-h}(y) \quad \text{c'est } H_{n-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} P'_{k+1}(n) P_{n-1-k}(y) \\ &= \sum_{k=1}^n P'_k(n) P_{n-k}(y) \quad \begin{array}{l} \text{cd } \forall \text{ bijectif} \\ "k = k+1" \end{array} \\ &= \sum_{k=0}^n P'_k(n) P_{n-k}(y) \quad \text{car } P'_0(n) = 0 \\ &= g'(n) \end{aligned}$$

cqs $f = g$ constante sur $\mathbb{R}$

$$\text{on } f(0) = P_n(y)$$

$$g(0) = \sum_{k=0}^n P_k(0) P_{n-k}(y) = P_0(0) P_n(y) + \sum_{k=1}^n 0 \times P_{n-k}(y) = P_n(y)$$

cgs : $f=g$ et H_n et m aie

(7)

$$d^0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall (n, y) \in \mathbb{R}^2 : P_n(n+y) = \sum_{k=0}^n P_k(n) P_{n-k}(y)$$

Partie IV

$$1a) \quad \forall n \geq \underbrace{\max(0, L-n)}_N + 1 : n+n \geq n+L-n+1 > n-n=0$$

$$\begin{aligned} d'ou \quad \forall n \geq N : \ln \left(\frac{(n+n)^{n-1}}{e^n n^{n-1}} \right) &= (n-1) \ln \left(1 + \frac{n}{n} \right) - n \\ &= (n-1) \left[\frac{n}{n} - \frac{n^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right] - n \\ &= \left(\frac{n-1}{n} - 1 \right) n + o\left(\frac{1}{n}\right) + o\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= -\frac{1}{n} n + o\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

$$d'ou \quad \frac{(n+n)^{n-1}}{e^n n^{n-1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

$$d \quad \boxed{(n+n)^{n-1} \sim e^n n^{n-1}}$$

$$b) \quad \text{Formule de Stirling : } \boxed{n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}}$$

$$\forall n \in \mathbb{R}^*, \forall a \in \mathbb{R} : \text{poson } u_n = P_n(n) a^n$$

$$\begin{aligned} d'ou : u_n &\sim \frac{1}{n!} n^{n-1} e^n a^n \sim \frac{e^n}{n^n \sqrt{2\pi n}} n^{n-1} e^n a^n \\ &\sim \frac{e^n}{\sqrt{2\pi}} \frac{(ae)^n}{n^{3/2}} = \sqrt{n} \end{aligned}$$

$$\text{si } |ae| > 1, \text{ par croissance comparée, } |u_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$$

ex $(\sum v_n)$ Dvg grossièrement d'où $(\sum u_n)$ aussi (8)

si $|a| \leq 1$, $v_n = O(\frac{1}{n^{3/2}})$, $\frac{1}{n^{3/2}} \geq 0$ et $(\sum \frac{1}{n^{3/2}})$

cvy (car $3/2 > 1$). Par T.C. $(\sum u_n)$ cvy absolument

$$\text{d } \boxed{(\sum P_n(x) a^n) \text{ cvy absi } |a| \leq \frac{1}{e}}$$

2 a) Posons $u_n(x) = P_n(x) a^n$, on a :

* $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n \in C^0$ m $\mathbb{R}$ par T.G.

* $(\sum u_n)$ converge simplement m $\mathbb{R}$ avec le 1 b)

* $\forall x \in [-\alpha, \alpha]$, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$|u_n(x)| \leq \frac{(|x| + \gamma)^{n-1}}{n!} a^n \leq \frac{(\alpha + \gamma)^{n-1}}{n!} a^n = \alpha_n$$

comme $\alpha_n = P_n(|\alpha|) a^n$ et $(\sum \alpha_n)$ cvy absolument (1b),

$(\sum u_n)$ cvy normalement m $[-\alpha, \alpha]$.

$$\text{d' } \boxed{\text{Par th } C^0 : F_a \in C^0 \text{ m } \mathbb{R}.}$$

admis $\left[\begin{array}{l} \text{si } (\sum u_n) \text{ et } (\sum v_n) \text{ cvy absolument, alors,} \\ (\sum w_n) \text{ cvy abs et } \sum_{n=0}^{\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} v_n \right) \text{ avec } w_n = \sum_{i=0}^n u_i v_{n-i} \end{array} \right.$

b) $\forall (n, y) \in \mathbb{R}^2,$

(9)

$$F_a(n+y) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(n+y) a^n \quad \leftarrow \text{III 3)} \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n P_k(n) P_{n-k}(y) a^n$$

Pour son, $u_n = P_n(n) a^n$ et $v_n = P_n(y) a^n$ et

$$w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k} = \sum_{k=0}^n P_k(n) P_{n-k}(y) a^{k+n-k}$$

d'après la 1b), $(\sum u_n)$ et $(\sum v_n)$ cvf absolument,

on conclut avec la 2b) :

$$\boxed{\forall (n, y) \in \mathbb{R}^2 \quad F_a(n+y) = F_a(n) F_a(y) : (\mathbb{R})}$$

Avec la II 3 (f) : $\boxed{\forall n \in \mathbb{R} : F_a(n) = F_a(1)^n}$

c) Avec les notations de 2a),

(5/2) * u_n c' est en $\mathbb{R}$ pour TO

* $(\sum u_n)$ C.S. en $\mathbb{R}$

* $\forall n \in [-\alpha, \alpha], \forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$|u'_n(n)| = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{III 2)}}}{P_{n-1}(n+1)} |a^n| \leq P_{n-1}(|a|+1) |a^n| = \alpha_n$$

et c' est av n), $(\sum \alpha_n)$ cvf donc $(\sum u'_n)$ cvf absolument $/ [-\alpha, \alpha]$

Par l'h.c', F_a est c' m $\mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{R}$: (10)

$$\begin{aligned} F_a'(n) &= \sum_{n=0}^{\infty} u_n'(n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(n) \quad \text{car } u_0(n) = a^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P_{n-1}(n+1) a^n \\ &= a \sum_{n=0}^{\infty} P_n(n+1) a^n \quad (\text{décalage d'indice}) \end{aligned}$$

$$\text{d'où } \boxed{F_a \text{ c' m } \mathbb{R} \text{ et } \forall n \in \mathbb{R} : F_a'(n) = a F_a(n+1)}$$

Remarque : si on ne voulait que F_a c' m $\mathbb{R}$, le IV 2d) et T.G. suffiraient !

$$\text{d) } \forall n \in \mathbb{R} : F_a'(n) = \left(e^{n \ln F_a(1)} \right)' = \ln(F_a(1)) F_a(1)^n.$$

$$\text{d'où } \underline{F_a'(0) = \ln F_a(1) = a F_a(1)}$$

$$\text{d'où } \boxed{F_a(1) \text{ solution de } (E_a)}$$

3 a) Admiss (faisable en fin d'année)

$$\text{b) } \begin{array}{c|c} 0 & 1/e \\ \hline \gamma & \end{array} \quad G(0) = F_0(1) = P_0(1) + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} 2^n = 1$$

Poser : $G(1/e) = \gamma$

$$\text{On a } \ln \gamma = \frac{1}{e} \gamma \quad \text{avec le 2 c)}$$

de γ solution de $(E_{1/e})$. Avec le I 1 c), $\gamma = e$

I.A 1a) Si $E = \{1, 2, 3\}$, les partitions en 2 parties
sont $\{\{1, 2\}, \{3\}\}$, $\{\{1, 3\}, \{2\}\}$, $\{\{2, 3\}, \{1\}\}$

$$d^0 \boxed{S_{3,2} = 3}$$

b) $\underline{S_{n,1} = 1}$ ($\{E\}$ unique partition à 1 partie)

$$\underline{S_{n,n} = 1} \quad (\{\{1\}, \dots, \{n\}\} \text{ ————— })$$

2 a) $\underline{\{\{4\}, \{1, 2, 3\}\}}$ (c'est la seule!)

ii) $\{\{4, 1\}, \{2, 3\}\}$ $\{\{4, 1, 2\}, \{3\}\}$
 $\{\{4, 2\}, \{1, 3\}\}$ $\{\{4, 1, 3\}, \{2\}\}$
 $\{\{4, 3\}, \{1, 2\}\}$ $\{\{4, 2, 3\}, \{1\}\}$

d' il y en a donc 6

iii) $S_{4,2} = 1 + 6 = 7$ (i) + (ii)

$S_{3,1} = 1$ (b) et $S_{3,2} = 3$ (a)

comme $7 = 1 + 2 \times 3$, on a $\underline{S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + k S_{n-1,k}}$

b) i) si $\mathcal{S} = \{\{n_1\}, A_2, \dots, A_k\}$ est une partition ^②
de E , $\{A_2, \dots, A_k\}$ est une partition de $\{n_1, \dots, n_{n-1}\}$

donc il y en a : $S_{n-1, k-1}$

ii) si $\mathcal{S} = \{\underbrace{\{n_1, \dots\}}_{A_1}, A_2, \dots, A_k\}$

Comme $A_1 = \{n_1\} \neq \emptyset$, $\{A_1, \{n_1\}, A_2, \dots, A_k\}$
est une partition de $\{n_1, \dots, n_n\}$ en k parties,
réciproquement si l'on a une partition $\{A_1, \dots, A_k\}$
de $\{n_1, \dots, n_{n-1}\}$, on peut former k partitions
de $\{n_1, \dots, n_n\}$ en "mettant" n_n soit dans A_1 , soit
dans $A_2, \dots$, soit dans A_k ,

donc il y en a $k S_{n-1, k}$

iii) d'où $S_{n, k} = S_{n-1, k-1} + k S_{n-1, k}$ (i) + (ii)

3) Récurance sur n : $n=2$, $S_{2,1} \stackrel{1a i)}{=} 1 = \frac{2 \times 1}{2}$

$$\text{Si } S_{n,n-1} = \frac{n(n-1)}{2}, \quad S_{n+1,n} = S_{n,n-1} + n S_{n,n} \quad (3)$$

car $n+1 \geq 2, k=n \in [1, n+1-1]$ (hypothèse du 2°)

$$\text{d'où } S_{n+1,n} = \frac{n(n-1)}{2} + n \times 1 = \frac{n(n+1)}{2} \quad (1 \text{ et } 2)$$

$$\underline{\text{d}} \quad \boxed{\forall n \geq 2 \quad S_{n+1,n} = \frac{n(n+1)}{2}}$$

$$4) \quad S_{n,2} = S_{n-1,1} + 2 S_{n-1,2} = 1 + 2 S_{n-1,2}$$

$$\text{d'où } \underline{2(S_{n-1,2} + 1) = S_{n,2} + 1 \quad \forall n \geq 3}$$

On en déduit que $(S_{n,2} + 1)_{n \geq 2}$ est une suite géométrique,

$$\text{donc } \forall n \geq 2 \quad S_{n,2} + 1 = 2^{n-2} (S_{2,2} + 1)$$

↑ réc. sur n pour être sûr!

$$\text{d'où } \boxed{\forall n \geq 2 : S_{n,2} = 2^{n-1} - 1}$$

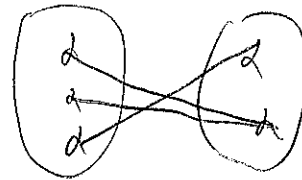
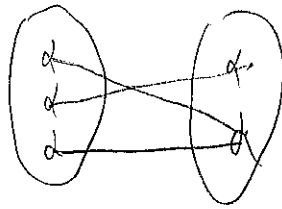
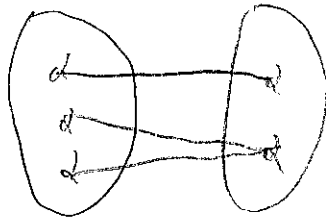
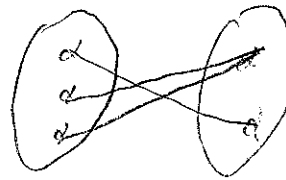
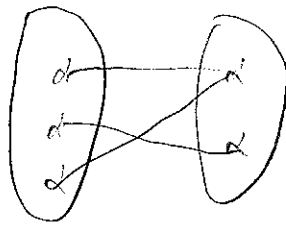
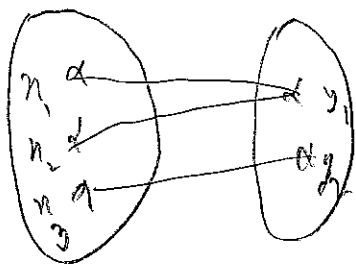
$$5a) \quad \underline{\sigma_{n,k} = 0} \quad \text{car si } f \in \mathcal{F}(E, F), \quad |f(E)| \leq |E| = n < k$$

donc $f(E) \neq F$

b) si $|E| = |F|$, f surjective $\Leftrightarrow f$ bijective

$$\text{d'où } \underline{\sigma_{n,n} = n!}$$

c)



$$\mathcal{U}' \quad \boxed{\sigma_{3,2} = 6}$$

d) i) * $\forall j \in \llbracket 1, k \rrbracket, A_j \neq \emptyset$ car f étant surjective, $\exists n \in E \setminus$

$y_j = f(n)$ et donc $n \in A_j$.

* $\forall (j, j') \in \llbracket 1, k \rrbracket^2 / j \neq j',$ si $A_j \cap A_{j'} \neq \emptyset,$

$\exists n \in E \setminus f(n) = y_j$ et $f(n) = y_{j'}$ absurde

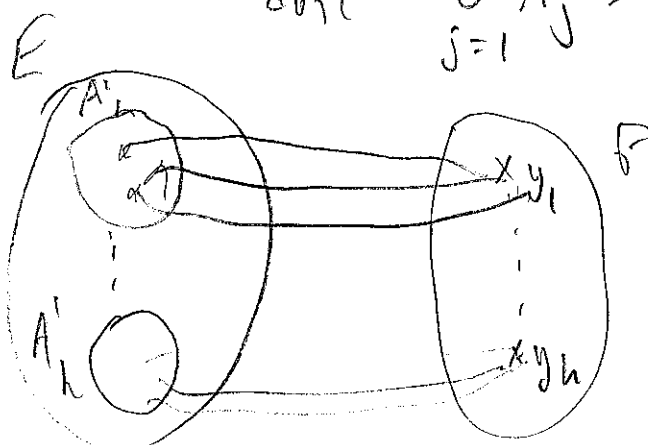
donc $A_j \cap A_{j'} = \emptyset$

* $\forall n \in E \exists j \in \llbracket 1, k \rrbracket / f(n) = y_j$ et $n \in A_j$

$$\text{donc } \bigcup_{j=1}^k A_j = E$$

$\mathcal{U}'' \quad \boxed{\mathcal{A} \text{ partition de } E}$

ii)



On a une bijection entre $\{A'_1, \dots, A'_k\}$ et $\{y_1, \dots, y_k\}$ ⑤

donc il y a $k!$ surjections tels que $\pi(p) = \mathcal{A}'$

iii) $\sigma_{n,k}$ est donc égal au nombre de partitions de E fois le nb de surjections associées à ces partitions.

$$d^0 \quad \sigma_{n,k} = k! S_{n,k}$$

6) Effectuons une récurrence sur n :

$$H_n : \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad \sigma_{n,k} \leq (2k)^n$$

$n=0$ $\llbracket 0, n \rrbracket = \{0\}$ et $\sigma_{0,0} = 1 \leq (2 \times 0)^0 = 1$ (convention)

donc H_0 vraie

Le problème de la formule de récurrence de A 2), c'est qu'elle n'est valable que pour $n \geq 2$.

Il faut donc aussi vérifier H_1 :

$$k=0 : \sigma_{1,0} = 0 \leq (2 \times 0)^1$$

↑
convention

donc H_1 vraie

$$k=1 : \sigma_{1,1} = 1 \leq (2 \times 1)^1 = 2$$

supposons H_{n-1} vraie et $n \geq 2$, alors avec l. 2) : ⑥

$$\begin{aligned}
 * \forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket \quad S_{n,k} &= S_{n-1,k-1} + k S_{n-1,k} \\
 &\leq (2k-2)^{n-1} + k(2k)^{n-1} \quad (H_{n-1}) \\
 &\leq 2^{n-1} [(k-1)^{n-1} + k^n] \\
 &\leq 2^{n-1} [k^{n-1} + k^n] \stackrel{\text{car } 0 \leq k-1 \leq k}{\leq} \\
 &\leq 2^{n-1} [k^n + k^n] \stackrel{\text{car } k \geq 1}{\leq} \\
 &\leq (2k)^n
 \end{aligned}$$

$$* k=0 \quad S_{n,0} = 0 \leq (2 \times 0)^n = 0 \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

$$* k=n \quad S_{n,n} = 1 \leq (2 \times n)^n \quad \text{car } H_n \text{ vraie}$$

$$\text{d'où } \boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad S_{n,k} \leq (2k)^n}$$

IB 1) card $\{P_0, \dots, P_N\} = n+1 = \dim \mathbb{R}_N[X]$, il suffit donc de montrer que cette famille est liée :

$$\forall (\lambda_0, \dots, \lambda_N) \in \mathbb{R}^{N+1} \quad \lambda_0 P_0 + \dots + \lambda_N P_N = 0$$

comme $\forall i, d^0 P_i = i$, si $\exists i \mid \lambda_i \neq 0$ alors :

$$d^0 (\lambda_0 + \dots + \lambda_N P_N) = \max \{ i \in \llbracket 0, N \rrbracket \mid \lambda_i \neq 0 \} \in \mathbb{N} : \text{absurde}$$

cas $\lambda_0 = \dots = \lambda_N = 0$ d'où $(P_0, \dots, P_N)$ base de $\mathbb{R}_N[X]$. (7)

B 2a) $P_{k+1} + k P_k = \prod_{j=0}^k (X-j) + k \prod_{j=0}^{k-1} (X-j)$

$k \geq 1$ $= \left[\prod_{j=0}^{k-1} (X-j) \right] [X - k + k] = X P_k$

* $P_1 + 0 P_0 = P_1 = X = X \cdot 1 = X P_0$

d'où $\forall k \in [0, N-1] \quad P_{k+1} + k P_k = X P_k$

b) $n=0$: $X^0 = 1 = P_0 = \sum_{k=0}^0 S_{0,k} P_k$: vraie pour $n=0$

Supposons la relation vraie pour $n \leq N-1$:

$X^{n+1} = X \sum_{k=0}^n S_{n,k} P_k$ (hyp. de réc.)

$= \sum_{k=0}^n S_{n,k} (P_{k+1} + k P_k)$ (2a)

$= \sum_{k=1}^{n+1} S_{n,k-1} P_k + \sum_{k=0}^n k S_{n,k} P_k$ (cdv)

$= \sum_{k=1}^{n+1} (S_{n,k-1} + k S_{n,k}) P_k + \underbrace{S_{n,n+1-1} P_{n+1} + 0 \cdot S_{n,0} P_0}_{= S_{n+1,n+1} P_{n+1}}$

$= \sum_{k=1}^{n+1} S_{n+1,k} P_k$

d'où $\forall n \in [0, N] \quad X^n = \sum_{k=0}^n S_{n,k} P_k$

(8)

B3)

$$\Pi = \text{Pass}(B, B) = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^N \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0 \\ \vdots \\ p_N \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & s_{1,0} & s_{2,0} & \dots & s_{N,0} \\ 0 & s_{1,1} & s_{2,1} & \dots & s_{N,1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & s_{N,N} \end{pmatrix}$$

$$d^o \quad \Pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & 1 & 1 & \dots & 1 \\ & & & \ddots & \\ & & & & s_{n,h} \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \uparrow \\ \leftarrow h \end{matrix}$$

B4 a) $\chi_{\Pi}(n) = (n-1)^{N+1}$

b) Si $N=1$, $\Pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$: diagonal !

Si $N \geq 2$, si Π diagonalisable, $\chi_{\Pi}(n) = n-1$

et $\Pi = I_{N+1}$: absurde

d^o : oui $N=1$, non $N \geq 2$

ID 1) a) Posons $f: n \mapsto \frac{1}{(k+1)!} (e^n - 1)^{k+1}$

9

* $f \in C^1$ sur $\mathbb{R}$ par TC

* $\forall n \in \mathbb{R} \quad f'(n) = \frac{1}{k!} (e^n - 1)^k \times e^n$

et $(k+1)f(n) + \frac{1}{k!} (e^n - 1)^k = \frac{(e^n - 1)^{k+1}}{k!} + \frac{1}{k!} (e^n - 1)^k$

$\frac{(e^n - 1)^k}{k!} (e^n - 1 + 1) = f'(n) \quad \text{d'où } \boxed{f \text{ solution de (I.1)}}$

b) Eq. homogène: $y' = (k+1)y \quad \text{donc } y = \lambda e^{(k+1)x}$
 $\lambda \in \mathbb{R}$

Général: f est solution (particulière) de (I.1)

d'où: $\boxed{y = \left\{ x \mapsto \lambda e^{(k+1)x} + \frac{1}{(k+1)!} (e^x - 1)^{k+1}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}}$

① 2a) $\forall n \geq k : 0 \leq \left| \frac{s_{n,k}}{n!} x^n \right| \leq \frac{|2k-x|^n}{n!} = \frac{q^n}{n!}$
 $\forall n \in \mathbb{R}$

et comme $\left(\frac{q^n}{n!} \right)_{n \geq k}$ cvf, $\forall q \in \mathbb{R}$, par TC:

d'où $\boxed{\forall n \in \mathbb{R} \quad \left(\sum_{n \geq k} \frac{s_{n,k}}{n!} x^n \right)_{n \geq k} \text{ cvf}}$

b) $\frac{1}{0!} (e^x - 1)^0 = 1$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{s_{n,0}}{n!} x^n = \frac{s_{0,0}}{0!} + 0 + 0 + \dots = 1$

d'où $\boxed{\text{I.2 est vraie pour } k=0.}$

d) Avec le ① et b), $\exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus$

⑩

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{s_{n,k+1}}{n!} x^n = \lambda e^{(k+1)x} + \frac{1}{(k+1)!} (e^x - 1)^{k+1}$$

Pour $n=0$, $\frac{s_{k+1,k+1}}{(k+1)!} 0^{k+1} + 0 + \dots = \lambda$ donc $\lambda = 0$

cq's la propriété est vraie pour $k+1$.

d $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{R} \quad \sum_{n=k}^{\infty} \frac{s_{n,k}}{n!} x^n = \frac{1}{k!} (e^x - 1)^k}$

④) Soit $k \in \mathbb{N}^*$, fixée, $\forall n \geq k$ ($k \in \llbracket 0, n \rrbracket$) :

$$\frac{s_{n,k}}{k^n} = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \frac{j^n}{k^n}$$

pour $j \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$ $|\frac{j}{k}| < 1$ et $(\frac{j}{k})^n \rightarrow 0$

d'où $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_{n,k}}{k^n} = \frac{1}{k!} (-1)^0 \binom{k}{k} x^k = \frac{1}{k!}$

d' $\boxed{s_{n,k} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{k^n}{k!}}$

Fin du corrigé du pb ds2*

①

exercice 1. du ds 2

1) $n=1$ $\{\{a\}\}$ est l'unique partition de X_1 , d'où $\boxed{\pi_1 = 1}$

$n=2$ $\{\{a\}, \{b\}\}$ et $\{\{a, b\}\}$ sont les partitions de X_2

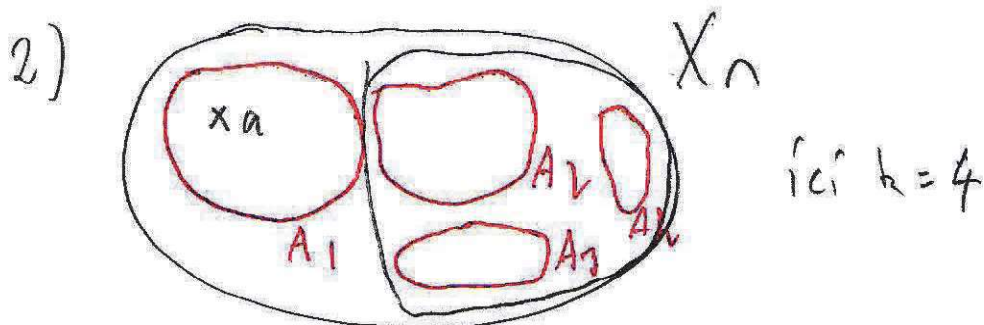
d'où $\boxed{\pi_2 = 2}$

$n=3$ $\{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$

$\{\{a, b\}, \{c\}\}, \{\{a, c\}, \{b\}\}, \{\{b, c\}, \{a\}\}$

$\{\{a, b, c\}\}$ sont les partitions de X_3

d'où $\boxed{\pi_3 = 5}$



une partition de X_n est à la forme :

$$\underbrace{\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_p\}}_{A_1}, \underbrace{\{a_{p+1}, \dots, a_q\}}_{A_2}, \dots, \underbrace{\{a_q, \dots, a_n\}}_{A_k}$$

① Dans A_1 , on peut donc mettre $\boxed{a}$ avec $p-1$ elt ②
 avec $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$ (si $p=1$: $A_1 = \{a\}$
 $p=n$: $A_1 = X_n$)

Soit $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on choisit $\binom{n-1}{p-1}$ elt pour
 créer A_1 et avec les elt restants de $X_n - A_1$
 qui sont au nombre de $n-p$, on peut créer
 π_{n-p} partitions.

Donc
$$\pi_n = \sum_{p=1}^n \binom{n-1}{p-1} \pi_{n-p} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \pi_k$$

rem, pour $p=n$, $A_1 = X_n$ et $n-p=0$ et
 comme $\pi_0 = 1$, on a bien 1
 partition avec $A_1 = X_n$.

3) $\pi_4 = \binom{3}{0} \pi_3 + \binom{3}{1} \pi_2 + \binom{3}{2} \pi_1 + \binom{3}{3} \pi_0$
 $= 5 + 3 \times 2 + 3 + 1 = \underline{15}$, de même :

$\pi_5 = \underline{52}$ et donc $\boxed{\pi_6 = 203}$

4) On sait qu'une relation d'équivalence ^③ sur un ensemble E est une partition de E .

Réciproquement soit $\{A_1, \dots, A_h\}$ une partition de E . Associons lui une relation d'équivalence de tel sorte que les classes d'~ soient $A_1, \dots, A_h$:

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad x R y \text{ si } \exists i \in [1, h] \mid x \in A_i \text{ et } y \in A_i$$

$$\forall x \in E \quad \exists i \in [1, h] \mid x \in A_i \quad \text{car} \quad \bigcup_{i=1}^h A_i = E$$

donc R réflexive

- R est clairement symétrique.

$$\forall (x, y, z) \in E^3 \mid x R y \text{ et } y R z :$$

$$\exists i \in [1, h] \mid x \in A_i \text{ et } y \in A_i$$

$$\exists j \in [1, h] \mid y \in A_j \text{ et } z \in A_j$$

si $i \neq j$ $A_i \cap A_j = \emptyset$ (partition) , or $y \in A_i \cap A_j$

donc $i = j$ d'où $x \in A_i$ et $z \in A_i$: $x R z$

donc R transitive cqs R relation d'~

En conséquence il y a exactement le même nombre ④
de partitions et de relations d'équivalence sur
l'ensemble $\bar{n}$ est dit $\boxed{\pi_n}$.

5)

```
from math import factorial
```

```
def binome(n,p):
```

```
    return(factorial(n)//factorial(n-p)//factorial(p))
```

```
def P(n):
```

```
    if n==0 or n==1:
```

```
        return 1
```

```
    else:
```

```
        som=0
```

```
        for p in range(1,n+1):
```

```
            som=som+binome(n-1,p-1)*P(n-p)
```

```
        return(som)
```

```
for n in range(21):
```

```
    print('P(',n,') = ',P(n))
```

In [4]: (executing lines 1 to 17 of "NombreDeBell(partitions).py")

P(0) = 1

P(1) = 1

P(2) = 2

P(3) = 5

P(4) = 15

P(5) = 52

P(6) = 203

P(7) = 877

P(8) = 4140

P(9) = 21147

P(10) = 115975

P(11) = 678570

P(12) = 4213597

P(13) = 27644437

P(14) = 190899322

P(15) = 1382958545

P(16) = 10480142147

P(17) = 82864869804

P(18) = 682076806159

P(19) = 5832742205057

P(20) = 51724158235372

In [5]:

Fin corrigé de l'exercice

$$d^o \quad \boxed{G\left(\left[0, \frac{1}{e}\right]\right) = [1, e]}$$

Td de la bijection

①

g) on conclut directement avec $\begin{cases} l \in \mathbb{I} \cup \{1\} \text{ (notamment } l \in b)) \\ l \in \mathbb{R} \setminus \{2, e\} \end{cases}$

$$d^o \quad \boxed{\forall a \in \left[-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right] : F_a(1) = \alpha_a}$$

$$4) \text{ si } y > 0, \quad y^y = c \Leftrightarrow e^{y \ln y} = c \Leftrightarrow y \ln y = \ln c$$

$$\Leftrightarrow \ln \frac{1}{y} = (-\ln c) \frac{1}{y} \quad \text{c'est } E_{-\ln c}$$

Comme $1 \leq c \leq e^{1/e}$, $-\ln c \in \left[-\frac{1}{e}, 0\right]$, d'après

$l \in \mathbb{I} \cup \{1\}$, l'équation $\overset{E_{-\ln c}}{y^y = c}$ admet une unique solution α .

on plus $\alpha = F_{-\ln c}(1)$ avec $l \in \mathbb{I} \cup \{1\}$.

Cqsd l'équation $y^y = c$ admet une unique solution :

$$y_0 = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{F_{-\ln c}(1)} = \left(F_{-\ln c}(1)\right)^{-1} = F_{-\ln c}(-1)$$

$\uparrow$ 2c)

on conclut avec la définition de F_a :

$$\boxed{y_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (-\ln c)^n = 1 + \ln c + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} (\ln c)^n}$$

①

Exercice commun aux ds2 et ds2*

1) pour $m=n=1$, on a $u_{1 \times 1} = u_1 \times u_1$, donc $u_1^2 = u_1$,

comme $u_1 \neq 0$, $\boxed{u_1 = 1}$

2) Montrons le par récurrence sur k :

$$H_k: \forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_{n^k} = u_n^k$$

$k=0$: évident $u_{n^0} = u_1 = u_n^0 = 1$

Si H_k est vraie, $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_{n^{k+1}} = u_{n^k \times n} = u_{n^k} \times u_n$

$$= u_n^k u_n = u_n^{k+1} \quad \text{et } H_{k+1} \text{ vraie}$$

$$\underline{\text{d}} \quad \boxed{\forall k \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_{n^k} = u_n^k}$$

3) Analyse: $u_n = u_{n^k} = u_n^k = n^{\alpha_n} = n^{k\alpha_n} = (n^{\alpha_n})^k$

il suffit donc que α_n vérifie: $u_n = n^{\alpha_n}$. Comme tous les termes sont positifs, passons au logarithme:

$$\ln u_n = \alpha_n \ln n$$

Synthèse: posons $\alpha_n = \frac{\ln u_n}{\ln n}$ on a alors $u_n = n^{\alpha_n}$

On a, si $n = n^k$, $u_n = u_{n^k} = u_n^k = (n^{\alpha_n})^k = (n^k)^{\alpha_n} = n^{\alpha_n}$

$$\underline{\text{d}} \quad \boxed{u_n = n^{\alpha_n}} \quad * \text{ voir p. 1}$$

4a) Posons $I = \{n \in \mathbb{N} \mid \pi_1^n \geq \pi_2^k\}$. On a $I \subset \mathbb{N}$ ②

et comme $\pi_1 \geq 2$, $\pi_1^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$. Donc $\exists n \in I$ et $I \neq \emptyset$

posons $l = \min I$ (l + petit elt de I); on a $\pi_1^l \geq \pi_2^k$.

Comme $\pi_1^0 = 1 < \pi_2^k$, $0 \notin I$ et $l \geq 1$ d'où $l-1 \in \mathbb{N}$

et comme $l-1 < l = \min I$, $l-1 \notin I$ donc :

$$\pi_1^{l-1} < \pi_2^k \quad \text{donc} \quad \pi_1^l < \pi_2^k \pi_1 < \pi_2^k \pi_2 = \pi_2^{k+1}$$

$$\underline{d.} \quad \boxed{\pi_2^k \leq \pi_1^l < \pi_2^{k+1}}$$

b) On utilise l'hypothèse ($\alpha \geq 2$) avec $m = \pi_2^k$ et $n = \pi_1^l$:

$$u_m \leq A u_n \quad \text{donc} \quad m^{\alpha n_2} \leq A n^{\alpha n_1} \quad \text{soit} \quad (\pi_2^k)^{\alpha n_2} \leq A (\pi_1^l)^{\alpha n_1}$$

$$\text{On } \pi_1^l < \pi_2^{k+1} \quad \text{donc} \quad \underline{(\pi_2^k)^{\alpha n_2} \leq A (\pi_2^{k+1})^{\alpha n_1}}$$

$$\text{De même pour } m = \pi_1^l \text{ et } n = \pi_2^{k+1} : (\pi_1^l)^{\alpha n_1} \leq A (\pi_2^{k+1})^{\alpha n_2}$$

$$\text{Comme } \pi_2^k \leq \pi_1^l, \quad \underline{(\pi_2^k)^{\alpha n_1} \leq (\pi_1^l)^{\alpha n_1} \leq A (\pi_2^{k+1})^{\alpha n_2}}$$

$$c) (\pi_2^k)^{\alpha n_2} \leq A (\pi_2^{k+1})^{\alpha n_1} \Rightarrow \left(\frac{\pi_2^{\alpha n_2}}{\pi_2^{\alpha n_1}} \right)^k \leq A (\pi_2)^{\alpha n_1} = \Pi$$

Donc la suite (q^k) est majorée par Π avec $q = \frac{\pi_2^{\alpha n_2}}{\pi_2^{\alpha n_1}} > 0$

Ceci n'est possible que si $0 < q \leq 1$ (sinon $q^k \rightarrow +\infty$)

on $q = n_2^{\alpha_{n_2} - \alpha_{n_1}}$ donc $\begin{cases} q \leq 1 \Rightarrow \alpha_{n_2} - \alpha_{n_1} \leq 0 \\ n_2 \geq 2 \end{cases}$ (3)

d'où $\alpha_{n_2} \leq \alpha_{n_1}$

on fait de même avec la 2^{ème} inégalité de 4b)

d'où $\alpha_{n_1} \leq \alpha_{n_2}$ d'où $\alpha_{n_1} = \alpha_{n_2}$

d) Posons $\alpha = \alpha_2$ (avec $n=2$), $\forall n \geq 2$ $\alpha_n = \alpha$.

Soit $n \geq 2$, on a $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_i^{k_i}$ avec $p_1, \dots, p_i$ des nombres 1^{er} et $k_1, \dots, k_i \in \mathbb{N}^*$ (décomposition en produit de facteurs 1^{er}). D'où ;

$$u_n = u_{p_1^{k_1}} \times \dots \times u_{p_i^{k_i}} = (p_1^{k_1})^\alpha \times \dots \times (p_i^{k_i})^\alpha = n^\alpha$$

comme $u_1 = 1 = 1^\alpha$, on peut conclure ;

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = n^\alpha$ suite page (4)

*

Montrons que $\alpha \geq 0$. Si $\alpha_n < 0$, soit $k \geq 2$ pour $m=1$ et $n = n^k$, on a $m \leq n$ donc $u_m = 1 \leq A u_n$ soit $u_n = u_{n^k} = (n^k)^\alpha$

comme $(n^\alpha)^k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$ ($n^\alpha < 1$) c'est absurde donc $\alpha_n \geq 0$

Réciproquement, si $\exists \alpha \geq 0 \mid \forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = n^\alpha$ (4)

alors :

$$* \forall (n, m) \in \mathbb{N}^{*2}, \quad u_{nm} = u_n u_m$$

$$* m \leq n \Rightarrow m^\alpha \leq 1, n^\alpha \quad (\alpha = 1)$$

$$d' : \boxed{\exists \alpha \geq 0 \mid \forall n \in \mathbb{N}^* : u_n = n^\alpha}$$